

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

10 giugno 2004

Teoremi dell'indice per morfismi di fibrati vettoriali e per foliazioni

TESI VINCITRICE DEL PREMIO FRANCO TRICERRI 2005

DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Candidato

Valentino Tosatti

tosatti@sns.it

Relatore

Prof. Marco Abate

Università di Pisa

Controrelatore

Prof. Paolo Lisca

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni di base	7
1.1 Fibrati vettoriali	7
1.2 Classi caratteristiche	13
1.3 Fasci analitici su varietà complesse	15
1.4 Sottovarietà analitiche	20
1.5 Correnti	21
2 La formula di MacPherson classica	27
2.1 Morfismi normali tra fibrati	28
2.2 Modificazioni e risoluzioni	32
2.3 La formula di MacPherson classica	35
3 La formula di MacPherson locale	41
3.1 Il flusso nel caso universale	41
3.2 Gli operatori di Morse-Stokes	44
3.3 L'analisi degli operatori Γ_0 e Γ_∞	46
3.4 I residui	51
3.5 La formula di MacPherson nel caso universale	56
3.6 La formula di MacPherson nel caso normale	59
3.7 La formula di MacPherson nel caso analitico reale	64
3.8 La formula di MacPherson nel caso olomorfo	66
3.9 Calcolo di alcuni residui	68
4 Applicazioni alle foliazioni olomorfe	73
4.1 Il Teorema di Poincaré-Hopf	73
4.2 Il residuo di Grothendieck	75
4.3 Foliazioni olomorfe	76
4.4 Connessioni parziali, azioni olomorfe su fibrati e Teorema di vanishing di Bott	78
4.5 Il Teorema di Baum-Bott	84
Conclusioni	91

Introduzione

Uno dei problemi più importanti della Geometria Differenziale è lo studio dei legami tra le proprietà locali e le proprietà globali degli oggetti geometrici. I primi teoremi di questo tipo furono scoperti nell'Ottocento da Gauss, Riemann ed altri, nello studio delle superfici. Altri ne furono dimostrati nella prima metà del Novecento da Poincaré, Lefschetz, Hopf, fino ad arrivare al celebre Teorema dell'Indice di Atiyah-Singer del 1963.

In questa tesi studieremo alcuni teoremi di tipo locale-globale, detti dell'Indice. Il prototipo di essi è il Teorema di Poincaré-Hopf, che permette di calcolare la caratteristica di Eulero di una varietà compatta, una quantità topologica globale, come una somma su un numero finito di punti, gli zeri di un campo vettoriale, di certi numeri detti *indici* che dipendono solo dal comportamento locale del campo. Questo può essere generalizzato considerando al posto del campo vettoriale una sezione di un fibrato vettoriale: la quantità topologica che si calcola è l'equivalente della caratteristica di Eulero, ovvero la classe di Chern massima.

Più in generale, consideriamo una varietà compatta e orientata X e due fibrati vettoriali complessi $E \rightarrow X$, $F \rightarrow X$ con un morfismo di fibrati $f : E \rightarrow F$. Così come una varietà localmente è “piatta” come lo spazio Euclideo, ma globalmente può essere “curva”, così i fibrati vettoriali localmente sono come il prodotto della varietà di base per uno spazio vettoriale, ma globalmente possono essere “curvi”.

Se supponiamo che f sia non singolare, ovvero ovunque di rango massimo, allora ci aspettiamo che le quantità topologiche di E siano in qualche senso uguali alla controimmagine di quelle di F . Se invece f ha delle singolarità, ovvero punti in cui il rango non sia massimo, ci chiediamo se sia ancora possibile ottenere una relazione tra la struttura globale di E e quella di F , tenendo però in considerazione le singolarità di f .

Una formula di questo tipo è stata trovata da R. MacPherson nella sua tesi di Dottorato nel 1970, ed è stata recentemente raffinata ed ampliata da

R. Harvey e B. Lawson.

In questa tesi studieremo la formula di MacPherson e le sue generalizzazioni di Harvey e Lawson, e come applicazione di essa daremo una nuova dimostrazione di una versione del Teorema dell'Indice di Baum-Bott per foliazioni olomorfe con singolarità.

Una foliazione su una varietà è un ricoprimento di essa con delle sottovarietà, le “foglie”, che localmente sono come piani paralleli nello spazio Euclideo. Una foliazione può avere delle singolarità, cioè dei punti dove le foglie “collassano” e la descrizione locale non è più quella dei piani paralleli.

Se la varietà ha una struttura complessa, è possibile definire una foliazione olomorfa, cioè compatibile con la struttura complessa, e nel 1972 P. Baum e R. Bott hanno dimostrato un Teorema dell'Indice che calcola degli invarianti topologici delle foliazioni olomorfe con una somma di contributi locali nelle singolarità.

Noi mostreremo come una versione del Teorema di Baum-Bott, lievemente più debole dell'originale, sia una conseguenza della formula di MacPherson e come si possano calcolare i contributi locali. I nostri risultati originali sono i Teoremi 4.19 e 4.20.

Desidero ringraziare qui tutte le persone che mi hanno aiutato ed incoraggiato durante questa tesi e primo fra tutti il relatore Prof. Marco Abate per la sua disponibilità e cordialità e per avermi seguito da Settembre 2002 fino ad ora. Ho parlato di questa tesi con alcune persone che mi hanno dato la loro attenzione ed il loro parere e che ringrazio in ordine alfabetico: i Professori J.-M. Bismut, Lê Dũng Tráng, Paolo Lisca, M.S. Narasimhan e Ramadas Ramakrishnan. Ringrazio Mariuccia Fasanella e lo staff della Biblioteca dell'ICTP di Trieste per avermi procurato una copia della tesi di MacPherson. Un grazie di cuore va anche alla Scuola Normale Superiore per avermi accolto e sostenuto nella mia avventura pisana ed un caloroso abbraccio ad i miei familiari e ad i miei amici e compagni di Pisa, tra cui: Alberto, Andrea, Antonella, Dario, Enrico, Gianluca, Giulio, Lea, Luca, Maurizio, Oreste e Piotr.

Capitolo 1

Nozioni di base

1.1 Fibrati vettoriali

Definizione 1.1 Sia X una varietà differenziabile di classe C^∞ , connessa, $\dim_{\mathbf{R}} X = n$. Un fibrato vettoriale reale su X di rango k è il dato di una varietà differenziabile E con un'applicazione C^∞ $\pi : E \rightarrow X$ che sia surgettiva e che soddisfi

1. ogni controimmagine $E_x := \pi^{-1}(x)$ (fibra su x) abbia una struttura di spazio vettoriale su \mathbf{R} di dimensione k ;
2. per ogni $x \in X$ esista un intorno aperto U di x ed un diffeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^k$$

detto banalizzazione locale, tali che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbf{R}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_U \\ & U & \end{array}$$

dove $\pi_U : U \times \mathbf{R}^k \rightarrow U$ è la proiezione sul primo fattore;

3. la restrizione di φ ad ogni fibra $\varphi : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbf{R}^k$ sia un isomorfismo \mathbf{R} -lineare.

Date due banalizzazioni φ_U, φ_V su due aperti U, V , abbiamo un'applicazione $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbf{R})$ data da

$$g_{UV}(x) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\} \times \mathbf{R}^k},$$

detta *funzione di transizione* per E relativa alle banalizzazioni date. Le funzioni di transizione soddisfano necessariamente

$$g_{UV}(x) \circ g_{VU}(x) = Id \quad \text{per ogni } x \in U \cap V \quad (1.1)$$

$$g_{UV}(x) \circ g_{VW}(x) \circ g_{WU} = Id \quad \text{per ogni } x \in U \cap V \cap W. \quad (1.2)$$

Viceversa dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X e funzioni C^∞ $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbf{R})$ che soddisfino (1.1) e (1.2), allora esiste un unico fibrato vettoriale reale $E \rightarrow X$ che abbia le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione.

In generale le operazioni che si possono applicare agli spazi vettoriali, si possono applicare ai fibrati vettoriali, semplicemente fibra per fibra. Per esempio dato un fibrato vettoriale $E \rightarrow X$, il suo *fibrato duale* è il fibrato $E^* \rightarrow X$ che ha come fibra

$$E_x^* = (E_x)^* = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(E_x, \mathbf{R}).$$

Esso può essere costruito astrattamente a partire dalle funzioni di transizione: se E è definito dalle g_{UV} , allora E^* è definito dalle $h_{UV} := {}^t g_{UV}^{-1}$.

Analogamente, dati i fibrati vettoriali E ed F , possiamo costruire i fibrati vettoriali

$$E \oplus F, \quad E \otimes F, \quad \text{Hom}(E, F) = E^* \otimes F, \quad \Lambda^j(E), \quad \det(E) = \Lambda^{\text{rank} E}(E).$$

Definizione 1.2 *Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale reale. Un sottofibrato $F \subset E$ è una collezione $\{F_x \subset E_x\}_{x \in X}$ di sottospazi vettoriali delle fibre di E , tali che $F := \bigcup_{x \in X} F_x \subset E$ sia una sottovarietà di E .*

Chiaramente dalla definizione segue subito che F è esso stesso un fibrato vettoriale reale. È inoltre possibile definire il fibrato quoziente E/F che ha come fibra sopra ad $x \in X$ lo spazio vettoriale E_x/F_x .

Data una mappa differenziabile $f : M \rightarrow N$ e dato $\pi : E \rightarrow N$ fibrato vettoriale reale su N , definiamo il fibrato pullback f^*E di E tramite f in modo che, se E è definito dal ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e dalle funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, allora f^*E è definito da $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. Da ciò segue che $(f^*E)_x \cong E_{f(x)}$ e che lo spazio totale di f^*E è

$$\{(p, e) \in M \times E \mid f(p) = \pi(e)\}.$$

Definizione 1.3 *Siano $E \rightarrow X$ ed $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali reali su X . Un morfismo di fibrati vettoriali $\alpha : E \rightarrow F$ è una mappa C^∞ che commuti con le proiezioni e tale che la sua restrizione ad ogni fibra $\alpha_x : E_x \rightarrow F_x$ sia lineare. Diciamo che α è un isomorfismo se essa è un diffeomorfismo. Un fibrato vettoriale si dice banale se è isomorfo al fibrato prodotto $E = X \times \mathbf{R}^k$.*

Prendiamo un ricoprimento U_α di X banalizzante per E ed F , con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ e $\gamma_{\alpha\beta}$ rispettivamente e consideriamo un morfismo di fibrati $f : E \rightarrow F$.

Sopra ad U_α , $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbf{C}^r$ e $F|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbf{C}^s$, f ha la forma $(x, v) \mapsto (x, f_\alpha(x)v)$, dove $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{C}^r, \mathbf{C}^s)$ è una mappa C^∞ .

Sulle intersezioni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ abbiamo la condizione di compatibilità

$$f_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \cdot f_\beta, \quad (1.3)$$

dove per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ vediamo le f_α , $g_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ come matrici ed il prodotto è quello tra matrici.

Viceversa date le f_α che soddisfino la condizione di compatibilità esiste un unico morfismo f che ristretto ad U_α sia dato da (Id, f_α) .

Definizione 1.4 *Diciamo che una successione di fibrati vettoriali reali su X e morfismi di fibrati*

$$E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G$$

è esatta, se per ogni $x \in X$ lo è la successione indotta sulla fibra su x

$$E_x \xrightarrow{\alpha_x} F_x \xrightarrow{\beta_x} G_x,$$

ovvero se $\ker \beta_x = \text{Im } \alpha_x$.

Per esempio, se $F \subset E$ è un sottofibrato, allora per ogni $x \in X$ abbiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow F_x \xrightarrow{\iota_x} E_x \xrightarrow{p_x} E_x/F_x \rightarrow 0,$$

dove $\iota : F \hookrightarrow E$ è l'inclusione e $p : E \rightarrow E/F$ è la proiezione sul quoziente. Quindi abbiamo la successione esatta di fibrati

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} E/F \rightarrow 0.$$

Notiamo che, dato un morfismo di fibrati su X , $\alpha : E \rightarrow F$, allora $\ker \alpha := \bigcup_{x \in X} \ker \alpha_x$ e $\text{Im } \alpha := \bigcup_{x \in X} \text{Im } \alpha_x$ sono dei sottofibrati di E ed F rispettivamente, se e solo se il rango di α_x è costante in x . In questo caso, $E/\ker \alpha$ è isomorfo ad $\text{Im } \alpha$, mentre $F/\text{Im } \alpha$ è per definizione isomorfo a $\text{coker } \alpha := \bigcup_{x \in X} \text{coker } \alpha_x$.

Definizione 1.5 *Una sezione σ di un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow X$ sopra ad un aperto $U \subset X$ è una mappa C^∞*

$$\sigma : U \rightarrow E,$$

tale che $\pi \circ \sigma = Id_U$. Una sezione definita su tutta X è detta sezione globale.

Un fibrato vettoriale E ammette sempre almeno una sezione globale, detta *sezione nulla* che ad $x \in X$ associa il vettore $0 \in E_x$. L'insieme delle sezioni di E su U , $A^0(U, E)$, ammette una struttura di spazio vettoriale su \mathbf{R} e di modulo sull'anello delle funzioni C^∞ su U , $A^0(U)$, con le operazioni

$$(a \cdot s_1 + b \cdot s_2)(x) := a \cdot s_1(x) + b \cdot s_2(x),$$

$$(f \cdot s)(x) := f(x) \cdot s(x),$$

dove $a, b \in \mathbf{R}$, $s_1, s_2, s \in A^0(U, E)$, $f \in A^0(U)$.

Se $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X banalizzante per E e se $\sigma : X \rightarrow E$ è una sezione di E , allora sopra ad U_α , $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbf{C}^k$ e dunque σ ha la forma $x \mapsto (x, \sigma_\alpha(x))$, dove $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{C}^k$ è una mappa C^∞ .

Sulle intersezioni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ abbiamo la condizione di compatibilità $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \sigma_\beta$, dove per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ vediamo $g_{\alpha\beta}$ come una matrice e σ_β come un vettore colonna.

Viceversa date le σ_α che soddisfino la condizione di compatibilità esiste un'unica sezione σ che ristretta ad U_α sia data da (Id, σ_α) .

Definizione 1.6 *Un frame di un fibrato vettoriale $E \rightarrow X$ su $U \subset X$ aperto, è una collezione di sezioni $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ su U , tali che per ogni $x \in U$, $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ sia una base di E_x .*

I frame si possono sempre costruire, prendendo la controimmagine tramite una banalizzazione locale della base canonica di \mathbf{R}^k .

È possibile definire un *fibrato vettoriale complesso* su X semplicemente richiedendo che le fibre siano isomorfe a \mathbf{C}^k e che tutte le costruzioni fatte finora si possono ripetere pedissequamente sostituendo \mathbf{C} ad \mathbf{R} .

Se invece la varietà X è complessa, vi è una classe speciale di fibrati vettoriali complessi su X , che sono quelli olomorfi:

Definizione 1.7 *Sia X una varietà complessa, connessa, $\dim_{\mathbf{C}} X = n$. Un fibrato vettoriale olomorfo su X di rango k è il dato di una varietà complessa E con un'applicazione olomorfa $\pi : E \rightarrow X$ che sia surgettiva e che soddisfi*

1. ogni controimmagine $E_x := \pi^{-1}(x)$ (fibra su x) abbia una struttura di spazio vettoriale su \mathbf{C} di dimensione k ;
2. per ogni $x \in X$ esista un intorno aperto U di x ed un biolomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{C}^k$$

detto banalizzazione locale, tali che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbf{C}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_U \\ & U & \end{array}$$

dove $\pi_U : U \times \mathbf{C}^k \rightarrow U$ è la proiezione sul primo fattore;

3. la restrizione di φ ad ogni fibra $\varphi : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbf{C}^k$ sia un isomorfismo \mathbf{C} -lineare.

Definizione 1.8 Siano $E \rightarrow X$ ed $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali olomorfi su X . Un morfismo olomorfo di fibrati vettoriali $\alpha : E \rightarrow F$ è una mappa olomorfa α , che commuti con le proiezioni, e tale che la sua restrizione ad ogni fibra $\alpha_x : E_x \rightarrow F_x$ sia lineare. Diciamo che α è un isomorfismo se essa è un biolomorfismo. Un fibrato vettoriale si dice banale se è isomorfo al fibrato prodotto $E = X \times \mathbf{C}^k$.

Analogamente al caso reale, possiamo costruire le funzioni di transizione $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbf{C})$, che sono olomorfe, e determinano E a meno di isomorfismo. Inoltre possiamo ripetere di nuovo tutte le costruzioni di sopra, con le dovute modifiche. Per esempio, il pullback di un fibrato vettoriale olomorfo tramite un'applicazione olomorfa è ancora un fibrato vettoriale olomorfo, oppure possiamo definire le sezioni olomorfe di E ed i frame olomorfi.

Tratteremo d'ora in poi solo il caso di fibrati vettoriali complessi, che saranno l'oggetto principale di studio di questa tesi, ma per tutti i concetti qui definiti esistono delle definizioni analoghe nel caso reale.

Definizione 1.9 Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale complesso su X , varietà reale. Una metrica hermitiana lungo le fibre di E è il dato di un prodotto hermitiano h_x su ogni fibra E_x , che vari in modo C^∞ , ovvero tale che per ogni aperto $U \subset X$ e per ogni frame su U $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$, le funzioni $h_x(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$ siano C^∞ per ogni i, j .

Fissata ora una metrica hermitiana lungo le fibre, un frame viene detto unitario se $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ è una base ortonormale per ogni x . Di nuovo frame unitari esistono sempre, grazie al processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Se E è un fibrato con una metrica hermitiana ed $F \subset E$ è un sottofibrato, allora possiamo definire un altro sottofibrato di E , F^\perp che ha $(F_x)^\perp$ come fibra su x . Esso è isomorfo, come fibrato complesso, al quoziente E/F , ma se supponiamo che E ed F siano olomorfi, allora E/F è olomorfo, mentre F^\perp NON lo è.

Definizione 1.10 Sia E un fibrato vettoriale complesso su X e sia $A^k(X)$ lo spazio delle k -forme differenziali su X . Allora definiamo lo spazio delle k -forme differenziali a valori in E , $A^k(X, E) := A^k(X) \otimes_{A^0(X)} A^0(X, E)$.

Definizione 1.11 Una connessione su un fibrato vettoriale complesso $E \rightarrow X$ è una mappa $\nabla : A^0(X, E) \rightarrow A^1(X, E)$ che sia \mathbf{C} -lineare e che soddisfi l'identità di Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s),$$

per ogni $f \in A^0(X)$, $s \in A^0(X, E)$.

Per esempio, la derivata esterna

$$d : A^0(X) \rightarrow A^1(X)$$

è una connessione sul fibrato banale $X \times \mathbf{C}$.

Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale complesso di rango k e sia $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ un frame per E su U . Allora esistono $\theta_{ij} \in A^1(U)$ tali che

$$\nabla(\sigma_i) = \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \otimes \sigma_j.$$

La matrice di 1-forme $\theta = \{\theta_{ij}\}$ è detta *matrice di connessione*. Se $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_k\}$ è un altro frame su U , scriviamo $s'_i = \sum_{j=1}^r a_i^j s_j$ con $a_i^j \in A^0(U)$. Chiamando $A = (a_i^j)$ e θ' la matrice di connessione rispetto al frame σ' , allora si calcola

$$\theta' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \theta \cdot A^{-1}.$$

Data una connessione su $E \rightarrow X$, possiamo estenderla ad una mappa \mathbf{C} -lineare $\nabla : A^k(X, E) \rightarrow A^{k+1}(X, E)$ per ogni k , ponendo

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^k \omega \otimes \nabla(s).$$

Definizione 1.12 La curvatura della connessione ∇ è la composizione

$$K := \nabla \circ \nabla : A^0(X, E) \rightarrow A^2(X, E).$$

Si verifica che essa è $A^0(X)$ -lineare, ovvero $K(f \cdot s) = f \cdot K(s)$, ed inoltre che preso un frame $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ per E su U , esistono delle 2-forme su U $\kappa_i^j \in A^2(U)$ tali che

$$K(\sigma_i) = \sum_{j=1}^r \kappa_i^j \otimes \sigma_j.$$

La matrice di 2-forme $\kappa = \{\kappa_i^j\}$ è detta *matrice di curvatura*. Se θ è la matrice di connessione rispetto al frame σ , allora si calcola

$$\kappa = d\theta - \theta \wedge \theta.$$

Chiamando κ' la matrice di curvatura rispetto ad un altro frame σ' , si calcola

$$\kappa' = A \cdot \kappa \cdot A^{-1}. \quad (1.4)$$

1.2 Classi caratteristiche

Sia $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ l'algebra di Lie di tutte le matrici $n \times n$ a coefficienti complessi e sia $P : \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione polinomiale nelle entrate delle matrici, che sia omogenea di grado k . Diciamo che essa è *invariante* se

$$P(A) = P(gAg^{-1})$$

per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ e $g \in GL(n, \mathbf{C})$. L'insieme di tutti i polinomi invarianti è chiamato I_n ed è un'algebra su \mathbf{C} , rispetto alle usuali operazioni fra polinomi.

Due esempi di polinomi invarianti che vengono immediatamente in mente sono la traccia $A \mapsto \text{tr}(A)$ ed il determinante $A \mapsto \det(A)$. Sulle matrici diagonalizzabili essi non sono altro che la somma ed il prodotto degli autovalori. Se chiamiamo σ_i la i -esima funzione simmetrica elementare negli autovalori, allora essa definisce una funzione polinomiale sul sottoinsieme delle matrici diagonalizzabili ed inoltre si verifica facilmente la formula

$$\det(Id + tA) = 1 + t\sigma_1(A) + t^2\sigma_2(A) + \cdots + t^n\sigma_n(A),$$

che estende la definizione di σ_i a tutto $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ e mostra subito che $\sigma_i \in I_n$. Vale inoltre il seguente

Teorema 1.13 ([21] 5.26) *L'algebra I_n dei polinomi invarianti è isomorfa all'anello dei polinomi generato dalle σ_i , ovvero*

$$I_n \cong \mathbf{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

Dunque ogni polinomio invariante si scrive in modo unico come polinomio nelle σ_i . Prendiamo ora un fibrato vettoriale complesso $E \rightarrow X$, con connessione ∇ e curvatura κ , prendiamo $P \in I_n$ di grado k e definiamo la $2k$ -forma differenziale

$$P(\kappa)$$

prendendo in un aperto U con un frame la matrice di 2-forme $\kappa = (\kappa_i^j)$ e calcolandovi P sopra, cosa che è possibile perché due 2-forme commutano. La definizione è ben posta, perché cambiando frame κ cambia tramite coniugio come nella (1.4) e P è invariante.

Teorema 1.14 ([21] 5.27, 5.28) *Per ogni polinomio invariante $P \in I_n$ di grado k , la forma $P(\kappa)$ è chiusa e la sua classe di coomologia $[P(\kappa)] \in H^{2k}(X, \mathbf{C})$ non dipende dalla connessione usata. Essa si indica $P(E)$ e si chiama classe caratteristica di E .*

Quindi dato un fibrato vettoriale complesso $E \rightarrow X$, abbiamo costruito un omomorfismo di algebre

$$\mathcal{W} : I_n \rightarrow H^{pari}(X, \mathbf{C}),$$

dove $H^{pari}(X, \mathbf{C}) := \bigoplus_k H^{2k}(X, \mathbf{C})$, che associa a P la classe $P(E)$. Esso è detto *omomorfismo di Weil*.

Definiamo le *classi di Chern* del fibrato E come le classi

$$c_i(E) := \left[\sigma_i \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \kappa \right) \right] \in H^{2k}(X, \mathbf{C}).$$

Il fattore $\sqrt{-1}/2\pi$ non è strettamente necessario, ma serve a rendere le classi di Chern delle classi *reali*, ovvero nell'immagine di $H^{2k}(X, \mathbf{R}) \hookrightarrow H^{2k}(X, \mathbf{C})$ ([21] 5.36). In realtà si può dimostrare di più: le classi di Chern sono classi *interi*, ovvero nell'immagine $H^{2k}(X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^{2k}(X, \mathbf{C})$ ([20] Appendice A).

Definiamo inoltre la *classe di Chern totale*

$$c(E) := 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_n(E) + \cdots \in H^*(X, \mathbf{C})$$

come la somma formale di tutte le classi di Chern. Notiamo che per definizione $c_i(E) = 0$ se $i > \text{rank} E$ e chiaramente anche se $i > \dim_{\mathbf{C}} X$, dunque la somma contiene solo un numero finito di termini non nulli.

Dalla definizione delle classi caratteristiche seguono subito le seguenti proprietà:

1. (Naturalità) Se $f : X \rightarrow Y$ è una mappa C^∞ , $E \rightarrow Y$ è un fibrato vettoriale complesso e $P \in I_n$, allora

$$P(f^*E) = f^*(P(E)) \in H^*(X, \mathbf{C}).$$

2. (Formula di Whitney) Se $E \rightarrow X$ ed $F \rightarrow X$ sono due fibrati vettoriali complessi, allora

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F),$$

da cui

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{j=0}^k c_j(E) \wedge c_{k-j}(F). \quad (1.5)$$

3. (Invarianza topologica) $c(E)$ dipende solo dalla classe di isomorfismo del fibrato E .
4. Se $E \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale complesso, allora

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E).$$

5. Se $E \rightarrow X$ è un fibrato banale, allora $c_i(E) = 0$ per $i \geq 1$.
6. Se $E \rightarrow X$ ha rango r ed è della forma $E' \oplus T_s$ con T_s banale di rango s , allora $c_i(E) = 0$ per $i \geq r - s + 1$.

1.3 Fasci analitici su varietà complesse

Definizione 1.15 Un fascio \mathcal{F} su uno spazio topologico X è il dato di una mappa che assegni ad ogni aperto $U \subset X$ un insieme $\mathcal{F}(U)$, e di una collezione di mappe $r_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ per ogni coppia di aperti $V \subset U$, dette mappe di restrizione, che soddisfino

1. Per ogni $U \subset X$ aperto, $r_U^U = Id_U$;
2. Per ogni $W \subset V \subset U$ aperti, $r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$;
3. Per ogni aperto $U \subset X$, per ogni ricoprimento aperto $U = \bigcup_i U_i$ e per ogni $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tali che $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$ per ogni i , allora $s = t$;
4. Per ogni aperto $U \subset X$, per ogni ricoprimento aperto $U = \bigcup_i U_i$ e per ogni collezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tale che $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $r_{U_i}^U(s) = s_i$ per ogni i .

Definizione 1.16 Un morfismo di fasci $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è una collezione di mappe $h_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto $U \subset X$, tali che per ogni coppia di aperti $V \subset U$ il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ r_V^U \downarrow & & r_V^U \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commuti.

Definizione 1.17 Se \mathcal{F} è un fascio su X e $U \subset X$ è un aperto, allora la restrizione di \mathcal{F} ad U , $\mathcal{F}|_U$ è il fascio su X definito da $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(U \cap V)$.

Definizione 1.18 Se \mathcal{F} è un fascio su X e $x \in X$ definiamo la spiga su x è

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

dove il limite diretto è fatto su tutti gli aperti U contenenti x rispetto alle mappe di restrizione r_V^U . Se $x \in U$ allora vi è una mappa naturale $r_x^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ che associa ad ogni elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ la sua classe di equivalenza nel limite diretto $s_x := r_x^U(s)$, che è detta germe di s in x .

Notiamo che se $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, allora è ben definito un morfismo indotto sulla spiga $h_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$.

Se $\mathcal{F}(U)$ ha qualche struttura algebrica (es. gruppo, anello, ecc.) e richiediamo che le restrizioni siano degli omomorfismi, allora abbiamo un fascio di gruppi, anelli, ecc. In questo caso, richiediamo che anche i morfismi siano degli omomorfismi. Ne segue che anche la spiga su ogni punto ha la stessa struttura.

Definizione 1.19 *Diciamo che una successione di fasci di anelli su X e morfismi*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}$$

è esatta, se per ogni $x \in X$ lo è la successione indotta sulla spiga su x

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{G}_x,$$

ovvero se $\ker \beta_x = \text{Im } \alpha_x$.

L'esempio principe di fascio di anelli su una varietà complessa X è il *fascio strutturale* \mathcal{O} , che ad un aperto $U \subset X$ associa

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ olomorfa}\}.$$

Definizione 1.20 *Un fascio di anelli \mathcal{F} su una varietà complessa X si dice analitico se per ogni aperto $U \subset X$ $\mathcal{F}(U)$ ha la struttura di un $\mathcal{O}(U)$ -modulo ed inoltre se $f \in \mathcal{O}(U)$, $s \in \mathcal{F}(U)$, $V \subset U$ allora*

$$r_V^U(fs) = \rho_V^U(f)r_V^U(s),$$

dove r_V^U è l'omomorfismo di restrizione di \mathcal{F} e ρ_V^U è quello di \mathcal{O} .

Diamo alcuni esempi di fasci analitici:

1. \mathcal{O} stesso.
2. Se $p \in \mathbf{N}$, definiamo il fascio \mathcal{O}^p come $\mathcal{O}^p(U) := \underbrace{\mathcal{O}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(U)}_{p \text{ volte}}$.
3. Se $E \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale olomorfo, il fascio $\mathcal{O}(E)$ definito da

$$\mathcal{O}(E)(U) = \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ sezione olomorfa}\}$$

è analitico.

Definizione 1.21 *Un fascio analitico \mathcal{F} che sia isomorfo al fascio \mathcal{O}^p per qualche $p \in \mathbf{N}$ si dice libero. Se invece per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $\mathcal{F}|_U$ sia libero, allora \mathcal{F} è detto localmente libero.*

Teorema 1.22 *Vi è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei fibrati vettoriali olomorfi su X e dei morfismi tra essi e l'insieme dei fasci localmente liberi su X e dei morfismi tra essi.*

Dimostrazione

Un verso della corrispondenza è dato dalla mappa

$$E \mapsto \mathcal{O}(E).$$

Verifichiamo che $\mathcal{O}(E)$ è localmente libero: se $x \in X$, prendiamo un aperto U contenente x e banalizzante per E , ovvero $E|_U \cong X \times \mathbf{C}^r$, dove $r = \text{rank} E$ e quindi $\mathcal{O}(E)|_U \cong \mathcal{O}(U \times \mathbf{C}^r)$. Ma queste ultime, ovvero le sezioni olomorfe del fibrato banale di rango r sopra ad U , sono chiaramente isomorfe a $\underbrace{\mathcal{O}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(U)}_{r \text{ volte}}$, da cui $\mathcal{O}(E)$ è localmente libero.

Viceversa, se \mathcal{F} è un fascio localmente libero, allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X ed isomorfismi

$$g_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}^r|_{U_\alpha},$$

dove $r > 0$ non dipende da α perché esso è chiaramente localmente costante e X è connessa. Definiamo allora

$$g_{\alpha\beta} := g_\alpha \circ g_\beta^{-1} : \mathcal{O}^r|_{U_\alpha \cap U_\beta} \rightarrow \mathcal{O}^r|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Se consideriamo la restrizione di $g_{\alpha\beta}$ all'aperto $U_\alpha \cap U_\beta$ otteniamo una mappa invertibile data dalle funzioni

$$g_{\alpha\beta} : \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^r \rightarrow \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^r,$$

quindi una matrice invertibile $r \times r$ di funzioni in $\mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ e dunque una mappa olomorfa

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbf{C}).$$

Le condizioni di compatibilità (1.1), (1.2) sono banalmente soddisfatte e dunque le $g_{\alpha\beta}$ definiscono un fibrato vettoriale olomorfo E . È immediato verificare che le due costruzioni fatte sono una l'inversa dell'altra.

Se abbiamo due fibrati vettoriali olomorfi F e G su X ed un morfismo olomorfo di fibrati $g : F \rightarrow G$, costruiamo un morfismo di fasci tra $\mathcal{O}(F)$ e $\mathcal{O}(G)$ semplicemente prendendo un elemento di $\mathcal{O}(F)(U)$, ovvero una sezione olomorfa di F su U , e componendola con g otteniamo una sezione olomorfa di G su U , ovvero un elemento di $\mathcal{O}(G)(U)$.

Se ora abbiamo un morfismo di fasci localmente liberi $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, sappiamo che esistono fibrati vettoriali olomorfi F e G tali che $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}(F)$,

$\mathcal{G} \cong \mathcal{O}(G)$ e vogliamo costruire un morfismo olomorfo di fibrati $f : F \rightarrow G$. Come prima prendiamo un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X ed isomorfismi

$$g_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}^r|_{U_\alpha}$$

$$\gamma_\alpha : \mathcal{G}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}^s|_{U_\alpha}$$

e definiamo $g_{\alpha\beta} := g_\alpha \circ g_\beta^{-1}$ e $\gamma_{\alpha\beta} := \gamma_\alpha \circ \gamma_\beta^{-1}$, che sono le funzioni di transizione di F e G .

Ora definiamo

$$f_\alpha := \gamma_\alpha \circ h_\alpha \circ g_\alpha^{-1} : \mathcal{O}(U_\alpha)^r \rightarrow \mathcal{O}(U_\alpha)^s$$

che come prima possono essere considerate come funzioni da U_α in $\text{Hom}(\mathbf{C}^r, \mathbf{C}^s)$. Esse verificano banalmente la condizione di compatibilità (1.3), dunque definiscono un morfismo olomorfo di fibrati $f : F \rightarrow G$. Di nuovo è immediato verificare che le due costruzioni sono un'inversa dell'altra. \square

In generale nucleo e conucleo di un morfismo olomorfo tra fasci localmente liberi non sono più localmente liberi. Consideriamo per esempio su $X = \mathbf{C}$ il morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ dato da $\varphi(u(z)) = zu(z)$. Esso è iniettivo (perché \mathcal{O}_0 è un dominio d'integrità) ed il suo conucleo è il cosiddetto *fascio grattacielo* su 0, ovvero ha spiga \mathbf{C} sopra a 0 e spiga 0 altrove, che chiaramente non è localmente libero.

Introduciamo quindi un altro tipo di fasci analitici molto importanti:

Definizione 1.23 *Un fascio analitico \mathcal{F} su una varietà complessa X è detto coerente se per ogni $x \in X$ vi è un aperto U contenente x e una successione esatta di fasci su U*

$$\mathcal{O}^p|_U \rightarrow \mathcal{O}^q|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

per qualche $p, q \geq 1$.

Dalla definizione segue subito che per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x ed un numero finito di sezioni $s_1, \dots, s_q \in \mathcal{F}(U)$ tali che le $s_i(y)$ generino \mathcal{F}_y per ogni $y \in U$. Un fascio con questa proprietà è detto *di tipo finito*.

Proposizione 1.24 ([23]) *Un sottofascio analitico di tipo finito di un fascio analitico coerente è coerente.*

Proposizione 1.25 ([23]) *Sia*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una successione esatta di fasci analitici. Se due su tre di essi sono coerenti, lo è anche il terzo.

Come corollario, otteniamo la seguente proprietà di stabilità, che mancava ai fasci localmente liberi:

Corollario 1.26 *Siano \mathcal{F} e \mathcal{G} due fasci analitici coerenti e sia $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo olomorfo. Allora $\ker \alpha$, $\text{Im } \alpha$ e $\text{coker } \alpha$ sono fasci analitici coerenti.*

Dimostrazione

È chiaro che l'immagine tramite un morfismo di un fascio di tipo finito è ancora di tipo finito, dunque essendo \mathcal{F} coerente e perciò di tipo finito anche $\text{Im } \alpha$ è di tipo finito. Essendo esso un sottofascio di \mathcal{G} , che è coerente, per la Proposizione 1.24 è coerente. Consideriamo ora le successioni esatte

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow 0$$

e applicando la Proposizione 1.25 alla prima otteniamo che $\ker \alpha$ è coerente, e con la seconda che $\text{coker } \alpha$ è coerente. □

Vale il seguente ed importante:

Teorema 1.27 (Oka [6] II.3.19) *Per ogni varietà complessa X il fascio strutturale \mathcal{O} è coerente.*

Corollario 1.28 *Ogni fascio analitico \mathcal{F} localmente libero è coerente.*

Dimostrazione

Essere coerenti è una proprietà locale. Localmente \mathcal{F} è isomorfo a \mathcal{O}^p , che è coerente grazie al Teorema 1.27 ed alla Proposizione 1.25. □

L'utilità dei fasci analitici coerenti è che per essi è possibile dedurre proprietà locali da proprietà puntuali:

Proposizione 1.29 *Sia*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

una successione di fasci analitici coerenti. Se essa è esatta in un punto $x \in X$ allora essa è esatta in un intorno di X .

Dimostrazione

Abbiamo detto sopra che per i fasci di tipo finito vale la proprietà che

$$\{x \in X \mid \mathcal{F}_x = 0\}$$

è un aperto. Infatti se per definizione 0 sezioni generano \mathcal{F}_x allora anche \mathcal{F}_y è generato da 0 sezioni per y vicino ad x .

Per ipotesi sappiamo che $\ker(\beta \circ \alpha)$ è un fascio analitico coerente e che $\ker(\beta \circ \alpha)_x = 0$. Allora esiste un intorno U di x su cui $\ker(\beta \circ \alpha) = 0$, ovvero $\text{Im } \alpha \subset \ker \beta$ su U . Ma essendo questi due fasci coerenti, il loro quoziente $\ker \beta / \text{Im } \alpha$ è ancora coerente ed è nullo in x . Quindi esiste un altro intorno di x su cui esso è nullo, ovvero la tesi. \square

1.4 Sottovarietà analitiche

Definizione 1.30 *Un sottoinsieme $V \subset X$ di una varietà complessa si dice sottovarietà analitica se per ogni $x \in V$ esiste un aperto U contenente x e f_1, \dots, f_k funzioni olomorfe in U tali che*

$$V \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = \dots = f_k(y) = 0\}.$$

Un punto $x \in V$ è detto punto liscio se V è una sottovarietà liscia in un intorno di x , ovvero se esistono f_1, \dots, f_k olomorfe su U che definiscono V con rango della matrice Jacobiana uguale a k . L'insieme dei punti lisci di V è chiamato V_r , mentre un punto in $V_s := V \setminus V_r$ è detto punto singolare.

Definizione 1.31 *Una sottovarietà analitica $V \subset X$ è detta irriducibile se non esistono due sottovarietà analitiche $V_1, V_2 \neq V$ tali che $V = V_1 \cup V_2$. Se $x \in V$, V è detta irriducibile in x se esiste un aperto U contenente x tale che $V \cap U$ sia irriducibile.*

Raccogliamo qui alcuni fatti noti sulle sottovarietà analitiche:

Proposizione 1.32 ([9] pag.14) *Sia $V \subset X$ una sottovarietà analitica e $x \in V$. Allora esiste un aperto U contenente x e V_1, \dots, V_k sottovarietà analitiche di U irriducibili in x tali che*

$$V \cap U = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

e $V_i \not\subset V_j$ se $i \neq j$. Le V_i sono uniche e sono dette componenti irriducibili di V in x .

Proposizione 1.33 ([9] pag.21) *Sia $V \subset X$ una sottovarietà analitica, allora V_s è una sottovarietà analitica di X , diversa da V .*

Proposizione 1.34 ([9] pag.21) *Una sottovarietà analitica $V \subset X$ è irriducibile se e solo se V_r è connesso.*

Definizione 1.35 *Sia $V \subset X$ una sottovarietà analitica irriducibile. Allora definiamo la sua dimensione come $\dim V := \dim_{\mathbf{C}} V_r$. Se V non è irriducibile e V_1, \dots, V_k sono le sue componenti irriducibili in x , allora poniamo $\dim_x V := \max_i \dim_x V_i$. Se tutte le componenti irriducibili di V in tutti i punti $x \in V$ hanno la stessa dimensione k , diciamo che V è puramente k -dimensionale.*

Proposizione 1.36 ([6] II.4.26) *Se $V, W \subset X$ sono sottovarietà analitiche, $W \subset V$, V è irriducibile e $W \neq V$, allora per ogni $x \in W$,*

$$\dim_x W < \dim V.$$

Possiamo ugualmente definire le sottovarietà analitiche reali di una varietà analitica reale. Nel caso reale abbiamo anche le sottovarietà *semianalitiche*, ovvero quelle definite localmente da

$$\{f_1 = \cdots = f_k = 0, g_1 \geq 0, \dots, g_h \geq 0\}.$$

Vale il

Teorema 1.37 (Lelong, [7] 3.4.10, 3.4.12, [9] pag.32) *Sia X una varietà analitica reale, (risp. analitica complessa) e sia $V \subset X$ una sottovarietà analitica o semianalitica (risp. analitica complessa) di dimensione k . Allora V ha volume k -dimensionale localmente finito, ovvero per ogni $p \in V$ esiste un compatto K di X contenente p e tale che $\mathcal{H}^k(V \cap K) < \infty$, dove \mathcal{H}^k è la misura di Hausdorff k -dimensionale.*

Proposizione 1.38 ([6] II.5.10) *Sia \mathcal{F} un fascio analitico coerente su X . Allora i seguenti insiemi*

$$\text{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F} \text{ non localmente libero in } x\}$$

sono sottovarietà analitiche di X .

1.5 Correnti

Iniziamo dando le definizioni in \mathbf{R}^n :

Definizione 1.39 *Sia $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ lo spazio delle funzioni complesse C^∞ a supporto compatto in \mathbf{R}^n . Diciamo che una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ converge a zero nella topologia C^∞ se esiste un compatto $K \subset \mathbf{R}^n$ tale che $\text{Supp}(f_n) \subset K$ per ogni n e*

$$D^\alpha f_n \rightarrow 0$$

uniformemente in K per ogni multiindice α .

Definizione 1.40 *Una distribuzione è una mappa lineare $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ continua nella topologia C^∞ , ovvero $T(f_n) \rightarrow 0$ per ogni successione $\{f_n\}$ che converga a 0 nella topologia C^∞ . Lo spazio delle distribuzioni su \mathbf{R}^n è chiamato $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.*

Definizione 1.41 Sia $\mathcal{D}^p(\mathbf{R}^n)$ lo spazio delle p -forme differenziali complesse C^∞ a supporto compatto in \mathbf{R}^n . Diciamo che una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{D}^p(\mathbf{R}^n)$ converge a zero nella topologia C^∞ se ogni sua componente converge a zero nella topologia C^∞ di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Definizione 1.42 Una corrente di grado p (o p -corrente) è una mappa lineare $T : \mathcal{D}^{n-p}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ continua nella topologia C^∞ . Lo spazio delle correnti di grado p su \mathbf{R}^n è chiamato $\mathcal{D}'_p(\mathbf{R}^n)$.

Definizione 1.43 Sia $T \in \mathcal{D}'_p(U)$, allora il suo supporto $\text{Supp} T$ è il più piccolo chiuso S tale che $T(\varphi) = 0$ per ogni $(n-p)$ -forma φ a supporto compatto in $\mathbf{R}^n \setminus S$.

Per esempio se ψ è una p -forma differenziale su \mathbf{R}^n con coefficienti in L^1_{loc} , allora definiamo la corrente $T_\psi \in \mathcal{D}'_p(\mathbf{R}^n)$ con la formula

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \psi \wedge \varphi,$$

dove $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p}(\mathbf{R}^n)$.

Se Γ è una k -sottovarietà liscia di \mathbf{R}^n orientata, allora definiamo la corrente $[\Gamma] \in \mathcal{D}'_{n-k}(\mathbf{R}^n)$ con la formula

$$[\Gamma](\varphi) = \int_{\Gamma} i^* \varphi,$$

dove $\varphi \in \mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n)$ e $i : \Gamma \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ è l'inclusione. È chiaro che $\text{Supp}[\Gamma] = \Gamma$.

Definiamo ora il bordo di una corrente $T \in \mathcal{D}'_p(\mathbf{R}^n)$ come la corrente $\partial T \in \mathcal{D}'_{p-1}(\mathbf{R}^n)$ definita da

$$\partial T(\psi) = T(d\psi),$$

dove $\psi \in \mathcal{D}^{n-p}(\mathbf{R}^n)$.

Per esempio se $\psi \in \mathcal{D}^p(\mathbf{R}^n)$, allora $\partial T_\psi = T_{(-1)^p d\psi}$, e se Γ è una k -sottovarietà orientata, allora $\partial[\Gamma] = [\partial\Gamma]$, dove $\partial\Gamma$ ha l'orientazione indotta. Entrambe queste formule sono facili conseguenze del Teorema di Stokes.

Notiamo ora che invece di lavorare in \mathbf{R}^n avremmo potuto lavorare in un qualunque aperto $U \subset \mathbf{R}^n$ e tutte le definizioni sarebbero rimaste uguali. Inoltre, un diffeomorfismo $f : U \rightarrow V$ tra aperti di \mathbf{R}^n induce un isomorfismo topologico tra $\mathcal{D}(U)$ e $\mathcal{D}(V)$ e dunque possiamo definire lo spazio $\mathcal{D}'_p(M)$ delle correnti su M varietà reale, connessa ed orientata.

Definizione 1.44 Sia $f : U \rightarrow V$ una mappa C^1 tra aperti di \mathbf{R}^n e sia $T \in \mathcal{D}'_p(U)$. Allora definiamo il suo pushforward $f_*T \in \mathcal{D}'_p(V)$ con la formula

$$f_*T(\omega) = T(f^*\omega).$$

Sia ora ω una p -forma differenziale in \mathbf{R}^n , $x \in \mathbf{R}^n$ e dunque $\omega(x) \in \Lambda^p(\mathbf{R}^n)$ è una p -forma alternante in \mathbf{R}^n . Se $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ è un p -vettore semplice, definiamo la sua norma come $|v| = \sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}$, e definiamo la *comassa* di ω in x come

$$\|\omega(x)\| := \sup\{\omega(v) \mid v \text{ } p\text{-vettore semplice, } |v| \leq 1\}.$$

Per ogni $T \in \mathcal{D}'_p(\mathbf{R}^n)$ e per ogni $U \subset \mathbf{R}^n$ aperto definiamo la *massa* di T in U come

$$M_U(T) := \sup\{T(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}^{n-p}(U), \|\omega(x)\| \leq 1 \forall x \in U\}.$$

Diremo che una successione di correnti T_j converge in massa ad una corrente T su un aperto U se $M_U(T_j - T) \rightarrow 0$. Diremo invece che una successione di correnti T_j converge debolmente ad una corrente T , e scriveremo

$$T_j \rightharpoonup T,$$

se $T_j(\omega) \rightarrow T(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathcal{D}^p(U)$. La convergenza in massa implica la convergenza debole, ma non viceversa.

Definizione 1.45 Una corrente $T \in \mathcal{D}'_p(U)$ si dice normale se $M_U(T) < \infty$ e $M_U(\partial T) < \infty$. Lo spazio delle correnti normali in U è denotato $\mathcal{N}_p(U)$.

Definizione 1.46 Un sottoinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice p -rettificabile se

$$A \subset A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

dove $\mathcal{H}^p(A_0) = 0$ e le A_k con $k \geq 1$ sono p -sottovarietà di \mathbf{R}^n .

Si può dare una definizione di *piano tangente approssimato* ad un p -rettificabile M in un punto $p \in M$ ed è possibile dimostrare che esso esiste per \mathcal{H}^p -quasi ogni punto di M ([8] 2.1.4.1). Un'orientazione su M è quindi una p -forma mai nulla sul tangente approssimato.

Definizione 1.47 Una corrente $T \in \mathcal{D}'_p(U)$ si dice intera rettificabile se è della forma

$$T(\omega) = \int_M \omega \cdot \theta d\mathcal{H}^p,$$

dove M è un insieme p -rettificabile di U con un'orientazione fissata e $\theta : M \rightarrow \mathbf{Z}$ è una funzione L^1_{loc} . Lo spazio delle correnti intere rettificabili in U è denotato $\mathcal{R}_p(U)$.

Per esempio se M è una sottovarietà orientata di \mathbf{R}^n , allora la corrente di integrazione $[[M]]$ è intera rettificabile, e la molteplicità θ è identicamente 1.

Proposizione 1.48 ([8] pag.149) *Se $T \in \mathcal{R}_p(U)$, $f : U \rightarrow V$ è una mappa Lipschitziana tra aperti di \mathbf{R}^n e $f|_{\text{Supp } T}$ è propria, allora $f_*T \in \mathcal{R}_p(V)$.*

Teorema 1.49 (Federer, [8] 2.2.4.1) *Sia $\{T_j\} \subset \mathcal{R}_p(U)$ una successione di p -correnti intere rettificabili, che soddisfino*

$$\sup_j (M_V(T_j) + M_V(\partial T_j)) < \infty$$

per ogni aperto $V \subset\subset U$ e che convergono debolmente ad una $T \in \mathcal{D}'_p(U)$. Allora $T \in \mathcal{R}_p(U)$.

Teorema 1.50 (Federer, [8] 2.2.4.2) *Sia $\{T_j\} \subset \mathcal{R}_p(U)$ una successione di p -correnti intere rettificabili, che soddisfino*

$$\sup_j (M_V(T_j) + M_V(\partial T_j)) < \infty$$

per ogni aperto $V \subset\subset U$. Allora esiste una sottosuccessione T_{j_k} delle T_j ed una $T \in \mathcal{R}_p(U)$ tali che

$$T_{j_k} \rightharpoonup T.$$

Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ un aperto e $K \subset U$ un compatto. Chiamiamo

$$\mathcal{M}_{p,K}(U) := \{T \in \mathcal{D}'_p(U) \mid \text{Supp } T \subset K, M_U(T) < \infty\},$$

e definiamo la *norma flat* come

$$F_K(T) = \inf\{M_U(R) + M_U(S) \mid T = R + \partial S, R, S \in \mathcal{M}_{p,K}(U)\},$$

dove $T \in \mathcal{D}'_p(U)$.

Definizione 1.51 *Lo spazio delle correnti flat a supporto in K , $\mathcal{F}_{p,K}(U)$, è la chiusura dello spazio $\mathcal{N}_p(U) \cap \{T \mid \text{Supp } T \subset K\}$ in $\mathcal{N}_p(U)$ rispetto alla norma F_K . Lo spazio delle correnti flat è $\mathcal{F}_p(U) := \bigcup_{K \subset U} \mathcal{F}_{p,K}(U)$.*

Per esempio se M è una sottovarietà compatta (eventualmente con bordo) di \mathbf{R}^n , allora $[[M]]$ è una corrente normale e dunque flat. In realtà basta che M e ∂M abbiano volume localmente finito per trarre la stessa conclusione.

Proposizione 1.52 ([8] 5.1.3.2) *Se $T \in \mathcal{D}'_p(U)$ e $\text{Supp } T \subset K$ per qualche compatto $K \subset U$, allora $F_K(T) \leq M_U(T)$, quindi correnti che convergono in massa convergono anche nella norma flat. Inoltre, $F_K(\partial T) \leq F_K(T)$, quindi se T è flat allora anche ∂T è flat.*

Proposizione 1.53 ([8] pag.520) *Il pushforward di una corrente flat tramite una mappa Lipschitziana è ancora flat.*

Le correnti flat sono utili a causa dei seguenti teoremi:

Teorema 1.54 (Federer, [8] 5.3.1.1) *Sia M una sottovarietà compatta senza bordo di \mathbf{R}^n , U un aperto contenente M e $i : M \hookrightarrow U$. Se $T \in \mathcal{F}_p(U)$ e $\text{Supp} T \subset M$, allora T è intrinseca, ovvero esiste una corrente $S \in \mathcal{F}_p(M)$ tale che $T = i_*S$.*

Teorema 1.55 (Federer, [8] 5.1.3.5) *Sia $T \in \mathcal{F}_p(U)$ con $\mathcal{H}^p(\text{Supp} T) = 0$. Allora $T = 0$.*

Teorema 1.56 (Federer, [8] 5.3.1.2) *Sia $T \in \widehat{\mathcal{F}}_p(\mathbf{R}^n)$ con $\partial T = 0$ e $\text{Supp} T \subset V$ con V una p -sottovarietà connessa ed orientabile. Allora esiste $c \in \mathbf{C}$ tale che $T = c\llbracket V \rrbracket$. Se inoltre $T \in \mathcal{R}_p(\mathbf{R}^n)$ allora $c \in \mathbf{Z}$.*

Se invece di usare \mathbf{R}^n usiamo \mathbf{C}^n , possiamo definire le correnti di tipo (p, q) , $\mathcal{D}'_{p,q}(\mathbf{C}^n)$ come il duale topologico dello spazio delle $(n-p, n-q)$ -forme complesse a supporto compatto $\mathcal{D}^{n-p, n-q}(\mathbf{C}^n)$ con la topologia C^∞ , ed analogamente le correnti di tipo (p, q) su una varietà complessa X , $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$.

In particolare il Teorema 1.56 assume la forma

Teorema 1.57 ([6] II.2.14) *Sia X una varietà complessa e $V \subset X$ una sottovarietà analitica puramente p -dimensionale. Sia $T \in \mathcal{F}_{2p}(X)$ con $\partial T = 0$ e $\text{Supp} T \subset V$. Allora esistono $c_i \in \mathbf{C}$ tali che $T = \sum_i c_i \llbracket V_i \rrbracket$, dove V_i sono le componenti irriducibili di V . Se inoltre $T \in \mathcal{R}_{2p}(X)$ allora $c_i \in \mathbf{Z}$.*

Inoltre il Teorema 1.37 ha come conseguenza il

Teorema 1.58 (Lelong, [6] III.2.7) *Sia X una varietà complessa e $V \subset X$ una sottovarietà analitica puramente p -dimensionale. Allora la corrente $\llbracket V_r \rrbracket$ su $X \setminus V_s$ di integrazione sui punti regolari di V ha massa localmente finita ed ammette un'estensione ad una corrente $\llbracket V \rrbracket \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ che soddisfa $\partial \llbracket V \rrbracket = 0$.*

Capitolo 2

La formula di MacPherson classica

Nel 1970 Robert MacPherson, nella sua tesi di Dottorato [18] dimostrò una formula, poi nota come formula di MacPherson, che lega le classi caratteristiche di fibrati vettoriali alle singolarità dei morfismi tra di essi. Prima di presentare i suoi risultati, diamo un'idea delle motivazioni che lo spinsero a congetturare una tale formula.

Siano M una varietà compatta, reale o complessa, siano E ed F due fibrati vettoriali complessi su M di rango m ed n rispettivamente e sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati. Per esempio se abbiamo due varietà con una mappa differenziabile tra esse $f : N \rightarrow P$, allora il suo differenziale $df : TN \rightarrow f^*TP$ definisce un morfismo di fibrati su N .

Se supponiamo che la mappa tra i fibrati sia nonsingolare, ovvero abbia ovunque rango massimo (per esempio se f è una fibrazione o un'immersione), allora per ogni classe caratteristica cl , abbiamo

$$cl(E) = cl(K \oplus I) \tag{2.1}$$

dove $K \rightarrow M$ è il fibrato $\ker \alpha$ e $I \rightarrow M$ è il fibrato $\text{Im } \alpha$. Questa formula è dovuta al fatto che c'è un isomorfismo $E \cong K \oplus I$, che può banalmente essere verificato fibra per fibra. Se per esempio $m = n$, allora la formula diventa

$$cl(E) = cl(F).$$

Se ora α ha delle singolarità, ovvero punti in cui il rango non sia massimo, ci aspettiamo che una formula come la (2.1) debba essere modificata aggiungendo dei termini di correzione che coinvolgano il comportamento locale di α intorno alle singolarità.

Il primo risultato in questa direzione è la formula di Riemann-Hurwitz: se $f : M \rightarrow N$ è un rivestimento ramificato tra superfici di Riemann, allora

$$c_1(M) - f^*c_1(N) = \sum_{p \in M \text{ singolare}} (\nu_p - 1)$$

dove ν_p è l'indice di ramificazione di f in p .

Sperare di ottenere una formula di così facile calcolo nel caso di mappe qualunque tra varietà non algebriche, è decisamente fuori portata: le singolarità delle mappe lisce sono in generale troppo complicate. Per questo è necessario restringere l'attenzione solo ad alcune mappe dette *normali*, che hanno solo singolarità maneggevoli ed allo stesso tempo formano un aperto denso nello spazio di tutte le mappe lisce.

2.1 Morfismi normali tra fibrati

Sia X una varietà reale, connessa, orientabile, $\dim_{\mathbf{R}} X = \nu$ e siano E ed F due fibrati vettoriali complessi su X , di rango m ed n rispettivamente. Se $\alpha : E \rightarrow F$ è un morfismo di fibrati esso può essere considerato come una sezione $\tilde{\alpha}$ del fibrato $E^* \otimes F = \text{Hom}(E, F) \rightarrow X$. Ora nello spazio totale di $\text{Hom}(E, F)$ ci sono i sottoinsiemi

$$\Sigma_k^H = \{(p, A) \mid p \in X, A \in \text{Hom}(E_p, F_p), \dim \ker A = k\}.$$

Sopra a $\text{Hom}(E, F)$ abbiamo i due fibrati pullback π^*E , π^*F e un morfismo tautologico tra di essi, $\varepsilon : \pi^*E \rightarrow \pi^*F$ così definito: se $A \in \text{Hom}(E, F)$, ε_A è dato da A stesso.

Ricordiamo la

Definizione 2.1 *Una mappa C^∞ $f : X \rightarrow Y$ tra due varietà C^∞ si dice trasversa ad una sottovarietà $Z \subset Y$ se per ogni $x \in f^{-1}(Z)$ vale*

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y,$$

dove la somma non è necessariamente diretta.

Proposizione 2.2 (Boardman [3], [22]) *Le Σ_k^H sono sottovarietà lisce di $\text{Hom}(E, F)$ ed inoltre il fibrato normale a Σ_k^H in $\text{Hom}(E, F)$ è isomorfo a*

$$\text{Hom}(\ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H}, \text{coker } \varepsilon|_{\Sigma_k^H}).$$

Dimostrazione

Introduciamo un po' di notazioni. Preso $\pi : \text{Hom}(E, F) \rightarrow X$, chiamiamo $p : Gr_k(\pi^*E) \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ il fibrato Grassmanniano dei k -piani in π^*E , e $U \rightarrow Gr_k(\pi^*E)$ il suo fibrato tautologico. Un elemento di $Gr_k(\pi^*E)$ è

una tripla (x, a, α) dove $x \in X$, $\alpha \in \text{Hom}(E_x, F_x)$, e a è un k -piano in E_x . Chiamiamo

$$\Theta_k = \{(x, a, \alpha) \mid \ker \alpha \supset a\} \subset \text{Gr}_k(\pi^* E).$$

Allora

$$\Theta_k^0 = \{(x, a, \alpha) \in \Theta_k \mid \ker \alpha = a\}$$

è un aperto denso di Θ_k . Sia Ψ la sezione del fibrato $\text{Hom}(U, p^* \pi^* F) \rightarrow \text{Gr}_k(\pi^* E)$ data da

$$\Psi(a, \alpha) = \alpha|_a,$$

e notiamo che $\Theta_k = \Psi^{-1}(\mathbf{0})$, dove $\mathbf{0}$ è la sezione nulla di $\text{Hom}(U, p^* \pi^* F)$.

La prima osservazione è che $p(\Theta_k) = \overline{\Sigma}_k^H$. Infatti se $(a, \alpha) \in \Theta_k$, allora $\dim \ker \alpha \geq k$, e dunque $\alpha \in \overline{\Sigma}_k^H$. Se invece $\alpha \in \overline{\Sigma}_k^H$, allora il suo nucleo ha dimensione almeno k , quindi contiene un k -piano a , $(a, \alpha) \in \Theta_k$, e $p(a, \alpha) = \alpha$. Analogamente si vede che $p(\Theta_k^0) = \Sigma_k^H$.

Vediamo ora che Ψ è trasversa alla sezione nulla e dunque Θ_k è una sottovarietà liscia di $\text{Gr}_k(\pi^* E)$. Prendiamo un aperto U contenente x e banalizzante per E ed F , di modo che $p^{-1}(\pi^{-1}(U)) \cong U \times \text{Hom}(E_x, F_x) \times \text{Gr}_k(E_x)$. Sia a un k -piano in E_x , a' un $(m - k)$ -piano complementare e

$$V_a = \{b \in \text{Gr}_k(E_x) \mid b \cap a' = 0\}.$$

Ogni $b \in V_a$ è il grafico di un'applicazione lineare da a in a' e ciò definisce un omeomorfismo $V_a \cong \text{Hom}(a, a')$. Posso inoltre vedere V_a come carta per la varietà $\text{Gr}_k(\pi^* E)$ e la restrizione di $\text{Hom}(U, p^* \pi^* F)$ a $U \times \text{Hom}(E_x, F_x) \times V_a$ si identifica a $U \times \text{Hom}(E_x, F_x) \times V_a \times \text{Hom}(a, F_x)$.

In queste coordinate

$$\Psi(x, \alpha, b) = (x, \alpha, b, \alpha_1 + \alpha_2 \circ b)$$

dove $\alpha_1 = \alpha|_a$, $\alpha_2 = \alpha|_{a'}$. Per verificare la trasversalità di Ψ è sufficiente verificare che lo sia $\tilde{\Psi}$, la composizione di Ψ con la proiezione su $\text{Hom}(a, F_x)$. La derivata di $\tilde{\Psi}$ nella direzione $\text{Hom}(E_x, F_x) \times V_a$ è

$$d\tilde{\Psi}_{(x, a, \alpha)}(0, A, B) = A_1 + \alpha_2 \circ B$$

dove $A \in \text{Hom}(E_x, F_x)$, $B \in V_a$, $A_1 = A|_a$, che è chiaramente surgettiva su $\text{Hom}(a, F_x)$.

Mostriamo ora che p ristretta a Θ_k^0 è un embedding di immagine Σ_k^H . Nelle coordinate di sopra, se $(x, a, \alpha) \in \Theta_k^0$, allora $\alpha_1 = 0$ e α_2 è iniettiva. Lo spazio tangente a Θ_k^0 è precisamente il nucleo di $d\tilde{\Psi}$, che ora calcoliamo. Se

$$d\tilde{\Psi}_{(x, a, \alpha)}(0, A, B) = 0$$

allora, visto che $A_1 = 0$, abbiamo $\alpha_2 \circ B = 0$, ma α_2 è iniettiva, da cui $B = 0$. Quindi lo spazio tangente a Θ_k^0 si identifica a $\{(0, A, 0) \mid A \in \text{Hom}(E_x, F_x)\}$, e $dp(0, A, B) = (0, A)$, da cui otteniamo che p ristretta a Θ_k^0 è un'immersione.

Per avere che p è anche un embedding, consideriamo la mappa $\sigma : \Sigma_k^H \rightarrow \Theta_k^0$ che associa a $\alpha \in \Sigma_k^H$, la coppia $(\ker \alpha, \alpha)$. È chiaro che $p \circ \sigma = Id_{\Sigma_k^H}$ e che $\sigma \circ p = Id_{\Theta_k^0}$.

Definiamo infine un morfismo

$$\rho : \text{Hom}(\pi^* E, \pi^* F)|_{\Sigma_k^H} \rightarrow \text{Hom}(\ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H}, \text{coker } \varepsilon|_{\Sigma_k^H})$$

nel seguente modo: se $\alpha \in \Sigma_k^H \subset \text{Hom}(E_x, F_x)$ e $\beta \in \text{Hom}(\pi^* E, \pi^* F)_\alpha \cong \text{Hom}(E_x, F_x)$, $\rho(\alpha, \beta)$ è il morfismo dato dalla composizione

$$\ker \alpha \hookrightarrow (\pi^* E)_\alpha \xrightarrow{\beta} (\pi^* F)_\alpha \xrightarrow{\tau} \text{coker } \alpha$$

dove $\tau : F_x \rightarrow \text{coker } \alpha_x$ è la proiezione.

Affermiamo che il fibrato tangente alle fibre di π lungo Σ_k^H è isomorfo a $\ker \rho$ (il che conclude la dimostrazione). Infatti, se chiamiamo

$$\rho_\alpha : \text{Hom}(E_x, F_x) \rightarrow \text{Hom}(\ker \alpha, \text{coker } \alpha)$$

il morfismo che si deduce da ρ sopra ad $\alpha \in \Sigma_k^H$, nelle coordinate di sopra lo spazio tangente alle fibre di π lungo Σ_k^H sopra ad α è la proiezione dentro a $\text{Hom}(E_x, F_x)$ dello spazio vettoriale

$$T = \{(A, B) \in \text{Hom}(E_x, F_x) \times \text{Hom}(a, a') \mid d\tilde{\Psi}(0, A, B) = 0\}.$$

Ma $d\tilde{\Psi}(0, A, B) = 0$ implica che $\text{Im } A_1 \subset \text{Im } \alpha_2 = \text{Im } \alpha$ e dunque $\rho_\alpha(A) = 0$ perché si annulla τ .

Se invece $\rho_\alpha(A) = 0$, possiamo risolvere in B l'equazione

$$A_1 + \alpha_2 \circ B = 0$$

perché α_2 è iniettivo e abbiamo che $(A, B) \in T$ e dunque A sta nel fibrato tangente alle fibre di π lungo Σ_k^H . \square

Possiamo quindi porre la

Definizione 2.3 *Un morfismo α si dice normale se la sezione $\tilde{\alpha}$ è trasversa a tutte le sottovarietà Σ_k^H .*

In questo caso, grazie al Teorema della funzione implicita, le

$$\Sigma_k(\alpha) = \tilde{\alpha}^{-1}(\Sigma_k^H) = \{x \in X \mid \dim \ker \alpha_x = k\}$$

sono sottovarietà lisce di X . Inoltre, vale la

Proposizione 2.4 *Supponiamo che A, C, D siano delle varietà, con $D \subset C$, supponiamo che $f : A \rightarrow C$ sia trasversa a D e chiamiamo $B = f^{-1}(D)$. Allora*

$$N_{B/A} \xrightarrow{df} N_{D/C}$$

è un isomorfismo, dove $N_{B/A}$ è il fibrato normale a B in A . In particolare,

$$\text{codim}_A B = \text{codim}_C D.$$

Dimostrazione

Innanzitutto notiamo che $f(B) \subset D$ implica $df(TB) \subset TD$, dunque df si fattorizza ad una mappa

$$df : N_{B/A} = \frac{TA|_B}{TB} \rightarrow \frac{TC|_D}{TD} = N_{D/C}.$$

Essa è iniettiva perché se $v \in TA|_B$ finisce in 0, vuol dire che $df(v) \in TD$ e quindi $v \in TB$. Essa è surgettiva perché f è trasversa a D . \square

Dunque otteniamo che il fibrato normale a $\Sigma_k(\alpha)$ in X , $N_{\Sigma_k(\alpha)/X}$ è isomorfo al fibrato normale a Σ_k^H in $\text{Hom}(E, F)$, e dunque per la Proposizione 2.2,

$$N_{\Sigma_k(\alpha)/X} \cong \text{Hom}(\ker \alpha, \text{coker } \alpha).$$

Inoltre, grazie alla (3.28),

$$\text{codim}_X \Sigma_k(\alpha) = \text{codim}_{\text{Hom}(E, F)} \Sigma_k^H = k(n - m + k).$$

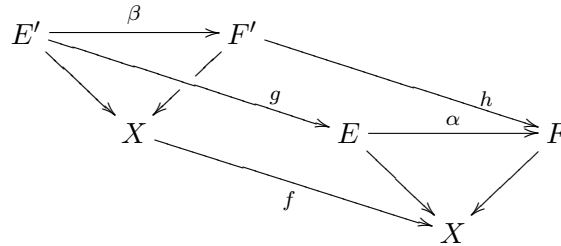
È inoltre possibile dare un'orientazione canonica alle $\Sigma_k(\alpha)$, indotta dall'orientazione di X nel modo seguente.

Innanzitutto, chiamato N il fibrato normale a $\Sigma_k(\alpha)$ in X , esso è orientabile in quanto complesso, con un'orientazione canonica. Abbiamo poi la successione esatta di fibrati su $\Sigma_k(\alpha)$

$$0 \rightarrow T\Sigma_k(\alpha) \rightarrow TX|_{\Sigma_k(\alpha)} \rightarrow N \rightarrow 0 \tag{2.2}$$

e sappiamo che TX è orientabile e che N è orientabile. Allora il Lemma 4.1 di [16], dice che anche $T\Sigma_k(\alpha)$ è orientabile, con l'orientazione che induca su $TX|_{\Sigma_k(\alpha)}$ l'orientazione somma.

Definizione 2.5 *Siano E, F, E', F' fibrati vettoriali su X e siano $\alpha : E \rightarrow F$ e $\beta : E' \rightarrow F'$ due morfismi di fibrati. Un'equivalenza di morfismi tra α e β è un diagramma commutativo*



con f un diffeomorfismo, $E' \cong f^*E$, $F' \cong f^*F$ e g ed h sono indotte dal pullback.

Allora MacPherson ha dimostrato che vale il seguente

Teorema 2.6 ([19]) *Siano E, F due fibrati vettoriali complessi su X di rango m ed n rispettivamente e sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati normale. Allora per ogni k esistono tre fibrati vettoriali K_k, C_k, I_k su $\Sigma_k(\alpha)$ di rango rispettivamente $k, n - m + k$ e $m - k$, esiste U un intorno aperto della sezione nulla di $\text{Hom}(K_k, C_k)$, V un intorno aperto di $\Sigma_k(\alpha)$ in X ed un'equivalenza di morfismi tra $(\varepsilon \oplus \text{Id})|_U$ e $\alpha|_V$, dove*

$$\varepsilon \oplus \text{Id} : p^*K_k \oplus p^*I_k \rightarrow p^*C_k \oplus p^*I_k$$

è il morfismo sopra allo spazio totale del fibrato $p : \text{Hom}(K_k, C_k) \rightarrow \Sigma_k(\alpha)$ dato dalla somma del morfismo tautologico su $\varepsilon : p^*K_k \rightarrow p^*C_k$ e dell'identità di p^*I_k .

Definizione 2.7 *Chiameremo i tre fibrati K_k, C_k e I_k dati dal Teorema 2.6 un modello locale standard per $\Sigma_k(\alpha)$.*

Come corollari di questo Teorema, abbiamo i seguenti fatti:

1. I fibrati $\ker \alpha, \text{Im } \alpha$ e $\text{coker } \alpha$, sopra a $\Sigma_k(\alpha)$ sono isomorfi ai fibrati K, I e C del modello standard locale dato dal Teorema.
2. Il fibrato normale a $\Sigma_k(\alpha)$ in X è isomorfo a $\text{Hom}(K, C)$.
3. La chiusura di $\Sigma_k(\alpha)$ è $\bigcup_{l \geq k} \Sigma_l(\alpha)$, che è in generale una sottovarietà singolare.
4. Se d è il più grande k tale che $\Sigma_k(\alpha)$ sia non vuota, allora $\Sigma_d(\alpha)$ è chiusa.

2.2 Modificazioni e risoluzioni

Sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo normale di fibrati su X . In questa sezione studieremo una sequenza di modificazioni successive di X con morfismi di fibrati sopra di essi, progressivamente meno singolari di α .

Sia d il più grande intero tale che $\Sigma_d(\alpha) \neq \emptyset$; abbiamo visto che $\Sigma_d(\alpha)$ è una sottovarietà chiusa di X .

Definizione 2.8 *Una modificazione di X in $\Sigma_d(\alpha)$ è una varietà X_d con una mappa $\psi_d : X_d \rightarrow X$ tale che*

1. ψ_d sia propria;
2. ψ_d mandi $\psi_d^{-1}(X - \Sigma_d(\alpha))$ diffeomorficamente su $M - \Sigma_d(\alpha)$.

Definizione 2.9 Una modificazione speciale di X in $\Sigma_d(\alpha)$ è una modificazione di X in $\Sigma_d(\alpha)$, con un morfismo normale di fibrati

$$\alpha_d : E_d \rightarrow F_d$$

sopra X_d , tale che

1. Vi sia un'equivalenza di morfismi tra $\alpha_d|_{\psi_d^{-1}(X-\Sigma_d(\alpha))}$ e $\alpha|_{X-\Sigma_d(\alpha)}$ che sugli spazi base coincide con $\psi_d : \psi_d^{-1}(X - \Sigma_d(\alpha)) \rightarrow X - \Sigma_d(\alpha)$
2. $\Sigma_d(\alpha_d) = \emptyset$
3. $F_d = \psi_d^*F$.

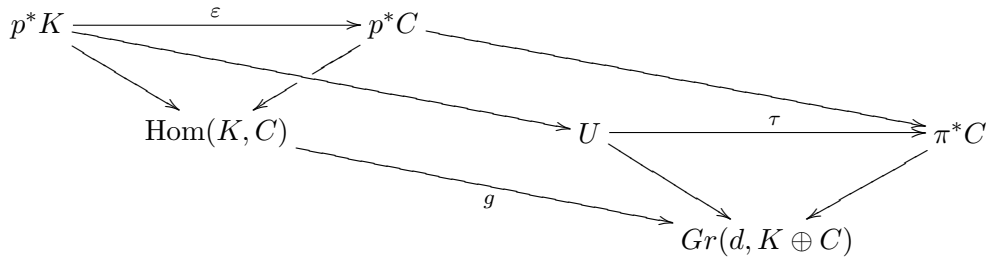
Teorema 2.10 ([19]) Esiste sempre una modificazione speciale di X in $\Sigma_d(\alpha)$. Inoltre essa può essere trovata orientabile.

Dimostrazione

Chiaramente è sufficiente trovare una modificazione speciale per la restrizione di α ad un qualunque intorno di $\Sigma_d(\alpha)$, e dunque grazie al Teorema 2.6, è sufficiente trovare modificazioni speciali per tutti i modelli standard locali per $\Sigma_d(\alpha)$. Sia dunque K, C, I un modello locale standard. Per costruire una modificazione speciale $\text{Hom}(K, C)_d$ di $\text{Hom}(K, C)$ in $\Sigma_d(\varepsilon \oplus Id)$ (che chiaramente coincide con la sezione nulla $\Sigma_d(\alpha) \rightarrow \text{Hom}(K, C)$), ci serve la seguente costruzione.

Consideriamo il fibrato $\pi : G = \text{Gr}(d, K \oplus C) \rightarrow \Sigma_d(\alpha)$ che ha come fibra la Grassmanniana dei d -piani in $K \oplus C$ e prendiamo su di esso il fibrato vettoriale tautologico $U \rightarrow G$ dei d -piani, che sopra ad un punto $P \in G$ ha come fibra P stesso.

Definiamo un nuovo morfismo tautologico $\tau : U \rightarrow \pi^*C$ che è dato dall'inclusione di U in $\pi^*(K \oplus C)$ seguita dalla proiezione sul secondo fattore. Definiamo inoltre una mappa $g : \text{Hom}(K, C) \rightarrow G$ che associa ad un punto $A \in \text{Hom}(K, C)$ il suo grafico in G . g è un diffeomorfismo con l'immagine, che è un aperto denso di G e notiamo che $p^*K = g^*U$, $p^*C = g^*\pi^*C$ e che c'è un diagramma commutativo



dove le mappe $p^*K \rightarrow U$ e $p^*C \rightarrow \pi^*C$ sono indotte dal pullback.

Definiamo la modificazione $\text{Hom}(K, C)_d$ come $G \setminus g(\mathbf{0})$, dove $\mathbf{0}$ è la sezione nulla di $\text{Hom}(K, C)$ e poniamo $\psi_d : \text{Hom}(K, C)_d \rightarrow \text{Hom}(K, C)$ uguale a

$$\psi_d(x) = \frac{g^{-1}(x)}{\|g^{-1}(x)\|^2}$$

se $x \in \text{Im } g$, e $\psi_d(x)$ uguale all'elemento nullo in $\text{Hom}(K, C)_{p(x)}$ altrimenti. Qui $\|\cdot\|$ è una norma indotta da un prodotto scalare lungo le fibre di $\text{Hom}(K, C)$ fissato. Notiamo che, poiché X è orientata e tutti i fibrati vettoriali sono complessi e dunque orientati, anche $\text{Hom}(K, C)_d$ è orientata.

Come morfismo di fibrati sopra a $\text{Hom}(K, C)_d$ prendiamo la restrizione di

$$\tau \oplus Id : U \oplus \pi^*I \rightarrow \pi^*C \oplus \pi^*I.$$

Notiamo che c'è un isomorfismo canonico tra $(\pi^*I)_x \cong (p^*I)_{\psi_d(x)}$, perché $p \circ \psi_d = \pi$ ed abbiamo analoghi isomorfismi per K e C .

Definiamo la mappa $\pi^*C \oplus \pi^*I \rightarrow p^*C \oplus p^*I$ nell'equivalenza di morfismi, come la somma dei due isomorfismi di cui sopra, e la mappa $U \oplus \pi^*I \rightarrow p^*K \oplus p^*I$ come la somma di una mappa che descriviamo ora e dell'isomorfismo di sopra. La mappa in questione $U \rightarrow p^*K$ è data dall'inclusione $U \hookrightarrow \pi^*K \oplus \pi^*C$ seguita dalla proiezione su π^*K , dall'isomorfismo di cui sopra ed infine dalla moltiplicazione del vettore $v \in p^*K$ ottenuto per $\|p(v)\|^2$.

I punti 1 e 2 della Definizione 2.8 ed i punti 1 e 3 della 2.9 sono ovvi, quindi resta da verificare che $\Sigma_d(\tau \oplus Id) = \emptyset$. Ma se $x \in \Sigma_d(\tau \oplus Id)$ ovvero se $\dim \ker(\tau \oplus Id)_x = d$, ricordando che τ è data dalla composizione $U \hookrightarrow \pi^*(K \oplus C) \rightarrow \pi^*C$, abbiamo che il d -piano U_x deve essere contenuto in $(\pi^*K)_x$ che ha dimensione d . Ma visto che $U_x = x \in Gr(d, K \oplus C)$ allora abbiamo che x è il grafico dell'applicazione nulla da K_x a C_x e dunque non sta in $\text{Hom}(K, C)_d = G \setminus g(\mathbf{0})$. \square

Quindi possiamo iterare la costruzione nel seguente modo: prima applichiamo una modificazione speciale di X in $\Sigma_d(\alpha)$, e grazie alla proprietà 2 della modificazione speciale, possiamo applicare una modificazione speciale di X_d in $\Sigma_{d-1}(\alpha_d)$, ottenendo una mappa $\psi_{d-1} : X_{d-1} \rightarrow X_d$ ed un morfismo di fibrati $\alpha_{d-1} : E_{d-1} \rightarrow F_{d-1}$. Possiamo quindi continuare, ottenendo X_i da una modificazione speciale di X_{i+1} in $\Sigma_i(\alpha_{i+1})$, fino ad avere X_p dove $p = 1 + \max\{0, m - n\}$, con $X_p = \Sigma_{p-1}(\alpha_p)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_p & \xrightarrow{\alpha_p} & F_p & & E_{p+1} & \xrightarrow{\alpha_{p+1}} & F_{p+1} & & & & E_d & \xrightarrow{\alpha_d} & F_d & & E & \xrightarrow{\alpha} & F \\
 & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & & & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \\
 & & X_p & \xrightarrow{\psi_p} & X_{p+1} & \xrightarrow{\psi_{p+1}} & \cdots & \xrightarrow{\psi_{d-1}} & X_d & \xrightarrow{\psi_d} & X & & & & & &
 \end{array}$$

Questa sequenza di modificazioni può essere pensata come una graduale eliminazione delle singolarità di α .

In generale la chiusura di $\Sigma_k(\alpha)$ è una sottovarietà singolare di X , quindi vogliamo desingularizzarla.

Definizione 2.11 Una risoluzione di $\overline{\Sigma_k(\alpha)}$ è una varietà liscia $\widetilde{\Sigma}_k(\alpha)$ con una mappa $\phi_k : \widetilde{\Sigma}_k(\alpha) \rightarrow X$ tale che

1. L'immagine di ϕ_k sia $\overline{\Sigma_k(\alpha)}$
2. ϕ_k sia propria
3. ϕ_k mandi $\phi_k^{-1}(\Sigma_k(\alpha))$ diffeomorficamente su $\Sigma_k(\alpha)$.

Proposizione 2.12 Esiste sempre una risoluzione di $\overline{\Sigma_k(\alpha)}$.

Dimostrazione

Grazie al Teorema 2.10 possiamo costruire una successione di modificazioni speciali che parte da X_d e finisce a X_p , dove d è il più grande intero tale che $\Sigma_d(\alpha) \neq \emptyset$ e $p = 1 + \max\{0, m - n\}$.

Poniamo dunque $\widetilde{\Sigma}_k(\alpha) = \Sigma_k(\alpha_{k+1}) \subset X_{k+1}$ e $\phi_k = \psi_d \circ \psi_{d-1} \circ \cdots \circ \psi_{k+1}$, ristretta a $\Sigma_k(\alpha_{k+1})$. Le proprietà delle modificazioni speciali implicano immediatamente le proprietà della risoluzione. □

2.3 La formula di MacPherson classica

Da una successione di modificazioni speciali possiamo costruire anche altri oggetti geometrici che ci serviranno per dimostrare la formula di MacPherson.

Sia $\widetilde{\Sigma}_k(\alpha)$ la risoluzione di $\overline{\Sigma_k(\alpha)}$ costruita tramite successive modificazioni speciali, e chiamiamo N_k un intorno tubolare chiuso di $\widetilde{\Sigma}_k(\alpha)$ in X_{k+1} , con $\rho_k : N_k \rightarrow \widetilde{\Sigma}_k(\alpha)$ la proiezione che lo rende un fibrato in dischi.

Incolliamo ora le due varietà con bordo N_k e $\psi_k^{-1}(N_k)$, lungo il bordo, tramite la restrizione di ψ_k e chiamiamo la varietà ottenuta B_k .

Costruiamo una mappa $\pi_k : B_k \rightarrow \widetilde{\Sigma}_k(\alpha)$ prendendola uguale a ρ_k su N_k ed a $\psi_k \circ \rho_k$ su $\psi_k^{-1}(N_k)$.

Costruiamo infine un fibrato vettoriale $\eta_k \rightarrow B_k$ incollando $E_k \rightarrow \psi_k^{-1}(N_k)$ con $E_{k+1} \rightarrow N_k$ tramite l'isomorfismo sui loro bordi che è dato dall'equivalenza di morfismi nella definizione di modificazione speciale.

Fissiamo ora un'orientazione su X e orientiamo le X_k in modo che ψ_k abbia grado $+1$. Orientiamo B_k nel seguente modo: su N_k mettiamo l'orientazione indotta da X_{k+1} e su $\psi_k^{-1}(N_k)$ l'orientazione opposta.

Siano adesso M ed N due varietà compatte, connesse ed orientate e sia $f : M \rightarrow N$ una mappa.

Definizione 2.13 *L'omomorfismo di Gysin*

$$f_* : H^*(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^*(N, \mathbf{R})$$

è definito da

$$f_* = P_N^{-1} \circ H_*(f) \circ P_M$$

dove $P_M : H^*(M, \mathbf{R}) \rightarrow H_*(M, \mathbf{R})$ è la dualità di Poincaré e $H_*(f) : H_*(M, \mathbf{R}) \rightarrow H_*(N, \mathbf{R})$ è l'omomorfismo indotto in omologia da f .

Valgono le seguenti proprietà:

1. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$
2. Se $\dim M = a$ e $\dim N = b$, allora

$$f_*(H^i(M, \mathbf{R})) \subset H^{i+b-a}(N, \mathbf{R})$$

3. Formula push-pull:

$$f_*(\omega \smile f^*\nu) = f_*\omega \smile \nu \tag{2.3}$$

4. Se f è una sommersione, allora f_* corrisponde all'integrazione lungo le fibre in coomologia di De Rham.

Teorema 2.14 (MacPherson [18], [19]) *Sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo normale di fibrati vettoriali su X , compatta, connessa ed orientata. Siano m, n il rango di E ed F rispettivamente, e sia cl una classe caratteristica reale. Prendiamo una successione di modificazioni speciali di X in $\Sigma_k(\alpha)$, con associato il diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
 \eta_k & & \\
 \downarrow & & \\
 B_k & & E \xrightarrow{\alpha} F \\
 \downarrow \pi_k & & \searrow \quad \swarrow \\
 \tilde{\Sigma}_k(\alpha) & \xrightarrow{\phi_k} & X
 \end{array}$$

Allora

$$cl(E) = \sum_{k=0}^m (\phi_k \circ \pi_k)_* cl(\eta_k). \quad (2.4)$$

Se inoltre $m = n$, allora vale

$$cl(E) - cl(F) = \sum_{k=1}^m (\phi_k \circ \pi_k)_* cl(\eta_k). \quad (2.5)$$

Dimostrazione

Costruiamo la varietà con bordo D prendendo l'unione disgiunta

$$(X \times I) \amalg (X_d \times I) \amalg (X_{d-1} \times I) \amalg \cdots \amalg (X_p \times I)$$

dove $I = [0, 1]$ ed identificando ogni $(X_{k+1} - \text{int}N_k) \times \{1\}$ con $(X_k - \psi_k^{-1}\text{int}N_k) \times \{0\}$ tramite la mappa ψ_k . Qui $\text{int}N_k$ indica la parte interna dell'intorno tubolare N_k di $\Sigma_k(\alpha_{k+1}) = \tilde{\Sigma}_k(\alpha)$.

Costruiamo un fibrato vettoriale $\zeta \rightarrow D$ prendendo il pullback di E_k su $X_k \times I$ ed incollandoli sulle porzioni identificate tramite l'equivalenza di morfismi data dalla modificazione speciale.

Costruiamo infine una mappa $f : D \rightarrow X$ definendola su $X_k \times I$ come la proiezione sul primo fattore seguita da $\psi_d \circ \cdots \circ \psi_k$.

Sia $i : \partial D \hookrightarrow D$. La componente $X \times \{0\}$ di ∂D è diffeomorfa tramite $f|_{X \times \{0\}}$ a X e

$$(f|_{X \times \{0\}})^* E = (i|_{X \times \{0\}})^* \zeta,$$

mentre le rimanenti componenti del bordo possono essere identificate a $\bigcup_k B_k$. Per costruzione, la mappa $f|_{B_k}$ è omotopa a $\phi_k \circ \pi_k$, e $\eta_k = (i|_{B_k})^* \zeta$.

Se orientiamo ∂D in modo da rendere $f|_{X \times \{0\}}$ di grado $+1$ e da dare l'orientazione opposta a quella canonica alle B_k , allora

$$cl(E) - \sum_{k=0}^m (\phi_k \circ \pi_k)_* cl(\eta_k) = (f|_{\partial D})_* cl(i^* \zeta).$$

Vediamo che il lato destro è effettivamente zero. Scegliamo come orientazione per ∂D una classe fondamentale della forma ∂u , dove u appartiene a $H_*(D, \partial D, \mathbf{R})$ e $\partial : H_*(D, \partial D, \mathbf{R}) \rightarrow H_*(\partial D, \mathbf{R})$ è l'omomorfismo di connessione della successione esatta della coppia $(D, \partial D)$. Allora calcoliamo

$$\begin{aligned} (f|_{\partial D})_* cl(i^* \zeta) &= (f|_{\partial D})_* i^* cl(\zeta) \\ &= P^{-1} H_*(f|_{\partial D}) P i^* cl(\zeta) \\ &= P^{-1} H_*(f) H_*(i) P i^* cl(\zeta) \\ &= P^{-1} H_*(f) H_*(i) (i^* cl(\zeta) \frown \partial u) \\ &= P^{-1} H_*(f) (cl(\zeta) \frown H_*(i) \partial u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dove le varie uguaglianze seguono da: naturalità di cl , definizione dell'omomorfismo di Gysin, functorialità dell'omologia, definizione di dualità di Poincaré, permanenza ([24], pag. 254), ed il fatto che $H_*(i)\partial = 0$ a causa della successione esatta della coppia in omologia.

Se E ed F hanno lo stesso rango, le proprietà delle modificazioni speciali implicano che $\eta_0 = (\phi_0 \circ \pi_0)^*F$ e che $\phi_0 \circ \pi_0$ ha grado $+1$ e quindi

$$(\phi_0 \circ \pi_0)_*cl(\eta_0) = (\phi_0 \circ \pi_0)_*(\phi_0 \circ \pi_0)^*cl(F) = cl(F).$$

□

Per rendere la formula (2.4) meno astratta, vogliamo identificare le varietà B_k ed i fibrati η_k più concretamente. Abbiamo chiamato $\tilde{\Sigma}_k(\alpha)$ la risoluzione di $\overline{\Sigma_k(\alpha)}$ costruita tramite successive modificazioni speciali, e ricordiamo che essa è per definizione $\Sigma_k(\alpha_{k+1}) \subset X_{k+1}$. Sopra di essa ci sono tre fibrati $K_k = \ker \alpha_{k+1}$, $C_k = \text{coker } \alpha_{k+1}$ e $I_k = \text{Im } \alpha_{k+1}$. Costruiamo il fibrato Grassmanniano $\pi_k : G_k := Gr(k, K_k \oplus C_k) \rightarrow \tilde{\Sigma}_k(\alpha)$ con il fibrato tautologico dei k -piani $U_k \rightarrow G_k$ e consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 U_k & & \pi_k^* I_k \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & G_k & \\
 & \downarrow \pi_k & \\
 \tilde{\Sigma}_k(\alpha) & \xrightarrow{\phi_k} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\alpha} & F \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & X &
 \end{array}$$

Possiamo identificare $\Sigma_k(\alpha)$ con $\phi_k^{-1}(\Sigma_k(\alpha)) \subset X_{k+1}$, che ha $\text{Hom}(K_k, C_k)$ come fibrato normale in X_{k+1} . Inoltre abbiamo visto dopo il Teorema 2.6 che K_k, C_k e I_k sono un modello locale standard per $\Sigma_k(\alpha)$, dunque in un intorno di $\Sigma_k(\alpha)$ possiamo identificare X_{k+1} con $\text{Hom}(K_k, C_k)$, $\Sigma_k(\alpha)$ con la sezione nulla e l'intorno tubolare chiuso N_k con

$$\{v \in \text{Hom}(K_k, C_k) \mid \|v\| \leq 1\}.$$

Abbiamo inoltre che la controimmagine di N_k tramite

$$\psi_k : Gr(k, K_k \oplus C_k) \setminus g(\mathbf{0}) \rightarrow \text{Hom}(K_k, C_k)$$

è diffeomorfa a $Gr(k, K_k \oplus C_k)$ meno un intorno aperto di $g(\mathbf{0})$.

Dunque incollando N_k e $\psi_k^{-1}(N_k)$ lungo il loro bordo tramite ψ_k , che lì è uguale a g^{-1} , otteniamo tutta $Gr(k, K_k \oplus C_k)$, e quindi $B_k \cong Gr(k, K_k \oplus C_k)$.

Inoltre per costruzione $E_{k+1} \rightarrow N_k$ è isomorfo a $p^*K \oplus p^*I$ mentre $E_k \rightarrow \psi_k^{-1}(N_k)$ è isomorfo a $U_k \oplus \pi_k^*I_k$ ed essi vengono incollati lungo i bordi da $\psi_k = g^{-1}$ per formare η_k che è dunque isomorfo a $U_k \oplus \pi_k^*I_k \rightarrow G_k$.

Dunque possiamo riscrivere le (2.4), (2.5) come

$$cl(E) = \sum_{k=0}^m (\phi_k)_* ((\pi_k)_* cl(U_k \oplus \pi_k^* I_k)) \quad (2.6)$$

$$cl(E) - cl(F) = \sum_{k=1}^m (\phi_k)_* ((\pi_k)_* cl(U_k \oplus \pi_k^* I_k)). \quad (2.7)$$

Il vantaggio di questa riformulazione è che ora i termini

$$(\pi_k)_* cl(U_k \oplus \pi_k^* I_k)$$

sono polinomi P_k nelle classi caratteristiche di K_k, C_k e I_k , che dipendono solo da cl, k, m ed n , ma sono indipendenti da M, α, E ed F . Inoltre essi possono essere esplicitamente calcolati, come vedremo.

Capitolo 3

La formula di MacPherson locale

Sia X una varietà reale orientabile, connessa, di dimensione ν , siano E ed F due fibrati vettoriali complessi su X , di rango rispettivamente uguale ad m ed n , dotati di metriche e connessioni e sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati.

È possibile vedere α come una sezione globale $\tilde{\alpha}$ su X del fibrato $\pi : \text{Hom}(E, F) \rightarrow X$ nel seguente modo: se $x \in X$, $\tilde{\alpha}_x$ è l'applicazione lineare $\alpha_x : E_x \rightarrow F_x$.

Sopra $\text{Hom}(E, F)$ abbiamo i due fibrati pullback π^*E , π^*F e un morfismo tautologico tra di essi, $\varepsilon : \pi^*E \rightarrow \pi^*F$ così definito: se $A \in \text{Hom}(E, F)$, ε_A è dato da A stesso. La speranza è che sia possibile, una volta trovati degli eventuali risultati per il morfismo tautologico, tirarli indietro su α . Studiamo quindi la situazione universale.

I risultati di questo capitolo provengono da [11], [12], [13], [14] e [15].

3.1 Il flusso nel caso universale

Il fibrato $\text{Hom}(E, F)$ non è compatto, ma è possibile vederlo dentro un fibrato (non vettoriale) compatto, che è il seguente: sia $\pi : G \rightarrow X$ il fibrato che sopra ogni punto $x \in X$ ha come fibra $Gr_{\mathbf{C}}(m, E_x \oplus F_x)$ la Grassmanniana complessa degli m -piani in $E_x \oplus F_x$. Abbiamo l'embedding

$$\text{Hom}(E, F) \subset G$$

che ad ogni $A : E_x \rightarrow F_x$ sopra $x \in X$ associa il suo grafico in $E_x \oplus F_x$.

Notiamo inoltre che c'è una decomposizione naturale del fibrato

$$\pi^*(E \oplus F) \cong U \oplus U^\perp \tag{3.1}$$

dove $U \rightarrow G$ è il fibrato tautologico degli m -piani, che sopra a $P \in G$ ha come fibra P , ed U^\perp è il fibrato che sopra $P \in G$ ha come fibra P^\perp .

Infatti, per dimostrare tale isomorfismo è sufficiente definire un morfismo tra $\pi^*(E \oplus F)$ e $U \oplus U^\perp$ che induca un isomorfismo su ogni fibra.

Sia allora $P \in G$ e sia $x = \pi(P)$; abbiamo che $\pi^*(E \oplus F)_P \cong (E \oplus F)_x \cong E_x \oplus F_x$ mentre $U_P \oplus U_P^\perp \cong P \oplus P^\perp$ e si ha un isomorfismo naturale $E_x \oplus F_x \cong P \oplus P^\perp$.

Consideriamo ora il flusso $\varphi_t : E \oplus F \rightarrow E \oplus F$ definito da

$$\varphi_t(x, e, f) = (x, te, f) \quad (3.2)$$

con $x \in X$, $e \in E_x$, $f \in F_x$, $t \in \mathbf{R}^+$. Esso induce un flusso $\varphi_t : G \rightarrow G$, inviando ogni m -piano nella sua immagine, che ristretto a $\text{Hom}(E, F) \subset G$ è $\varphi_t(A) = \frac{1}{t}A$, perché $(x, te, Ae) = (x, te, \frac{1}{t}Ate)$.

Data una forma differenziale ω su G , vogliamo studiare l'esistenza di limiti $\lim_{t \rightarrow 0, \infty} \varphi_t^*(\omega)$ nello spazio delle correnti.

Definiamo la sottovarietà

$$\mathcal{T} := \{(t, \varphi_t(P), P) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times (G \oplus G) \mid 0 < t < \infty \text{ e } P \in G\} \quad (3.3)$$

dove consideriamo $\mathbf{R} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ e $G \oplus G$ è il prodotto fibrato di G con se stessa. Fissata un'orientazione su G e una su $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$, orientiamo \mathcal{T} con l'orientazione indotta. Sia

$$T_1 := \llbracket \mathcal{T} \rrbracket \quad (3.4)$$

la corrente su $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times (G \oplus G)$ data dall'integrazione su \mathcal{T} , e sia $T := pr_* T_1$ il suo pushforward su $G \oplus G$ dove pr è la proiezione $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times (G \oplus G) \rightarrow G \oplus G$.

Analogamente poniamo

$$\mathcal{T}_{s,s'} := \{(t, \varphi_t(P), P) \in \mathcal{T} \mid s < t < s'\}, \quad (3.5)$$

$$T_{s,s'} := pr_* \llbracket \mathcal{T}_{s,s'} \rrbracket \quad (3.6)$$

con $0 < s < s' < \infty$. $\mathcal{T}_{s,s'}$ è una varietà compatta con bordo

$$\partial \mathcal{T}_{s,s'} = \{s\} \times \Gamma_{s'} - \{s'\} \times \Gamma_s \quad (3.7)$$

dove

$$\Gamma_s := \{(\varphi_s(P), P) \in G \oplus G \mid P \in G\}. \quad (3.8)$$

Ovviamente

$$\partial T_{s,s'} = \llbracket \Gamma_{s'} \rrbracket - \llbracket \Gamma_s \rrbracket. \quad (3.9)$$

Proposizione 3.1 *Esiste*

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow \infty}} T_{s,s'} = T$$

nella topologia data dalla massa delle correnti su $G \oplus G$. Inoltre la corrente T è flat ed intera rettificabile.

Dimostrazione

Mostriamo innanzitutto che, sopra ad ogni compatto di X , la sottovarietà $\mathcal{T} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times (G \oplus G)$ ha volume finito. Infatti, la sua chiusura è localmente della forma $\mathbf{R}^\nu \times A$, dove A è una sottovarietà semianalitica reale di $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times Gr(m, \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n) \times Gr(m, \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n)$. Infatti

$$A = \{(t, \varphi_t(P), P) \mid t \geq 0, P \in Gr(m, \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n)\}$$

è definito da equazioni algebriche e dalla disuguaglianza $t \geq 0$, dunque è semialgebrico. Dunque per il Teorema 1.37, $\overline{\mathcal{T}}$, e quindi anche \mathcal{T} , ha volume finito sopra ogni compatto di X .

Questo ci dice che la corrente $[[\mathcal{T}]]$ ha massa localmente finita.

Se $s \searrow 0$ e $s' \nearrow \infty$, le sottovarietà $\mathcal{T}_{s,s'}$ sono una contenuta nell'altra e convergono crescendo a \mathcal{T} , e per quanto visto, le correnti $[[\mathcal{T}_{s,s'}]]$ hanno massa localmente equilimitata e dunque convergono a $[[\mathcal{T}]]$ nella topologia della massa sui compatti di $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times (G \oplus G)$. Inoltre esse sono flat, perché esse ed i loro bordi hanno volume localmente finito. Ma la Proposizione 1.52 dice che allora convergono anche nella norma flat e dunque il limite $[[\mathcal{T}]]$ è flat. Inoltre $[[\mathcal{T}]]$ è intera rettificabile per la Proposizione 1.49.

Ora applicando la proiezione pr non facciamo altro che diminuire la massa e quindi la tesi segue. Infine, grazie alla Proposizione 1.53, $T = pr_*[[\mathcal{T}]]$ è flat e grazie alla Proposizione 1.48 è intera rettificabile. \square

Corollario 3.2 *Esistono i limiti*

$$\Gamma_0 := \lim_{s \rightarrow 0} [[\Gamma_s]] \quad e \quad \Gamma_\infty := \lim_{s \rightarrow \infty} [[\Gamma_s]]$$

nello spazio delle correnti su $G \oplus G$ e vale la formula

$$\partial T = \Gamma_\infty - \Gamma_0. \tag{3.10}$$

Inoltre Γ_0 e Γ_∞ sono correnti flat ed intere rettificabili.

Dimostrazione

Mandiamo prima $s \searrow 0$ nella (3.9) tenendo s' fisso; come caso particolare della dimostrazione della Proposizione 3.1, abbiamo l'esistenza del

$$\lim_{s \rightarrow 0} [[\Gamma_s]].$$

Ora mandiamo $s' \nearrow \infty$ per avere l'esistenza dell'altro limite, e la formula (3.10). Infine la Proposizione 1.52 implica che Γ_0 e Γ_∞ sono correnti flat, mentre la Proposizione 1.49 che sono intere rettificabili. \square

3.2 Gli operatori di Morse-Stokes

Vogliamo ora interpretare gli ultimi risultati dal punto di vista di operatori che agiscono sulle forme differenziali su G . La prima osservazione in questa direzione è la seguente.

Proposizione 3.3 *Siano pr_1 e pr_2 le due proiezioni da $G \oplus G$ sui due fattori. Allora per ogni ω forma differenziale su G , vale che*

$$\varphi_s^*(\omega) = (pr_2)_\# \{ (pr_1^* \omega) \wedge \phi_{\Gamma_s} \} \quad (3.11)$$

dove $(pr_2)_\#$ indica l'integrazione lungo le fibre di pr_2 e ϕ_{Γ_s} è il duale di Poincaré di Γ_s in $G \oplus G$.

Dimostrazione

Quest'ultima formula si può rileggere in termini di uguaglianza tra correnti su G : basta pensare le forme e le sottovarietà orientate come incluse nelle correnti nei modi già discussi. Ad ω assegniamo la corrente che agisce come $\omega(\psi) = \int_G \psi \wedge \omega$ e ad $i : X \hookrightarrow G$ associamo $[[X]](\psi) = \int_X i^* \psi$.

Allora la formula di sopra, nello spazio delle correnti su G , si legge

$$\varphi_s^*(\omega) = (pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [[\Gamma_s]] \}. \quad (3.12)$$

Infatti nelle identificazioni di sopra, all'integrazione lungo le fibre corrisponde il pushforward

$$\langle \pi_\# \alpha, \beta \rangle = \int_G \beta \wedge \pi_\# \alpha = \int_{G \oplus G} \pi^* \beta \wedge \alpha = \langle \alpha, \pi^* \beta \rangle = \langle \pi_* \alpha, \beta \rangle \quad (3.13)$$

grazie al Teorema di Fubini che ci dà la seconda uguaglianza, ed al duale di Poincaré corrisponde la corrente data dall'integrazione, perché

$$\langle \phi_{\Gamma_s}, \alpha \rangle = \int_{G \oplus G} \alpha \wedge \phi_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \alpha = \langle [[\Gamma_s]], \alpha \rangle. \quad (3.14)$$

Dimostriamo quindi la (3.12).

$$\begin{aligned} \langle (pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [[\Gamma_s]] \}, \psi \rangle &= \langle (pr_1^* \omega) \wedge [[\Gamma_s]], pr_2^* \psi \rangle = \langle [[\Gamma_s]], pr_1^* \omega \wedge pr_2^* \psi \rangle \\ &= \int_{\Gamma_s} pr_1^* \omega \wedge pr_2^* \psi = \int_G j^* pr_1^* \omega \wedge j^* pr_2^* \psi = \int_G \varphi_s^* \omega \wedge \psi = \langle \varphi_s^* \omega, \psi \rangle, \end{aligned}$$

dove $j : G \rightarrow \Gamma_s$ è il diffeomorfismo $j(P) = (\varphi_s(P), P)$ e abbiamo usato la formula di pullback dell'integrale e le ovvie $pr_1 \circ j = \varphi_s$ e $pr_2 \circ j = Id$. \square

Definiamo quindi l'operatore $\mathbf{T}_{s,s'}$ che va dallo spazio delle forme differenziali su G a quello delle correnti su G , che vale

$$\mathbf{T}_{s,s'}(\omega) := (-1)^{\deg\omega} (pr_2)_* \{(pr_1^* \omega) \wedge T_{s,s'}\} \quad (3.15)$$

dove la corrente $T_{s,s'}$ è definita in (3.6). Allora vale la

Proposizione 3.4

$$\{d \circ \mathbf{T}_{s,s'} + \mathbf{T}_{s,s'} \circ d\}(\omega) = \varphi_{s'}^* \omega - \varphi_s^* \omega. \quad (3.16)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_{s,s'}(\omega) &= (pr_2)_* \{(-1)^{\deg\omega} d\{(pr_1^* \omega) \wedge T_{s,s'}\}\} \\ &= (pr_2)_* \{(-1)^{\deg\omega} (pr_1^* d\omega) \wedge T_{s,s'} + (pr_1^* \omega) \wedge \partial T_{s,s'}\} \\ &= (pr_2)_* \{(-1)^{\deg\omega} (pr_1^* d\omega) \wedge T_{s,s'} + (pr_1^* \omega) \wedge ([\Gamma_{s'}] - [\Gamma_s])\} \\ &= -\mathbf{T}_{s,s'}(d\omega) + \varphi_{s'}^* \omega - \varphi_s^* \omega. \end{aligned}$$

□

Definiamo ora un altro operatore \mathbf{T} che va sempre dallo spazio delle forme differenziali su G a quello delle correnti su G ,

$$\mathbf{T}(\omega) := (-1)^{\deg\omega} (pr_2)_* \{(pr_1^* \omega) \wedge T\}. \quad (3.17)$$

Proposizione 3.5 *Esistono i limiti*

$$\mathbf{\Gamma}_0(\omega) := \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s^* \omega \quad e \quad \mathbf{\Gamma}_\infty(\omega) := \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s^* \omega$$

nella topologia della massa delle correnti su G e valgono le formule

$$\mathbf{\Gamma}_0(\omega) = (pr_2)_* \{(pr_1^* \omega) \wedge \Gamma_0\} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{\Gamma}_\infty(\omega) = (pr_2)_* \{(pr_1^* \omega) \wedge \Gamma_\infty\} \quad (3.19)$$

$$d\mathbf{T}(\omega) + \mathbf{T}(d\omega) = \mathbf{\Gamma}_\infty(\omega) - \mathbf{\Gamma}_0(\omega). \quad (3.20)$$

Dimostrazione

Grazie alla Proposizione (3.1) vale

$$\mathbf{T}(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow \infty}} \mathbf{T}_{s,s'}(\omega) \quad (3.21)$$

dove il limite esiste nella topologia della massa delle correnti su G .

Applicando il Corollario 3.2 alla (3.12), otteniamo subito l'esistenza dei limiti voluti e le (3.18), (3.19). La (3.16) infine dà la (3.20). □

3.3 L'analisi degli operatori Γ_0 e Γ_∞

Lo scopo di questa sezione è analizzare le due correnti Γ_0 e Γ_∞ . Visto che queste due sono scambiate dall'inversione temporale $t \mapsto \frac{1}{t}$, basterà studiare Γ_0 .

Un'osservazione molto utile è che ciascuno dei grafici $\Gamma_t \subset G \oplus G$ è indipendente dalle banalizzazioni della base, ovvero se

$$G|_U \cong U \times Gr(m, \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n)$$

allora sopra U , Γ_t ha la forma

$$\{(x, \varphi_t(P), P) | x \in U \text{ e } P \in Gr\}$$

e questa rappresentazione è indipendente dalle banalizzazioni di E ed F , perché il flusso φ_t commuta con le loro funzioni di transizione, visto che esso è dato dalla moltiplicazione per t di un fattore e le funzioni di transizione sono a valori in $GL(m, \mathbf{C})$.

Di conseguenza, anche il limite è indipendente dai parametri della base, dunque possiamo dimenticarci di X e analizzare semplicemente il flusso φ_t su $G = Gr(m, \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n)$ indotto dalla mappa $(z, w) \mapsto (tz, w)$ su $\mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n$, con $t \in \mathbf{R}$. Per semplificare i calcoli, trattiamo solo il caso $m \leq n$.

Consideriamo i sottoinsiemi

$$F_k := \{P \in G \mid \dim(P \cap \mathbf{C}^m) = k \text{ e } \dim(P \cap \mathbf{C}^n) = m - k\}$$

per $k = 0, \dots, m$. Essi sono sottovarietà lisce perché isomorfe a

$$Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m - k, \mathbf{C}^n) \cong F_k.$$

Inoltre

$$F_k \cap \text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) = \emptyset$$

se $k < m$ e

$$F_m \cap \text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) = \{C\},$$

dove C indica il piano $\mathbf{C}^m \subset \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n$.

Lemma 3.6 *Sia F l'insieme dei punti fissi di G lungo il flusso φ_t . Allora*

$$F = \coprod_{k=0}^m F_k \tag{3.22}$$

Dimostrazione

Sia $P \in G$ e scriviamo

$$P = \text{Span}\langle v_1, \dots, v_m \rangle,$$

con $v_i = (w_i, z_i)$ linearmente indipendenti, $w_i \in \mathbf{C}^m$ e $z_i \in \mathbf{C}^n$. Allora

$$\varphi_t(P) = \text{Span}\langle (tw_1, z_1), \dots, (tw_m, z_m) \rangle.$$

Supponiamo che $\dim(P \cap \mathbf{C}^m) = k$ e $\dim(P \cap \mathbf{C}^n) = m - k$. Allora possiamo scrivere

$$P \cap \mathbf{C}^m = \text{Span}\langle w_1, \dots, w_k \rangle$$

$$P \cap \mathbf{C}^n = \text{Span}\langle z_1, \dots, z_{m-k} \rangle$$

e dunque

$$P = \text{Span}\langle (w_1, 0), \dots, (w_k, 0), (0, z_1), \dots, (0, z_{m-k}) \rangle,$$

da cui

$$\varphi_t(P) = \text{Span}\langle (tw_1, 0), \dots, (tw_k, 0), (0, z_1), \dots, (0, z_{m-k}) \rangle = P.$$

Viceversa, prendiamo $P \in G$, tale che $\varphi_t(P) = P$ per ogni $0 < t < \infty$. Supponiamo che $\dim(P \cap \mathbf{C}^m) = a$, $\dim(P \cap \mathbf{C}^n) = b$, con $a + b \leq m$ e $k := m - (a + b)$ e consideriamo la proiezione

$$pr_{\mathbf{C}^m} : P \rightarrow \mathbf{C}^m,$$

con $P \cap \mathbf{C}^m \subset pr_{\mathbf{C}^m}(P)$.

Prendiamo $\{e_1, \dots, e_a\}$ una base di $P \cap \mathbf{C}^m$ e completiamola a

$$\{e_1, \dots, e_a, w_1, \dots, w_k\}$$

base di $pr_{\mathbf{C}^m}(P)$. Prendiamo degli z_j in modo che $v_j = (w_j, z_j)$ appartenga a P e notiamo che i vettori

$$\{(e_1, 0), \dots, (e_a, 0), (w_1, z_1), \dots, (w_k, z_k)\}$$

sono linearmente indipendenti. Dato che

$$b = \dim(P \cap \mathbf{C}^n) = \dim \ker pr_{\mathbf{C}^m} = m - \dim \text{Im } pr_{\mathbf{C}^m} = m - (a + k),$$

possiamo completare i vettori di sopra ad una base di tutto P aggiungendo

$$\{(0, f_1), \dots, (0, f_b)\}$$

dove $\{f_1, \dots, f_b\}$ è una base di $P \cap \mathbf{C}^n$.

Se per assurdo avessimo $k > 0$, prendiamo $v_1 = (w_1, z_1) \neq (0, 0)$ e dato che $\varphi_t(v_1) \in P$ esisteranno dei coefficienti $a_i(t), b_j(t), c_l(t) \in \mathbf{C}$ tali che

$$(tw_1, z_1) = \sum_i a_i(t)(e_i, 0) + \sum_j b_j(t)(0, f_j) + \sum_l c_l(t)(w_l, z_l),$$

da cui

$$tw_1 = \sum_i a_i(t)e_i + \sum_l c_l(t)w_l.$$

Ma poiché i vettori a destra sono linearmente indipendenti, si ha che $c_l(t) = t$ e che tutti gli altri $a_i(t), c_l(t)$ sono zero. Ma allora $(tw_1, z_1) - t(w_1, z_1) \in P \cap \mathbf{C}^n$ e facendo tendere t a zero, ricordando che $P \cap \mathbf{C}^n$ è un chiuso, otteniamo che $(0, z_1) \in P \cap \mathbf{C}^n$. Ciò implica che $(w_1, 0) = (w_1, z_1) - (0, z_1)$ sta in P , da cui $w_1 \in P \cap \mathbf{C}^m$, ma avevamo supposto che esso non ci stesse e ciò è assurdo. \square

Consideriamo ora gli insiemi

$$\Sigma_k := \{P \in G \mid \dim(P \cap \mathbf{C}^m) = k\}, \quad \Upsilon_k := \{P \in G \mid \dim(P \cap \mathbf{C}^n) = m - k\}$$

e chiamiamo

$$\Sigma_k \cap \text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) = \{A \mid \dim(\ker A) = k\} =: \Sigma_k^H.$$

Notiamo inoltre che

$$\Upsilon_k \cap \text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) = \emptyset$$

se $k < m$ e

$$\Upsilon_m = \text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n). \tag{3.23}$$

Ricordiamo che nella Proposizione 2.2 abbiamo già visto che le Σ_k^H sono sottovarietà lisce di $\text{Hom}(E, F)$. Dimostreremo nella Proposizione 3.11 che le Σ_k e le Υ_k sono anch'esse sottovarietà lisce di G .

Notiamo che

$$\bar{\Sigma}_k = \bigcup_{j=k}^m \Sigma_j = \{P \mid \dim(P \cap \mathbf{C}^m) \geq k\}$$

che è una sottovarietà algebrica (singolare) e dunque ha volume localmente finito in G .

Abbiamo le seguenti filtrazioni

$$\{C\} = \Sigma_m \subset \bar{\Sigma}_{m-1} \subset \bar{\Sigma}_{m-2} \subset \dots \subset \bar{\Sigma}_0 = G$$

$$Gr(m, \mathbf{C}^n) = \Upsilon_0 \subset \bar{\Upsilon}_1 \subset \dots \subset \bar{\Upsilon}_{m-1} \subset \bar{\Upsilon}_m = G$$

dove C indica il piano $\mathbf{C}^m \subset \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n$, ed inoltre vale che

$$\text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) = G - \bar{\Upsilon}_{m-1} = \Upsilon_m. \tag{3.24}$$

Proposizione 3.7 *Per ogni $P \in G$ vale che*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(P) = (P \cap \mathbf{C}^m) \oplus pr_{\mathbf{C}^n}(P) =: \pi_1(P)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(P) = pr_{\mathbf{C}^m}(P) \oplus (P \cap \mathbf{C}^n) =: \pi_2(P)$$

dove $pr_{\mathbf{C}^m}$ e $pr_{\mathbf{C}^n}$ sono le proiezioni di $\mathbf{C}^m \oplus \mathbf{C}^n$ sui due fattori.

Dimostrazione

Sia $P \in G$, prendiamo una base di $pr_{\mathbf{C}^n}(P)$

$$\{z_1, \dots, z_k\}$$

e per ogni $1 \leq j \leq k$ prendiamo w_j tali che $v_j = (w_j, z_j)$ appartenga a P . Completiamo quindi i v_j ad una base di P , aggiungendovi una base di $\ker pr_{\mathbf{C}^n} = P \cap \mathbf{C}^m$,

$$\{(e_1, 0), \dots, (e_l, 0)\}.$$

Allora

$$\varphi_t(P) = \text{Span}\langle (tw_1, z_1), \dots, (tw_k, z_k), (te_1, 0), \dots, (te_l, 0) \rangle,$$

e quando $t \rightarrow 0$ i primi k vettori tendono ai vettori $(0, z_j)$, che generano $pr_{\mathbf{C}^n}(P)$, mentre i rimanenti restano sempre paralleli a se stessi e dunque restano anche nel limite. Dunque il piano limite è generato dato dall'intersezione del piano iniziale con \mathbf{C}^m , più la proiezione di esso su \mathbf{C}^n .

Per il limite per $t \rightarrow \infty$, usiamo $pr_{\mathbf{C}^m}$ per costruire una base di P della forma

$$\{(w_1, z_1), \dots, (w_k, z_k), (0, f_1), \dots, (0, f_l)\},$$

scriviamo

$$\varphi_t(P) = \text{Span}\left\langle \left(w_1, \frac{z_1}{t}\right), \dots, \left(w_k, \frac{z_k}{t}\right), \left(0, \frac{f_1}{t}\right), \dots, \left(0, \frac{f_l}{t}\right) \right\rangle,$$

e ragioniamo come prima. □

Corollario 3.8 Σ_k e Υ_k sono rispettivamente le varietà stabile e instabile di F_k per il flusso φ_t^{-1} , ovvero

$$\Sigma_k = \{P \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(P) \in F_k\} \text{ e } \Upsilon_k = \{P \in G \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(P) \in F_k\}.$$

Dimostrazione

Se $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(P) \in F_k$, allora grazie alla Proposizione 3.7, $\dim(P \cap \mathbf{C}^m) = k$, ovvero $P \in \Sigma_k$. Se invece $P \in \Sigma_k$, allora chiaramente $\dim(\pi_1(P) \cap \mathbf{C}^m) = k$ ed inoltre l'immagine di P tramite $pr_{\mathbf{C}^n}$ ha dimensione $m - k$, e dunque $\pi_1(P) \in F_k$. Analogamente per Υ_k . □

Quindi abbiamo due proiezioni

$$\Upsilon_k \xrightarrow{\pi_2} F_k \xleftarrow{\pi_1} \Sigma_k$$

e possiamo definire il prodotto fibrato

$$\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k := \{(P, Q) \in \Upsilon_k \times \Sigma_k \mid \pi_2(P) = \pi_1(Q)\}.$$

Allora vale la

Proposizione 3.9 *Valgono le uguaglianze tra correnti su $G \oplus G$*

$$\Gamma_\infty = \sum_{k=0}^m [\Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k] \quad e \quad \Gamma_0 = \sum_{k=0}^m [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k]. \quad (3.25)$$

Dimostrazione

Trattiamo solo Γ_∞ , dato che Γ_0 è analogo. Se $(P', P) \in \text{Supp}(\Gamma_\infty)$ allora esistono $\{P_j\} \subset G$ con $P_j \rightarrow P$ ed esistono $\{t_j\} \subset \mathbf{R}$ con $t_j \rightarrow \infty$ e $Q_j := \varphi_{t_j} P_j \rightarrow P'$.

Sia $L(P_j, Q_j)$ la linea orientata del flusso di φ_t che parte da P_j e finisce in Q_j . Allora, ricordando che nella dimostrazione della Proposizione 3.1 avevamo visto che il grafico totale del flusso \mathcal{T} aveva volume localmente finito, abbiamo che le lunghezze di $L(P_j, Q_j)$ sono equilimitate e dunque per compattezza una sottosuccessione di esse converge ad una curva liscia a tratti $L(P, P')$, che è di flusso nei tratti lisci e che unisce P e P' .

Ora il fatto che $t_j \rightarrow \infty$ implica che $L(P, P')$ passa per almeno un punto fisso del flusso, perché la curva di lunghezza finita $L(P, P')$ viene percorsa in tempo infinito. Dunque esiste un k tale che $L(P, P')$ passi per F_k , nel punto $Q = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s(P)$.

Proviamo che $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s(P') = Q$. Dimostriamo innanzitutto che se una linea di flusso (di lunghezza positiva) parte da F_k e termina in F_j allora $k < j$. Infatti se esiste un $R \in G$ tale che $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(R) \in F_k$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(R) \in F_j$ allora $k = \dim(R \cap \mathbf{C}^m) \leq \dim pr_{\mathbf{C}^m}(R) = j$ e se fosse $j = k$ allora avremmo anche $m - k = \dim pr_{\mathbf{C}^n}(R) = \dim(R \cap \mathbf{C}^n) = m - j$ da cui $R \in F_k$ che è un punto fisso.

Dimostriamo che in $L(P, P')$ non possono esservi altri punti fissi oltre a $Q \in F_k$ e dunque avremo che $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s(P') \in F_k$, e anzi è uguale a Q , perché non vi sono linee di flusso che partono e tornano in F_k . Se per assurdo ve ne fosse almeno un altro che appartiene a F_j , allora visto che $L(P, P')$ parte da P , arriva in F_k , riparte e arriva a F_j avremmo $k < j$. Continuando così l'ultimo punto fisso su $L(P, P')$ prima di Q appartiene a F_l con $k < l$. Dunque

$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s(P') \in F_l$ ovvero $P' \in \Sigma_l$, e $(P', P) \in \Sigma_l \times \Upsilon_k$. Ma quest'ultima varietà ha dimensione troppo piccola per supportare la corrente Γ_∞ , grazie al Teorema 1.55, e quindi abbiamo un assurdo.

Dunque, grazie al Corollario 3.8, $P \in \Upsilon_k$, e $P' \in \Sigma_k$, con $\pi_2(P) = \pi_1(P')$, da cui $(P', P) \in \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k$.

Quindi $\text{Supp}(\Gamma_\infty) \subset \bigcup_k \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k$, ma ciascuna delle $\Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k$ è un sottoinsieme della varietà algebrica $\Sigma_k \times \Upsilon_k$ denso nella topologia di Zariski, e dunque per il Teorema 1.37 ha volume finito in $G \times G$. Il Teorema 1.56 ci dà quindi che

$$\Gamma_\infty = \sum_k n_k \llbracket \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k \rrbracket$$

per qualche $n_k \in \mathbf{Z}$.

Non resta che calcolare gli n_k : la strategia è mettersi in un intorno di F_k e mostrare che lì ∂T è uguale a $\llbracket \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k \rrbracket$. Rimandiamo i calcoli alla sezione 3.6 quando avremo analizzato più a fondo la struttura locale di Σ_k e Υ_k . \square

Corollario 3.10 *Gli operatori Γ_0 e Γ_∞ possono essere scritti come*

$$\Gamma_0 = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \quad e \quad \Gamma_\infty = \sum_{k=0}^m \tilde{\mathbf{P}}_k,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(\omega) &:= (pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge \llbracket \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k \rrbracket \} \\ \tilde{\mathbf{P}}_k(\omega) &:= (pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge \llbracket \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k \rrbracket \}, \end{aligned}$$

dove $pr_1, pr_2 : G \oplus G \rightarrow G$ sono le proiezioni sui due fattori.

3.4 I residui

Proposizione 3.11 *Le mappe $\pi_1 : \Sigma_k \rightarrow F_k$ e $\pi_2 : \Upsilon_k \rightarrow F_k$ hanno una struttura di fibrati vettoriali. In particolare, le Σ_k e Υ_k sono sottovarietà lisce di G .*

Dimostrazione

Ricordiamo che

$$F_k \cong Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m-k, \mathbf{C}^n).$$

Siano $\xi \rightarrow Gr(k, \mathbf{C}^m)$ e $\eta \rightarrow Gr(m-k, \mathbf{C}^n)$ i fibrati tautologici di rango k e $m-k$ rispettivamente, che possiamo considerare estesi per pullback sopra F_k . Siano invece ξ^\perp il fibrato degli $m-k$ piani in \mathbf{C}^m ortogonali a quelli di

ξ e η^\perp il fibrato degli $n - m + k$ piani in \mathbf{C}^n ortogonali a quelli di η .

Allora il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\xi, \eta^\perp) & \xrightarrow{j_2} & \Upsilon_k \\ \pi'_2 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m-k, \mathbf{C}^n) & \xrightarrow{\cong} & F_k \end{array} \quad (3.26)$$

dove π'_2 è la proiezione del fibrato e sopra a $(\xi, \eta) \in Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m-k, \mathbf{C}^n)$ j_2 è data da $j_2(a) = \mathrm{Graph}(a) \oplus \eta$.

Infatti, se $P = (\xi, \eta, a) \in \mathrm{Hom}(\xi, \eta^\perp)$, allora $\pi'_2(P) = (\xi, \eta)$ mentre $j_2(P) = \mathrm{Graph}(a) \oplus \eta$ e, grazie alla Proposizione 3.7,

$$\pi_2 \circ j_2(P) = pr_{\mathbf{C}^m}(\mathrm{Graph}(a) \oplus \eta) \oplus ((\mathrm{Graph}(a) \oplus \eta) \cap \mathbf{C}^n) = (\xi, \eta).$$

Un'inversa di j_2 si costruisce così: grazie alla Proposizione 3.7 ed al Corollario 3.8, se $P \in \Upsilon_k$, allora

$$\dim(pr_{\mathbf{C}^m}(P)) = k, \quad \dim(P \cap \mathbf{C}^n) = m - k$$

quindi possiamo chiamare $\eta = P \cap \mathbf{C}^n$, $\xi = pr_{\mathbf{C}^m}(P)$ e vedere P come somma del grafico di un'applicazione lineare da ξ all'ortogonale di η , più η .

Quindi j_2 è un omeomorfismo e dunque induce una struttura di fibrato su Υ_k .

Per Σ_k , si usa il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\eta, \xi^\perp) & \xrightarrow{j_1} & \Sigma_k \\ \pi'_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m-k, \mathbf{C}^n) & \xrightarrow{\cong} & F_k \end{array}$$

dove sopra a (ξ, η) , $j_1(b) = \xi \oplus \mathrm{Graph}(b)$. □

Corollario 3.12 *Il fibrato normale a Σ_k in G è isomorfo a*

$$\pi_1^* \Upsilon_k \cong \pi_1^* \mathrm{Hom}(\xi, \eta^\perp) \cong \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k.$$

Dimostrazione

Dato che $\mathrm{Hom}(E, F)$ è un aperto denso di G , abbiamo che il fibrato normale a Σ_k in G ristretto a $\mathrm{Hom}(E, F)$ è isomorfo al fibrato normale a Σ_k^H in $\mathrm{Hom}(E, F)$, che grazie alla Proposizione 2.2, è

$$\mathrm{Hom}(\ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H}, \mathrm{coker} \varepsilon|_{\Sigma_k^H}).$$

Ma questo fibrato ha una naturale estensione a tutta Σ_k , che è $\pi_1^* \text{Hom}(\xi, \eta^\perp)$, che risulta essere quindi il fibrato normale a Σ_k in G .

Ora la Proposizione 3.11 ci dice che quest'ultimo è isomorfo a $\pi_1^* \Upsilon_k$, che, per definizione di pullback, è isomorfo a $\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k$. \square

Corollario 3.13

$$\text{codim}_G \Upsilon_k = (m - k)^2 \quad (3.27)$$

$$\text{codim}_G \Sigma_k = \text{codim}_{\text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)} \Sigma_k^H = k(n - m + k) \quad (3.28)$$

Dimostrazione

Visto che $\Upsilon_k \cong \text{Hom}(\xi, \eta^\perp)$, basta calcolare $\dim \text{Hom}(\xi, \eta^\perp)$. Essa è la somma della dimensione della base, che è $F_k \cong Gr(k, \mathbf{C}^m) \times Gr(m - k, \mathbf{C}^n)$ e quella delle fibre. Dunque

$$\dim \text{Hom}(\xi, \eta^\perp) = k(m - k) + (m - k)(n - m + k) + k(n - m + k) = mn - (m - k)^2.$$

Analogamente, visto che $\Sigma_k \cong \text{Hom}(\eta, \xi^\perp)$,

$$\dim \text{Hom}(\eta, \xi^\perp) = k(m - k) + (m - k)(n - m + k) + (m - k)^2 = mn - k(n - m + k).$$

Infine, visto che $\text{Hom}(E, F)$ è un aperto denso di G , abbiamo che

$$\dim \Sigma_k = \dim \Sigma_k^H.$$

\square

Se ω è una forma differenziale su G , definita in un intorno di $\overline{\Upsilon}_k$, la possiamo restringere a Υ_k e definire la forma $\text{Res}_k(\omega) := (\pi_1)^* \{(\pi_2)_\# \omega\}$.

Se invece ω' è definita in un intorno di $\overline{\Sigma}_k$, possiamo restringerla a Σ_k e definire $\text{Res}'_k(\omega') := (\pi_2)^* \{(\pi_1)_\# \omega'\}$.

Proposizione 3.14 *Per ogni forma differenziale ω su G , le forme $\text{Res}_k(\omega)$, $\text{Res}'_k(\omega)$ hanno norma L^1 (i.e. massa) finita, e dunque $\text{Res}_k(\omega) \llbracket \Sigma_k \rrbracket$, $\text{Res}'_k(\omega) \llbracket \Upsilon_k \rrbracket$ sono correnti su G ben definite. Valgono inoltre le uguaglianze tra correnti*

$$\mathbf{P}_k(\omega) = \text{Res}_k(\omega) \llbracket \Sigma_k \rrbracket \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k(\omega) = \text{Res}'_k(\omega) \llbracket \Upsilon_k \rrbracket. \quad (3.30)$$

Dimostrazione

Dimostriamo prima la seconda parte della Proposizione e poi la prima.

Per definizione di prodotto fibrato, il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k & \xrightarrow{p_2} & \Sigma_k \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 \Upsilon_k & \xrightarrow{\pi_2} & F_k
 \end{array} \tag{3.31}$$

commuta, dove p_1 e p_2 sono indotte dalle proiezioni da $G \oplus G$ su G e quindi vi è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \Upsilon_k & \xleftarrow{p_1} & \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k & \xrightarrow{p_2} & \Sigma_k \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xleftarrow{pr_1} & G \oplus G & \xrightarrow{pr_2} & G
 \end{array}$$

dove le frecce verticali sono inclusioni. Dalla commutatività di questi diagrammi, si calcola allora

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{P}_k(\omega), \psi \rangle &= \langle (pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k] \}, \psi \rangle \\
 &= \langle \{ (pr_1^* \omega) \wedge [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k] \}, pr_2^* \psi \rangle \\
 &= \langle [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k], pr_1^* \omega \wedge pr_2^* \psi \rangle \\
 &= \int_{\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k} pr_1^* \omega \wedge pr_2^* \psi = \int_{\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k} p_1^* \omega \wedge p_2^* \psi \\
 &= \int_{\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k} p_2^* \pi_1^*(\pi_2)_\# \omega \wedge p_2^* \psi = \int_{\Sigma_k} \pi_1^*(\pi_2)_\# \omega \wedge \psi \\
 &= \langle [\Sigma_k], \pi_1^*(\pi_2)_\# \omega \wedge \psi \rangle = \langle \pi_1^*(\pi_2)_\# \omega \wedge [\Sigma_k], \psi \rangle \\
 &= \langle \text{Res}_k(\omega) [\Sigma_k], \psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Siccome le sottovarietà Υ_k e Σ_k hanno volume finito in G , anche $\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k$ ha volume finito in $G \times G$ e quindi la corrente $(pr_1^* \omega) \wedge [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k]$ ha massa finita. Ma il pushforward di correnti tramite la proiezione diminuisce la massa, dunque la corrente $(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k] \} = \text{Res}_k(\omega) [\Sigma_k]$ ha massa finita, il che è chiaramente equivalente al fatto che $\text{Res}_k(\omega)$ sia integrabile su Σ_k . Analogamente per $\text{Res}'_k(\omega)$. \square

Notiamo infine che ci sono le compattificazioni

$$G(\xi \oplus \eta^\perp) := Gr(k, \xi \oplus \eta^\perp)$$

che contiene $\text{Hom}(\xi, \eta^\perp)$, e

$$G(\eta \oplus \xi^\perp) := \text{Gr}(m - k, \eta \oplus \xi^\perp)$$

che contiene $\text{Hom}(\eta, \xi^\perp)$.

Le mappe j_1 e j_2 si estendono a mappe algebriche surgettive

$$G(\eta \oplus \xi^\perp) \xrightarrow{\bar{j}_1} \bar{\Sigma}_k$$

$$G(\xi \oplus \eta^\perp) \xrightarrow{\bar{j}_2} \bar{\Upsilon}_k$$

date sopra a $(\xi, \eta) \in G_k \times G_{m-k}$ da

$$\bar{j}_1(l_1) = \xi \oplus l_1$$

$$\bar{j}_2(l_2) = l_2 \oplus \eta.$$

Vale allora la

Proposizione 3.15 *La forma $\text{Res}_k(\omega)$ può essere espressa come*

$$\text{Res}_k(\omega) = \pi_1^* \{ (\tilde{\pi}_2)_* \tilde{\omega} \} \quad (3.32)$$

dove $\tilde{\pi}_2 : G(\xi \oplus \eta^\perp) \rightarrow F_k$, e $\tilde{\omega} = \tilde{j}_2^* \omega$.

Dimostrazione

Il diagramma commutativo (3.26) ci dice che $(\pi_2)_* \omega = (\pi'_2)_* j_2^* \omega$. Le fibre di π'_2 sono dense nella topologia di Zariski nelle fibre di $\tilde{\pi}_2$ e dunque hanno misura piena. Quindi l'integrazione di una forma su $G(\xi \oplus \eta^\perp)$ lungo le fibre di π'_2 o di $\tilde{\pi}_2$ sono uguali. \square

Riassumiamo tutto quello fin qui dimostrato nel caso universale:

Teorema 3.16 *Sia $G = \text{Gr}(m, E \oplus F)$ il fibrato Grassmanniano degli m -piani dentro al fibrato vettoriale $E \oplus F \rightarrow X$ e sia φ_t , $0 < t < \infty$, il flusso su G indotto da $(e, f) \mapsto (te, f)$ su $E \oplus F$. Allora esistono operatori lineari e continui Γ_0 , Γ_∞ , \mathbf{T} , dallo spazio delle forme differenziali su G a quello delle correnti su G , tali che, per ogni ω forma su G , valgano*

$$\Gamma_0(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^* \omega = \sum_{k=0}^m \text{Res}_k(\omega) [\Sigma_k] \quad (3.33)$$

$$\Gamma_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{k=0}^m \text{Res}'_k(\omega) [\Upsilon_k] \quad (3.34)$$

dove

$$\text{Res}_k(\omega) = \pi_1^* \{ (\pi_2)_* \omega \} \quad \text{Res}'_k(\omega) = \pi_2^* \{ (\pi_1)_* \omega \}. \quad (3.35)$$

Inoltre \mathbf{T} definito dalla (3.17) soddisfa

$$d \circ \mathbf{T} + \mathbf{T} \circ d = \Gamma_\infty - \Gamma_0. \quad (3.36)$$

3.5 La formula di MacPherson nel caso universale

Sia $\varepsilon : \pi^*E \rightarrow \pi^*F$ il morfismo tautologico sopra a $\text{Hom}(E, F)$, sia $G = \text{Gr}(m, E \oplus F)$ il fibrato Grassmanniano degli m -piani in $E \oplus F$, sia $U \rightarrow G$ il fibrato tautologico degli m -piani sopra G e sia Φ un polinomio invariante. Poniamo $\omega = \Phi(\Omega^U)$ dove Ω^U è la matrice di curvatura di U ; calcoliamone i residui.

Per definizione, $\text{Res}_k(\omega)$ si calcola restringendo ω a Υ_k , integrando lungo le fibre di π_2 e tirando indietro a Σ_k con π_1 . Grazie alla proprietà di naturalezza delle classi caratteristiche, $\omega|_{\Upsilon_k} = \Phi(\Omega^{U|_{\Upsilon_k}})$.

Affermiamo ora che $U|_{\Upsilon_k} \cong \pi_2^*\eta \oplus U_k$ dove U_k è la restrizione a

$$\Upsilon_k \cong \text{Hom}(\xi, \eta^\perp) \subset G(\xi \oplus \eta^\perp)$$

del fibrato tautologico di k -piani.

Infatti, se ricordiamo che l'isomorfismo $\text{Hom}(\xi, \eta^\perp) \xrightarrow{\cong} \Upsilon_k$ è dato da $(\xi, \eta, a) \mapsto \text{Graph}(a) \oplus \eta$, otteniamo subito che $U|_{\Upsilon_k}$ è somma di due fibrati, uno isomorfo a $\pi_2^*\eta$ e l'altro al fibrato tautologico su $G(\xi \oplus \eta^\perp)$, perché l'embedding di $\text{Hom}(\xi, \eta^\perp)$ nella Grassmanniana è dato proprio dal grafico.

Otteniamo quindi che $\text{Res}_k(\omega) = \pi_1^*(\pi_2)_*\Phi(\Omega^{\pi_2^*\eta \oplus U_k})$.

Consideriamo di nuovo il diagramma commutativo (3.31)

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^*\Upsilon_k \cong \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k & \xrightarrow{p_2} & \Sigma_k \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \Upsilon_k & \xrightarrow{\pi_2} & F_k \end{array}$$

da cui si deduce che

$$\text{Res}_k(\omega) = \pi_1^*(\pi_2)_*\Phi(\Omega^{\pi_2^*\eta \oplus U_k}) = (p_2)_*p_1^*\Phi(\Omega^{\pi_2^*\eta \oplus U_k}) = (p_2)_*\Phi(\Omega^{p_1^*\pi_2^*\eta \oplus p_1^*U_k}).$$

Studiamo cosa succede quando ci restringiamo alla carta $\text{Hom}(E, F) \subset G$. Abbiamo detto che

$$\Sigma_k \cap \text{Hom}(E, F) = \{A \mid \dim(\ker A) = k\} = \Sigma_k^H.$$

Inoltre abbiamo chiaramente i seguenti isomorfismi tra fibrati

$$(\pi_1^*\Upsilon_k \rightarrow \Sigma_k)|_{\Sigma_k^H} \cong (\pi_1^*\text{Hom}(\xi, \eta^\perp) \rightarrow \Sigma_k)|_{\Sigma_k^H} \cong (\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon) \rightarrow \Sigma_k^H)$$

$$(p_1^*\pi_2^*\xi \rightarrow \pi_1^*\Upsilon_k)|_{\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)} \cong (p_2^*\ker \varepsilon \rightarrow \text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon))$$

$$\begin{aligned}
 (p_1^* \pi_2^* \xi^\perp \rightarrow \pi_1^* \Upsilon_k)|_{\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)} &\cong (p_2^* \text{Im } \varepsilon \rightarrow \text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)) \\
 (p_1^* \pi_2^* \eta \rightarrow \pi_1^* \Upsilon_k)|_{\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)} &\cong (p_2^* \text{Im } \varepsilon \rightarrow \text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)) \\
 (p_1^* \pi_2^* \eta^\perp \rightarrow \pi_1^* \Upsilon_k)|_{\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)} &\cong (p_2^* \text{coker } \varepsilon \rightarrow \text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon)).
 \end{aligned}$$

Otteniamo dunque che

$$\text{Res}_k(\omega) = (p_2)_* \Phi(\Omega^{p_2^* \text{Im } \varepsilon \oplus p_1^* U_k}). \quad (3.37)$$

Se chiamiamo

$$\pi_k : Gr(k, \ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H} \oplus \text{coker } \varepsilon|_{\Sigma_k^H}) \rightarrow \Sigma_k^H$$

la compattificazione di

$$p_2 : \text{Hom}(\ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H}, \text{coker } \varepsilon|_{\Sigma_k^H}) \rightarrow \Sigma_k^H$$

otteniamo, ricordando la Proposizione 3.15,

$$\text{Res}_k(\omega) = (\pi_k)_* \Phi(\Omega^{\pi_k^* \text{Im } \varepsilon \oplus U_k}), \quad (3.38)$$

dove $U_k \rightarrow Gr(k, \ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H} \oplus \text{coker } \varepsilon|_{\Sigma_k^H})$ è il fibrato tautologico dei k -piani.

Calcoliamo infine i $\text{Res}'_k(\omega)$:

$$\text{Res}'_k(\omega) = \pi_2^* \{(\pi_1)_* \omega\} = (p_1)_* p_2^* \omega$$

Ricordando la (3.24), vediamo che nella carta $\text{Hom}(E, F)$, $(p_1)_* \equiv 0$ se $k < m$, e $(p_1)_* = Id$ se $k = m$, e dunque, se $k < m$, abbiamo subito che

$$\text{Res}'_k(\omega) = 0. \quad (3.39)$$

Inoltre, ragionando come per Υ_k , vediamo che $U|_{\Sigma_k} \cong \pi_1^* \xi \oplus V_{m-k}$, dove V_{m-k} è il fibrato tautologico su $Gr(m-k, \eta \oplus \xi^\perp)$.

Ora, chiaramente se $k = m$, $V_{m-k} = V_0 = 0$, mentre, su $\text{Hom}(E, F)$,

$$(\pi_1^* \Upsilon_k \rightarrow \Sigma_m)|_{\Sigma_m^H} \cong (\text{Hom}(\ker \varepsilon, \text{coker } \varepsilon) \rightarrow \Sigma_m^H) \cong \text{Hom}(E, F)$$

$$(p_2^* \pi_1^* \xi \rightarrow \pi_1^* \Upsilon_k)|_{\Sigma_m^H} \cong (p_2^* \ker \varepsilon \rightarrow \pi_1^* \Upsilon_k)|_{\Sigma_m^H} \cong (\pi^* E \rightarrow \text{Hom}(E, F)).$$

Dunque

$$\text{Res}'_m(\omega) = (p_1)_* p_2^* \Phi(\Omega^{\pi_1^* \xi}) = \Phi(\Omega^{p_2^* \pi_1^* \xi}) = \Phi(\Omega^{p_2^* \ker \varepsilon}) = \Phi(\Omega^{\pi^* E}). \quad (3.40)$$

Consideriamo ora il fibrato U^\perp : se chiamiamo $\omega := \Phi(\Omega^{U^\perp})$ con ragionamenti analoghi a quelli fatti per U troviamo che

$$U^\perp|_{\Upsilon_k} \cong \xi^\perp \oplus U_k^\perp,$$

$$U^\perp|_{\Sigma_k} \cong \eta^\perp \oplus V_{m-k}^\perp,$$

$$\text{Res}_k(\omega) = (\pi_k)_* \Phi(\Omega^{\pi_k^* (\ker \varepsilon)^\perp \oplus U_k^\perp}), \quad (3.41)$$

$$\text{Res}'_m(\omega) = \Phi(\Omega^{\pi^* F}), \quad (3.42)$$

$$\text{Res}'_k(\omega) = 0 \quad \text{se } k < m. \quad (3.43)$$

Siamo quindi giunti al

Teorema 3.17 *Siano $E \rightarrow X$ e $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali complessi, con $\text{rank}E \leq \text{rank}F$ e sia Φ un polinomio invariante. Allora per ogni scelta di connessioni su E ed F , esiste una corrente flat T su $\text{Hom}(E, F)$, tale che valga l'uguaglianza tra correnti su $\text{Hom}(E, F)$*

$$\Phi(\Omega^{\pi^*E}) = \sum_{k=0}^m \text{Res}_{\Phi,k}[\Sigma_k^H] + \partial T \quad (3.44)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k} = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi^* \text{Im} \varepsilon|_{\Sigma_k^H \oplus U_k}} \right) \quad (3.45)$$

dove $\varepsilon : \pi^*E \rightarrow \pi^*F$ è il morfismo tautologico su $\text{Hom}(E, F)$, $\pi_k : G_k \rightarrow \Sigma_k^H$, $G_k = \text{Gr}(k, \ker \varepsilon|_{\Sigma_k^H} \oplus \text{coker} \varepsilon|_{\Sigma_k^H})$ e $U_k \rightarrow G_k$ è il fibrato tautologico.

Inoltre esiste una corrente flat T' su $\text{Hom}(E, F)$ tale che valga l'uguaglianza tra correnti su $\text{Hom}(E, F)$

$$\Phi(\Omega^{\pi^*F}) = \sum_{k=0}^m \text{Res}_{\Phi,k}^\perp[\Sigma_k^H] + \partial T' \quad (3.46)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k}^\perp = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi^*(\ker \varepsilon)^\perp|_{\Sigma_k^H \oplus U_k^\perp}} \right). \quad (3.47)$$

Dimostrazione

Nel Teorema 3.16 poniamo $\omega = \Phi(\Omega^U)$, dove U è il fibrato tautologico su G . Grazie al Teorema 1.14, $d\omega = 0$. Chiamata $T = \mathbf{T}(\omega)$, la (3.36) si legge

$$\partial T = \mathbf{\Gamma}_\infty(\omega) - \mathbf{\Gamma}_0(\omega)$$

e usando le (3.33), (3.34),

$$\partial T = \sum_{k=0}^m \text{Res}'_k(\omega)[\Upsilon_k] - \sum_{k=0}^m \text{Res}_k(\omega)[\Sigma_k].$$

Ora ci restringiamo a $\text{Hom}(E, F)$, usando le (3.23), (3.38), (3.39) e (3.40), abbiamo

$$\partial T = \Phi(\Omega^{\pi^*E}) - \sum_{k=0}^m \text{Res}_{\Phi,k}[\Sigma_k^H].$$

Per la seconda parte, consideriamo $\omega = \Phi(\Omega^{U^\perp})$ e ragioniamo come prima, usando le (3.41), (3.42) e (3.43). \square

Notiamo infine che il caso $\text{rank}E > \text{rank}F$ segue dal Teorema 3.17 applicato alla mappa trasposta

$$\varepsilon^* : (\pi^*F)^* \rightarrow (\pi^*E)^*.$$

3.6 La formula di MacPherson nel caso normale

Sia X una varietà reale, connessa, orientabile, $\dim_{\mathbf{R}} X = \nu$ e siano E ed F due fibrati vettoriali complessi su X , di rango m ed n rispettivamente. Supponiamo di avere $\alpha : E \rightarrow F$, morfismo di fibrati normale e come già detto, chiamiamo

$$\Sigma_k(\alpha) = \{x \in X \mid \dim \ker \alpha_x = k\}.$$

Abbiamo già visto che le $\Sigma_k(\alpha)$ sono sottovarietà lisce di M , con fibrato normale isomorfo a

$$\text{Hom}(\ker \alpha, \text{coker } \alpha)$$

(Proposizione 2.2). Inoltre

$$\text{codim}_X \Sigma_k(\alpha) = \text{codim}_{\text{Hom}(E,F)} \Sigma_k^H = k(n - m + k). \quad (3.48)$$

Abbiamo anche dato alle $\Sigma_k(\alpha)$ un'orientazione canonica (vedi (2.2)) quindi risulta ben definita la corrente $[\Sigma_k(\alpha)]$ di integrazione su $\Sigma_k(\alpha)$.

Prendiamo $x_0 \in X$, tale che $\alpha_{x_0} \in \Sigma_k^H$ e chiamiamo $z_0 = \pi_1(x_0) \in F_k$. Consideriamo il fibrato vettoriale $H_k \rightarrow F_k$, dove

$$H_k = \text{Hom}(\xi, \eta^\perp) \oplus \text{Hom}(\eta, \xi^\perp)$$

e consideriamo la mappa $j : H_k \rightarrow G$ data da $j(a, b) = \text{Graph}(a) \oplus \text{Graph}(b)$. Prendiamo un intorno $V = \{(v, a, b) \in H_k \mid v \in X, |a| < 1, |b| < 1\}$ della sezione nulla di H_k ; tramite j , esso va diffeomorficamente su un intorno di F_k in G . In questo intorno, il flusso φ_s ha la forma

$$\varphi_s(a, b) = \left(\frac{a}{s}, sb \right).$$

Ora su V l'insieme

$$T = \{(\varphi_t(P), P) \mid P \in G, 0 < t < \infty\}$$

ha la forma

$$T \cap (V \times V) = \{(a, tb, ta, b) \mid |a|, |b| < 1, 0 < s < 1\}$$

ed il suo bordo è

$$\partial\{T \cap (V \times V)\} = \{(a, 0, 0, b) \mid |a|, |b| < 1\} \cong \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k$$

da cui $\Gamma_0 = [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k]$ vicino ad F_k , che completa la dimostrazione della Proposizione 3.9.

Supponiamo che su V ci siano banalizzazioni

$$\begin{aligned}\xi|_V &\cong V \times \mathbf{C}^k \\ \eta|_V &\cong V \times \mathbf{C}^{m-k}\end{aligned}$$

e dunque

$$H_k|_V \cong V \times \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{n-m+k}) \times \text{Hom}(\mathbf{C}^{m-k}, \mathbf{C}^{m-k})$$

allora su V , $\alpha_{x_0} \cong (z_0, 0, b_0)$ per qualche $b_0 \in \text{Hom}(\mathbf{C}^{m-k}, \mathbf{C}^{m-k})$ che, a meno di omotetia, possiamo supporre abbia $|b_0| < 1$.

Allora V contiene sia z_0 che α_{x_0} e in V ,

$$\Sigma_k^H \cong V \times \{0\} \times \text{Hom}(\mathbf{C}^{m-k}, \mathbf{C}^{m-k}).$$

Ma α_{x_0} è trasversa a Σ_k^H , dunque esiste un aperto W in X , contenente x_0 , con coordinate

$$(y, a) \in \mathbf{R}^N \times \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{n-m+k}),$$

dove $N = \nu - 2k(n - m + k)$, tali che

$$\alpha(y, a) = (v(y), a, b(y)). \quad (3.49)$$

In W , $a = 0$ corrisponde alla sottovarietà $\Sigma_k(\alpha)$ ed inoltre, se $l \leq k$,

$$\Sigma_l(\alpha) = \mathbf{R}^N \times \{a \in \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{n-m+k}) \mid \dim \ker a = l\} \cong \mathbf{R}^N \times \Sigma_l^H.$$

Dunque, nel caso normale, le $\Sigma_k(\alpha)$ sono localmente di volume finito in X , perché questo vale per le Σ_k^H .

Sopra a $\Sigma_k(\alpha)$ ci sono i fibrati vettoriali $\ker \alpha \subset E$, $\text{coker } \alpha \subset F$, $\text{Im } \alpha \subset F$ e ricordiamo che indichiamo con G il fibrato su X di fibra $Gr(m, E \oplus F)$.

Definizione 3.18 *Una sezione α di $\text{Hom}(E, F)$ si dice geometricamente atomica, se il sottoinsieme*

$$T_\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{t} \alpha_x, \alpha_x \right) \in G \oplus G \mid x \in X, 0 < t < \infty \right\}$$

ha misura $(\nu + 1)$ -dimensionale localmente finita in $G \oplus G$.

Questo significa che per ogni compatto $K \subset X$, richiediamo che

$$T_{K, \alpha} = \left\{ \left(\frac{1}{t} \alpha_x, \alpha_x \right) \in G \oplus G \mid x \in K, 0 < t < \infty \right\}$$

abbia misura $(\nu + 1)$ -dimensionale finita.

Proposizione 3.19 *Ogni morfismo normale è geometricamente atomico.*

Dimostrazione

Prendiamo $x_0 \in \Sigma_k(\alpha)$ e coordinate su un aperto $x_0 \in W$ di X come sopra e coordinate su un aperto $\alpha_{x_0} \in V$ di G come sopra. Prendiamo un compatto $K \subset W$ e consideriamo

$$T_{K,\alpha} = \left\{ \left(v(y), \frac{1}{t}a, tb(y), v(y), a, b(y) \right) \mid y \in K, 0 < t < \infty \right\}.$$

Essendo $G \oplus G$ compatta, basta mostrare che esso ha volume localmente finito ed in particolare basta mostrare che

$$\left\{ \left(v(y), \frac{1}{t}a, tb(y), v(y), a, b(y) \right) \mid y \in K, 0 < t \leq 1 \right\}$$

ha volume finito. Ma esso ha volume minore o uguale a quello di

$$\left\{ \left(v(y), \frac{1}{t}a, b(y), v(y), a, b(y) \right) \mid y \in K, 0 < t \leq 1 \right\}$$

che è prodotto di un compatto e dell'immagine della mappa algebrica $(s, a) \mapsto (\frac{a}{s}, a)$ che ha volume localmente finito grazie al Teorema 1.37. \square

Definiamo ora

$$T_{\alpha,s,s'} = \left\{ \left(\frac{1}{t}\alpha_x, \alpha_x \right) \in G \oplus G \mid x \in X, s < t < s' \right\}$$

e osserviamo che, come nella Proposizione 3.1, se α è geometricamente atomica esiste il

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow \infty}} T_{\alpha,s,s'} = T_\alpha$$

nello spazio delle correnti su $G \oplus G$ e che

$$\partial T_\alpha = \partial \left(\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow \infty}} T_{\alpha,s,s'} \right) = \lim_{s' \rightarrow \infty} [\Gamma_{\alpha,s'}] - \lim_{s \rightarrow 0} [\Gamma_{\alpha,s}] = \Gamma_{\alpha,\infty} - \Gamma_{\alpha,0} \quad (3.50)$$

dove abbiamo posto

$$\Gamma_{\alpha,s} = \left\{ \left(\frac{1}{s}\alpha_x, \alpha_x \right) \in G \oplus G \mid x \in X \right\}.$$

Chiamiamo $pr_1, pr_2 : G \oplus G \rightarrow G$ le due proiezioni sui fattori, $p : G \rightarrow X$ la proiezione del fibrato e definiamo gli operatori dallo spazio delle forme su $G \oplus G$ a quello delle correnti su X

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_{\alpha,s}(\omega) &= p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [\Gamma_{\alpha,s}] \} \\ \mathbf{\Gamma}_{\alpha,0}(\omega) &= p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge \Gamma_{\alpha,0} \} \\ \mathbf{\Gamma}_{\alpha,\infty}(\omega) &= p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge \Gamma_{\alpha,\infty} \} \\ \mathbf{T}_{\alpha,s,s'}(\omega) &= (-1)^{\deg \omega} p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge T_{\alpha,s,s'} \} \\ \mathbf{T}_\alpha(\omega) &= (-1)^{\deg \omega} p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge T_\alpha \}. \end{aligned}$$

Proposizione 3.20 *Chiamiamo $\beta : X \rightarrow G$ la composizione della sezione $\tilde{\alpha}$ di $\text{Hom}(E, F)$ con l'inclusione $\text{Hom}(E, F) \hookrightarrow G$. Allora valgono le seguenti formule:*

$$\Gamma_{\alpha, s}(\omega) = \beta^* \varphi_s^*(\omega) \quad (3.51)$$

$$\{d \circ \mathbf{T}_{\alpha, s, s'} + \mathbf{T}_{\alpha, s, s'} \circ d\}(\omega) = \beta^* \varphi_{s'}^* \omega - \beta^* \varphi_s^* \omega \quad (3.52)$$

$$\Gamma_{\alpha, 0}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \beta^* \varphi_s^* \omega \quad (3.53)$$

$$\Gamma_{\alpha, \infty}(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} \beta^* \varphi_s^* \omega \quad (3.54)$$

$$d\mathbf{T}_\alpha(\omega) + \mathbf{T}_\alpha(d\omega) = \Gamma_{\alpha, \infty}(\omega) - \Gamma_{\alpha, 0}(\omega). \quad (3.55)$$

dove φ_s è il flusso su G definito dalla (3.2).

Dimostrazione

Chiamiamo $j : G \rightarrow G \oplus G$ la mappa $j(P) = (\varphi_s(P), P)$ e notiamo che

$$pr_1 \circ j \circ \beta = \varphi_s \circ \beta$$

$$p \circ pr_2 \circ j \circ \beta = Id_X,$$

e che $j \circ \beta : X \rightarrow \Gamma_{\alpha, s}$ è un diffeomorfismo. Presa ψ forma su X calcoliamo

$$\begin{aligned} & \langle p_*(pr_2)_* \{ (pr_1^* \omega) \wedge [\Gamma_{\alpha, s}] \}, \psi \rangle \\ &= \langle [\Gamma_{\alpha, s}], pr_1^* \omega \wedge pr_2^* p^* \psi \rangle = \int_{\Gamma_{\alpha, s}} pr_1^* \omega \wedge pr_2^* p^* \psi \\ &= \int_X (j \circ \beta)^* pr_1^* \omega \wedge (j \circ \beta)^* pr_2^* p^* \psi = \int_X (\varphi_s \circ \beta)^* \omega \wedge \psi = \langle \beta^* \varphi_s^* \omega, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Questo dimostra la (3.51). La dimostrazione della (3.52) è analoga a quella della (3.16).

Per le (3.53), (3.54) ragioniamo come nella Proposizione 3.5: abbiamo detto che esistono i

$$\lim_{s \rightarrow 0} [\Gamma_{\alpha, s}] = \Gamma_{\alpha, 0}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\Gamma_{\alpha, s}] = \Gamma_{\alpha, \infty}$$

in massa e dunque possiamo passare al limite nella (3.51) ed ottenere le (3.53) e (3.54).

Infine passando al limite nella (3.52) otteniamo la (3.55). \square

Teorema 3.21 *Siano $E \rightarrow X$ e $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali complessi, con $\text{rank} E \leq \text{rank} F$, sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo normale, e sia Φ un polinomio invariante. Allora per ogni scelta di connessioni su E ed F , esiste una corrente flat T su X , tale che valga l'uguaglianza tra correnti su X*

$$\Phi(\Omega^E) = \sum_{k=0}^m \text{Res}_{\Phi,k}[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T \quad (3.56)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k} = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi_k^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k} \right) \quad (3.57)$$

dove $\pi_k : G_k \rightarrow \Sigma_k(\alpha)$, $G_k = \text{Gr}(k, \ker \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus \text{coker } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)})$ e $U_k \rightarrow G_k$ è il fibrato tautologico.

Inoltre esiste una corrente flat T' su X tale che valga l'uguaglianza tra correnti su X

$$\Phi(\Omega^F) = \sum_{k=0}^m \text{Res}_{\Phi,k}^{\perp}[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T' \quad (3.58)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k}^{\perp} = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi_k^* (\ker \alpha)^{\perp}|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k^{\perp}} \right). \quad (3.59)$$

Dimostrazione

Abbiamo visto (Proposizione 3.19) che α è geometricamente atomica, dunque presa $\omega = \Phi(\Omega^U)$, dove $U \rightarrow G$ è il fibrato tautologico, possiamo applicare la (3.55) e ricordando che $d\omega = 0$, otteniamo

$$\partial T = \Gamma_{\alpha,\infty}(\omega) - \Gamma_{\alpha,0}(\omega),$$

dove $T = \mathbf{T}_{\alpha}(\omega)$.

Prendiamo su $W \subset X$ le coordinate descritte nella (3.49),

$$(y, a) \in \mathbf{R}^N \times \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^{n-m+k})$$

($N = \nu - 2k(n - m + k)$) nelle quali $\Sigma_k(\alpha) \cong \mathbf{R}^N \times \Sigma_k^H$. Allora in $G \oplus G|_W$,

$$\Gamma_{\alpha,s} = \left\{ (\varphi_s \alpha(y, a), \alpha(y, a)) = \left(v(y), \frac{1}{s} a, sb(y), v(y), a, b(y) \right) \mid (y, a) \in U \right\}$$

da cui su W ,

$$\Gamma_{\alpha,s} \cong \mathbf{R}^N \times \Gamma_s$$

dove Γ_s è definita dalla (3.8). Dunque, con ovvia notazione,

$$\Gamma_{\alpha,0} \cong \mathbf{R}^N \times \Gamma_0$$

$$\Gamma_{\alpha,\infty} \cong \mathbf{R}^N \times \Gamma_{\infty}.$$

Quindi possiamo applicare pari pari l'analisi di Γ_0 e Γ_∞ fatta nel caso universale e concludere.

Analogamente per $\omega = \Phi(\Omega^{U^\perp})$ □

Osservazione

Potrebbe sorgere il dubbio su quale connessione mettere sul fibrato

$$\pi_k^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k$$

per calcolare $\text{Res}_{\Phi,k}$. In effetti la domanda è irrilevante, in quanto, grazie al Teorema 1.14, ogni scelta di connessione cambia $\text{Res}_{\Phi,k}$ per un bordo, che possiamo dunque includere in ∂T nella formula (3.56).

È dunque lecito supporre che la connessione su $\pi_k^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k$ sia la connessione somma delle connessioni sui due fattori e dunque possiamo supporre

$$\text{Res}_{\Phi,k} = \int_{\pi_k} \Phi(\Omega^{\pi_k^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k}). \quad (3.60)$$

3.7 La formula di MacPherson nel caso analitico reale

Vogliamo ora dimostrare una formula di MacPherson locale nel caso in cui il morfismo α sia analitico reale.

Cominciamo con la

Proposizione 3.22 *Ogni morfismo analitico reale è geometricamente atomico.*

Dimostrazione

La chiusura della sottovarietà

$$\mathcal{T}_\alpha = \left\{ \left(t, \frac{1}{t} \alpha_x, \alpha_x \right) \in \mathbf{R} \times G \oplus G \mid x \in X, 0 < t < \infty \right\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times G \oplus G$$

è una sottovarietà analitica di $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times G \oplus G$ di dimensione $\nu + 1$ e dunque ha misura $(\nu + 1)$ -dimensionale localmente finita. Ne consegue che anche l'immagine $T_\alpha = pr_* \llbracket \mathcal{T}_\alpha \rrbracket$ ha questa proprietà, dove $pr : \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times G \oplus G \rightarrow G \oplus G$ è la proiezione. □

Abbiamo visto che se α è normale, allora $\dim_{\mathbf{R}} \Sigma_k(\alpha) = \nu_k = \nu - 2k(n - m + k)$. Se invece α è analitica reale, allora $\Sigma_k(\alpha)$ è un sottoinsieme analitico di M , di dimensione μ_k , a priori diversa da ν_k . Sappiamo che allora $\Sigma_k(\alpha)$ ha misura di Hausdorff μ_k -dimensionale localmente finita ed abbiamo visto

nel Teorema 1.58 che l'integrazione sopra i suoi punti regolari definisce una corrente $[\Sigma_k(\alpha)]$ di dimensione μ_k .

Lemma 3.23 *Sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo analitico reale e $\Gamma_{\alpha,0}$ è la corrente definita dalla (3.50), allora*

$$\text{Supp}(\Gamma_{\alpha,0}) \subset \bigcup_k \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha),$$

$$\text{Supp}(\Gamma_{\alpha,\infty}) \subset \bigcup_k \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k(\alpha),$$

dove

$$\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha) = \{(x, P, Q) \in X \times \Upsilon_k \times \Sigma_k \mid p(P) = p(Q) = x, \pi_2(P) = \pi_1(Q)\},$$

$$\Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k(\alpha) = \{(x, P, Q) \in X \times \Sigma_k \times \Upsilon_k \mid p(P) = p(Q) = x, \pi_1(P) = \pi_2(Q)\}.$$

Dimostrazione

Il ragionamento è analogo a quello della Proposizione 3.9.

Prendiamo $x \in \Sigma_k(\alpha)$ e consideriamo delle banalizzazioni di E ed F su un aperto U contenente x , in modo che

$$G \oplus G|_U \cong U \times G_m \times G_m$$

con $G_m = Gr(m, E \oplus F)$. Se $(P', P) \in \text{Supp}(\Gamma_\infty)$ allora esistono $\{x_j\} \subset X$, $x_j \rightarrow x$ ed esistono $\{t_j\} \subset \mathbf{R}$ con $t_j \rightarrow \infty$ tali che

$$\gamma_j = \text{Graph}(\alpha_{x_j}) \rightarrow P$$

$$\gamma'_j = \text{Graph}\left(\frac{1}{t_j} \alpha_{x_j}\right) = \varphi_{t_j} \gamma_j \rightarrow P'.$$

Sia $L(\gamma_j, \gamma'_j)$ la linea orientata del flusso di φ_t che parte da γ_j e finisce in γ'_j . Allora, ricordando che nella dimostrazione della Proposizione 3.22 avevamo visto che il grafico totale del flusso \mathcal{T}_α aveva volume localmente finito, abbiamo che le lunghezze di $L(\gamma_j, \gamma'_j)$ sono equilimitate e dunque per compattezza una sottosuccessione di esse converge ad una curva liscia a tratti $L(P, P')$, che è di flusso nei tratti lisci e che unisce P e P' .

Ora il fatto che $t_j \rightarrow \infty$ implica che $L(P, P')$ passa per almeno un punto fisso del flusso, ovvero esiste un k tale che $L(P, P')$ passi per F_k , nel punto $Q = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s(P)$. Come nella dimostrazione della Proposizione 3.9 abbiamo che $Q = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s(P')$, e grazie al Corollario 3.8, $P \in \Upsilon_k$ e $P' \in \Sigma_k$, con $\pi_2(P) = \pi_1(P')$, da cui $(x, P', P) \in \Sigma_k \times_{F_k} \Upsilon_k(\alpha)$. \square

Supponiamo ora che $\mu_k \leq \nu_k$ per ogni k . Questo significa che le singolarità di α hanno dimensione non più grande di quella del caso normale e sarà l'ipotesi essenziale per il resto della sezione. Allora vale il

Teorema 3.24 *Siano $E \rightarrow X$ e $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali complessi, con $\text{rank}E \leq \text{rank}F$, sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo analitico reale, con $\mu_k \leq \nu_k$ per ogni k e sia Φ un polinomio invariante. Allora esistono delle funzioni $n_k : \Sigma_k(\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}$, costanti su ogni componente irriducibile, tali che, per ogni scelta di connessioni su E ed F , esiste una corrente flat T su X e vale l'uguaglianza tra correnti su X*

$$\Phi(\Omega^E) = \sum_{k=0}^m n_k \text{Res}_{\Phi,k}[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T \quad (3.61)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k} = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi_k^* \text{Im} \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k} \right) \quad (3.62)$$

dove $\pi_k : G_k \rightarrow \Sigma_k(\alpha)$, $G_k = \text{Gr}(k, \ker \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus \text{coker} \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)})$ e $U_k \rightarrow G_k$ è il fibrato tautologico.

Inoltre esiste una corrente flat T' su X tale che valga l'uguaglianza tra correnti su X

$$\Phi(\Omega^F) = \sum_{k=0}^m n_k \text{Res}_{\Phi,k}^\perp[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T' \quad (3.63)$$

$$\text{Res}_{\Phi,k}^\perp = \int_{\pi_k} \Phi \left(\Omega^{\pi_k^* (\ker \alpha)^\perp|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k^\perp} \right). \quad (3.64)$$

Dimostrazione

Come nella dimostrazione del Teorema 3.21, è sufficiente calcolare

$$\mathbf{\Gamma}_{\alpha,0}(\omega)$$

dove $\omega = \Phi(\Omega^U)$ oppure $\omega = \Phi(\Omega^{U^\perp})$.

Ma ora $\dim\{\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha)\} \leq \nu = \dim \Gamma_{\alpha,0}$, e $d\Gamma_{\alpha,0} = 0$, dunque grazie al Teorema 1.56,

$$\Gamma_{\alpha,0} = \sum_{k=0}^m n_k [\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha)]$$

per qualche funzione $n_k : \Sigma_k \rightarrow \mathbf{Z}$, costante su ogni componente irriducibile e che vale 0 sulle componenti di dimensione $< \nu_k$, a causa del Teorema 1.55. Notiamo che $n_0 \equiv 1$, perchè α è sempre trasversa a Σ_0^H . Il ragionamento si conclude come nel Teorema 3.17. \square

3.8 La formula di MacPherson nel caso olomorfo

Se supponiamo ora che X sia una varietà complessa, $\dim_{\mathbf{C}} X = \nu$, $E \rightarrow X$, $F \rightarrow X$ siano fibrati vettoriali olomorfi, ed $\alpha : E \rightarrow F$ sia un morfismo olomorfo, vogliamo applicare i risultati delle sezioni precedenti per avere

delle formule di MacPherson locali.

È chiaro che se supponiamo che α sia normale, possiamo applicare semplicemente il Teorema 3.21 ed ottenere quindi la formula voluta.

Notiamo che le sottovarietà $\Sigma_k(\alpha)$ essendo sottovarietà complesse, hanno una naturale orientazione, che coincide con l'orientazione data dalla (2.2): infatti basta dimostrare nel caso in cui i fibrati $T\Sigma_k(\alpha)$ ed N della (2.2) siano complessi ed abbiano l'orientazione complessa canonica, allora l'orientazione somma su $TX|_{\Sigma_k(\alpha)}$ coincide con quella complessa.

Per vedere ciò prendiamo un frame $e_1, ie_1, \dots, e_a, ie_a$ per $T\Sigma_k(\alpha)$ ed uno $f_1, if_1, \dots, f_b, if_b$ per N , ed orientiamoli con le forme

$$e_1 \wedge ie_1 \wedge \dots \wedge e_a \wedge ie_a \quad e \quad f_1 \wedge if_1 \wedge \dots \wedge f_b \wedge if_b.$$

Allora l'orientazione somma su $TX|_{\Sigma_k(\alpha)} \cong T\Sigma_k(\alpha) \oplus N$ è data dalla forma

$$e_1 \wedge ie_1 \wedge \dots \wedge e_a \wedge ie_a \wedge f_1 \wedge if_1 \wedge \dots \wedge f_b \wedge if_b,$$

che è esattamente quella associata all'orientazione complessa canonica.

Ci serve ora la seguente

Proposizione 3.25 *Ogni morfismo olomorfo è geometricamente atomico.*

Dimostrazione

Il ragionamento è esattamente lo stesso della Proposizione 3.22, perché il Teorema 1.37 continua a valere. □

Corollario 3.26 *Il Teorema 3.24 vale sotto le ipotesi che α sia olomorfo e $\mu_k \leq \nu_k$ per ogni k .*

Consideriamo infine il caso di un morfismo olomorfo qualunque. Per definizione esso è sempre trasverso a Σ_0^H , quindi come nel Teorema 3.21 localmente $\Sigma_0(\alpha) \cong \mathbf{R}^\nu \times \Sigma_0^H$. Quindi

$$\Gamma_{\alpha,0} = [\Upsilon_0 \times_{F_0} \Sigma_0(\alpha)] + \Xi,$$

dove Ξ è una corrente intera rettificabile, flat, e con supporto in

$$\bigcup_{k>0} \Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha).$$

In generale Ξ non si esprimerà come somma di $[\Upsilon_k \times_{F_k} \Sigma_k(\alpha)]$ a coefficienti interi, perché queste sottovarietà possono avere dimensione più grande di ν .

In ogni caso restringendoci a $\text{Hom}(E, F)$ e ragionando come nel Teorema 3.17 otteniamo il

Teorema 3.27 *Siano $E \rightarrow X$ e $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali complessi, con $\text{rank} E \leq \text{rank} F$, sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo olomorfo, e sia Φ un polinomio invariante. Allora per ogni scelta di connessioni su E ed F , esistono correnti flat T, Ξ_Φ su X , con $\text{Supp } \Xi_\Phi \subset \bigcup_{k>0} \Sigma_k(\alpha)$, tali che valga l'uguaglianza tra correnti su X*

$$\Phi(\Omega^E) = \text{Res}_{\Phi,0}[\llbracket \Sigma_0(\alpha) \rrbracket] + \Xi_\Phi + \partial T \quad (3.65)$$

$$\text{Res}_{\Phi,0} = \Phi \left(\Omega^{\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}} \right). \quad (3.66)$$

Inoltre esistono correnti flat T', Ξ'_Φ su X , con $\text{Supp } \Xi'_\Phi \subset \bigcup_{k>0} \Sigma_k(\alpha)$, tali che valga l'uguaglianza tra correnti su X

$$\Phi(\Omega^F) = \text{Res}_{\Phi,0}^\perp[\llbracket \Sigma_0(\alpha) \rrbracket] + \Xi'_\Phi + \partial T' \quad (3.67)$$

$$\text{Res}_{\Phi,0}^\perp = \Phi \left(\Omega^{(\ker \alpha)^\perp|_{\Sigma_0(\alpha)}} \right). \quad (3.68)$$

Dimostrazione

Dobbiamo solo calcolare $\text{Res}_{\Phi,0}$ e $\text{Res}_{\Phi,0}^\perp$. Per trovare $\text{Res}_{\Phi,0}$ dobbiamo considerare la Grassmanniana degli 0-piani in $\ker \alpha \oplus \text{coker } \alpha$ su $\Sigma_0(\alpha)$, che è un fibrato banale di rango 0. Inoltre U_0 è pure un fibrato banale di rango 0, dunque

$$\text{Res}_{\Phi,0} = \int_{\pi_0} \Phi(\pi_0^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}) = \Phi(\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}).$$

Per calcolare $\text{Res}_{\Phi,0}^\perp$ dobbiamo considerare la Grassmanniana degli 0-piani in $\ker \alpha \oplus \text{coker } \alpha$ su $\Sigma_0(\alpha)$, che è un fibrato banale di rango 0. Inoltre U_0^\perp è pure un fibrato banale di rango 0, dunque

$$\text{Res}_{\Phi,0}^\perp = \int_{\pi_0} \Phi(\pi_0^* (\ker \alpha)^\perp|_{\Sigma_0(\alpha)}) = \Phi((\ker \alpha)^\perp|_{\Sigma_0(\alpha)}).$$

□

Abbiamo quindi due formule di MacPherson locali per morfismi olomorfi, che valgono se il morfismo è normale, oppure se le singolarità sono piccole. Abbiamo inoltre un teorema di localizzazione generale, che non dà informazioni sui residui. Nel prossimo capitolo studieremo le applicazioni di queste formule alle foliazioni olomorfe.

3.9 Calcolo di alcuni residui

In questa sezione calcoleremo esplicitamente alcuni residui e daremo un algoritmo generale.

Supponiamo di avere $E \rightarrow X$, $F \rightarrow X$ due fibrati vettoriali complessi su una varietà reale compatta, connessa ed orientata X . Supponiamo inoltre che $\text{rank} E = 1$, $\text{rank} F = n$, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$ e sia $\alpha : E \rightarrow F$ un morfismo normale. Allora gli unici $\Sigma_k(\alpha)$ non vuoti sono

$$\Sigma_0(\alpha) = \{x \in X \mid \alpha_x \text{ iniettivo}\}$$

$$\Sigma_1(\alpha) = \{x \in X \mid \alpha_x = 0\}$$

ed hanno dimensione $2n$ e 0 rispettivamente. Dunque il morfismo α è iniettivo al di fuori di un numero finito di punti.

Dato un polinomio invariante φ di grado l , calcoliamo $\text{Res}_{\varphi,k}$ per $k = 0, 1$. Notiamo che, poiché E ha rango 1, dobbiamo necessariamente avere $\varphi = c_1^l$ affinché $\varphi(E)$ non sia zero. Inoltre poiché $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$, dobbiamo avere anche $l \leq n$.

Ricordiamo che

$$\text{Res}_{\varphi,k} = \int_{\pi_k} \varphi(\pi_k^* \text{Im } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus U_k),$$

dove $\pi_k : G_k \rightarrow \Sigma_k(\alpha)$, $G_k = \text{Gr}(k, \ker \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)} \oplus \text{coker } \alpha|_{\Sigma_k(\alpha)})$ e $U_k \rightarrow G_k$ è il fibrato tautologico.

Abbiamo visto nel Teorema 3.27 che

$$\text{Res}_{\varphi,0} = \varphi(\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}).$$

Per calcolare $\text{Res}_{\varphi,1}$ invece dobbiamo integrare lungo le fibre di π_1 una forma differenziale di grado $2l$, ma le fibre di $G_1 = \mathbf{P}(\ker \alpha \oplus \text{coker } \alpha)$ hanno dimensione reale $1(2n - 1 + 1) = 2n$ dunque affinché il risultato non sia zero ci vuole che $l = n$. Dunque in questo caso l'unico polinomio invariante che può produrre un risultato non nullo è c_1^n . Calcoliamo dunque $\text{Res}_{c_1^n,1}$:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{c_1^n,1} &= \int_{\pi_1} c_1^n(\pi_1^* \text{Im } \alpha \oplus U_1) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_{\pi_1} \pi_1^* c_1^j(\text{Im } \alpha) \wedge c_1^{n-j}(U_1) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} c_1^j(\text{Im } \alpha) \int_{\pi_1} c_1^{n-j}(U_1) = \binom{n}{0} c_1^0(\text{Im } \alpha) \int_{\pi_1} c_1^n(U_1) \end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la formula di Whitney (1.5), nella terza la formula push-pull (2.3) e nella quarta il fatto che $(\pi_1)_*$ diminuisce il grado di $2n$. Dunque $\text{Res}_{c_1^n,1} = \int_{\pi_1} c_1^n(U_1)$. Per calcolare questa integrazione lungo le fibre, notiamo che è sufficiente calcolarla nel caso in cui X sia un punto, e quindi $G_1 \cong \mathbf{CP}^n$ e U_1 sia il fibrato tautologico U su

\mathbf{CP}^n : infatti il risultato è una 0-forma chiusa e dunque una costante. Ora per calcolare $\int_{\mathbf{CP}^n} c_1^n(U)$ basta ricordarsi che nell'identificazione

$$H^2(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$$

$c_1(U)$ corrisponde a -1 (si veda per esempio [17] II.2.16) e ricordare la struttura di prodotto sull'anello $H^*(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Z})$ (si veda per esempio [10] 3.12) per dedurre che $\int_{\mathbf{CP}^n} c_1^n(U) = (-1)^n$. Dunque

$$\text{Res}_{c_1^n, 1} = (-1)^n.$$

In questo caso quindi la formula di MacPherson (3.56) diventa

$$c_1^n(E) = c_1^n(\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)})[\Sigma_0(\alpha)] + (-1)^n[\Sigma_1(\alpha)] + \partial T.$$

Vediamo ora come sia possibile in linea di principio calcolare i residui $\text{Res}_{\varphi, 1}$ per un polinomio φ qualunque. Abbiamo dunque $\alpha : E \rightarrow F$ morfismo normale tra fibrati vettoriali complessi su X , consideriamo il fibrato Grassmanniano $\pi_1 : G_1 = \text{Gr}(1, \ker \alpha|_{\Sigma_1(\alpha)} \oplus \text{coker } \alpha|_{\Sigma_1(\alpha)}) \rightarrow \Sigma_1(\alpha)$, con sopra il fibrato tautologico degli 1-piani $U_1 \rightarrow G_1$ ed il suo ortogonale $U_1^\perp \rightarrow G_1$. Chiamiamo $K = \ker \alpha|_{\Sigma_1(\alpha)}$, $C = \text{coker } \alpha|_{\Sigma_1(\alpha)}$ e $I = \text{Im } \alpha|_{\Sigma_1(\alpha)}$. Ciò che vogliamo calcolare è

$$\text{Res}_{\varphi, 1} = (\pi_1)_* \varphi(\pi_1^* I \oplus U_1).$$

Scriviamo $\varphi = \tilde{\varphi}(c_1, \dots, c_n)$ ed usando la formula di Whitney possiamo espandere $\varphi(\pi_1^* I \oplus U_1)$ come una somma di termini della forma $\pi_1^* \varphi'(I) \wedge \varphi''(U_1)$, dove φ' e φ'' sono due polinomi invarianti. Quindi usando la formula push-pull (2.3) siamo in grado di calcolare il residuo se siamo in grado di calcolare $(\pi_1)_* \varphi''(U_1)$.

Nel caso invece di

$$\text{Res}_{\varphi, 1}^\perp = (\pi_1)_* \varphi(\pi_1^* K^\perp \oplus U_1^\perp)$$

con un ragionamento analogo, ci possiamo ridurre al calcolo di $(\pi_1)_* \varphi(U_1^\perp)$.

Vediamo dunque come calcolare $(\pi_1)_* \varphi(U_1)$ e $(\pi_1)_* \varphi(U_1^\perp)$. Partiamo dall'isomorfismo

$$\pi_1^*(K \oplus C) \cong U_1 \oplus U_1^\perp,$$

e applichiamo la classe di Chern totale c usando la formula di Whitney 1.5

$$\begin{aligned} \pi_1^* c(K) \wedge \pi_1^* c(C) &= c(U_1) \wedge c(U_1^\perp), \\ c(U_1^\perp) &= c(U_1)^{-1} \wedge \pi_1^* c(K) \wedge \pi_1^* c(C). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Chiamiamo $t = -c_1(U_1) = c_1(U_1^*)$ in modo che

$$c(U_1)^{-1} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k \geq 0} t^k.$$

Allora la (3.69) dice che

$$c_l(U_1^\perp) = \sum_{i+j+k=l} \pi_1^* c_i(K) \wedge \pi_1^* c_j(C) t^k,$$

per $1 \leq l \leq n$. Scriviamo ora $\varphi = \tilde{\varphi}(c_1, \dots, c_n)$ da cui

$$\varphi(U_1^\perp) = \sum_{k \geq 0} A_k(\pi_1^* c(K), \pi_1^* c(C)) t^k,$$

per certi polinomi A_k nelle classi di Chern di K ed C , da cui con la formula push-pull (2.3)

$$(\pi_1)_* \varphi(U_1^\perp) = \sum_{k \geq 0} A_k(c(K), c(C)) (\pi_1)_*(t^k).$$

Ora chiaramente $(\pi_1)_*(t^k) = 0$ se $k < n$, perché $(\pi_1)_*$ riduce il grado di n . Abbiamo visto più sopra che $(\pi_1)_*(t^n) = 1$. Infine riscriviamo la (3.69) come

$$\sum_{k \geq 0} t^k = \pi_1^*(c(K)^{-1} \wedge c(C)^{-1}) \wedge c(U_1^\perp)$$

e applicando $(\pi_1)_*$ otteniamo

$$\sum_{k \geq 0} (\pi_1)_*(t^{n+k}) = c(K)^{-1} \wedge c(C)^{-1} \wedge (\pi_1)_*(c(U_1^\perp)), \quad (3.70)$$

ma $c(U_1^\perp) = 1 + c_1(U_1^\perp) + c_2(U_1^\perp) + \dots + c_n(U_1^\perp)$, da cui $(\pi_1)_*(c(U_1^\perp)) = (\pi_1)_*(c_n(U_1^\perp))$ e quindi la componente di grado 0 della (3.70) dice

$$(\pi_1)_*(c_n(U_1^\perp)) = 1,$$

da cui

$$\sum_{k \geq 0} (\pi_1)_*(t^{n+k}) = c(K)^{-1} \wedge c(C)^{-1}$$

ovvero $(\pi_1)_*(t^{n+k})$ è uguale alla componente di $c(K)^{-1} \wedge c(C)^{-1}$ di grado $2k$.

Quindi abbiamo ottenuto una formula esplicita per $(\pi_1)_* c_1^k(U_1)$, e questi sono gli unici polinomi invarianti che non diano zero a priori, perché U_1 è un fibrato in rette. Abbiamo inoltre mostrato un algoritmo per calcolare $(\pi_1)_* \varphi(U_1^\perp)$. Come esempio abbiamo la seguente

Proposizione 3.28 *Vale la seguente*

$$(\pi_1)_* c_1^n(U_1^\perp) = 1. \quad (3.71)$$

Se inoltre $\dim_{\mathbf{C}} X = n > 1$, allora

$$(\pi_1)_*(c(U_1^\perp)^{-1}) = 0. \quad (3.72)$$

Dimostrazione

Dal fatto che

$$\pi_1^*(K \oplus C) \cong U_1 \oplus U_1^\perp,$$

traiamo che

$$c_1(U_1^\perp) = \pi_1^* c_1(K \oplus C) + t,$$

dove $t = -c_1(U_1)$. Quindi elevando alla n ,

$$c_1^n(U_1^\perp) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_1^* c_1^{n-k}(K \oplus C) t^k,$$

da cui prendendo il pushforward tramite π_1

$$(\pi_1)_* c_1^n(U_1^\perp) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_1^{n-k}(K \oplus C) \wedge (\pi_1)_*(t^k) = (\pi_1)_*(t^n) = 1.$$

Per dimostrare le (3.72) invece abbiamo

$$c(U_1) \wedge c(U_1^\perp) = \pi_1^* c(K \oplus C)$$

da cui

$$c(U_1^\perp)^{-1} = c(U_1) \wedge \pi_1^*(c(K \oplus C)^{-1})$$

e quindi

$$(\pi_1)_*(c(U_1^\perp)^{-1}) = (\pi_1)_*(c(U_1)) \wedge c(K \oplus C)^{-1}.$$

Ma π_1 diminuisce il grado di $n > 1$ mentre il rango di U_1 è 1, e quindi il membro destro dell'ultima formula è zero. \square

Finora abbiamo trattato solo il caso $\text{rank} E = 1$. Nel caso in cui questo sia maggiore, vi possono essere altri $\Sigma_k(\alpha)$ non vuoti, ed i corrispondenti $\text{Res}_{\varphi, k}$ si calcolano in maniera simile a quella fatta finora, utilizzando la seguente

Proposizione 3.29 ([12] Appendice B) *Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale complesso di rango m su una varietà X munito di una metrica hermitiana lungo le fibre. Sia $\pi : G = \text{Gr}(r, E) \rightarrow X$ il fibrato Grassmanniano degli r -piani in E , $0 < r < m$. Sia $U \rightarrow G$ il fibrato tautologico degli r -piani, e sia $U^\perp \rightarrow G$ quello degli $(m-r)$ -piani ortogonali. Allora*

$$(\pi_1)_* c_{m-r}^r(U^\perp) = 1.$$

Capitolo 4

Applicazioni alle foliazioni olomorfe

In questo capitolo diamo alcune applicazioni dei risultati esposti nei capitoli precedenti, tra cui il Teorema di Poincaré-Hopf ed il Teorema dell'Indice di Baum-Bott. Un'ottima referenza riguardo a quest'ultimo è [25].

4.1 Il Teorema di Poincaré-Hopf

Come applicazione della formula di MacPherson dimostrata nel capitolo precedente, diamo una dimostrazione del seguente Teorema:

Teorema 4.1 (Poincaré-Hopf) *Sia F un fibrato vettoriale complesso di rango n su una varietà reale, compatta, connessa ed orientata X , $\dim_{\mathbf{R}} X = 2n$ e sia s una sezione globale di F , trasversa alla sezione nulla. Allora l'insieme $Z(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$ è finito e vale la formula*

$$\int_X c_n(F) = \sum_{x \in Z(s)} \text{Ind}(s, x) \quad (4.1)$$

dove $\text{Ind}(s, x)$ è così definito: prendiamo un aperto U con coordinate x^1, \dots, x^{2n} , banalizzante per F , $F|_U \cong U \times \mathbf{C}^n \cong U \times \mathbf{R}^{2n}$ e scriviamo $s(x) = (x, s^1(x), \dots, s^{2n}(x))$, allora

$$\text{Ind}(s, x) = \text{sgn det} \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^j}(x) \right).$$

Dimostrazione

Possiamo considerare la sezione s come un morfismo di fibrati nel modo seguente: chiamiamo E il fibrato banale di rango 1 su X , e definiamo un morfismo di fibrati $\sigma : E \rightarrow F$ come $\sigma(x, v) = v \cdot s(x)$, dove $v \in \mathbf{C}$.

Applichiamo a σ il Teorema 3.21 ed otteniamo

$$c_n(F) = \text{Res}_{c_n,0}^\perp \llbracket \Sigma_0(\sigma) \rrbracket + \text{Res}_{c_n,1}^\perp \llbracket \Sigma_1(\sigma) \rrbracket + \partial T. \quad (4.2)$$

Notiamo innanzitutto che $\Sigma_1(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma \equiv 0\} = Z(s)$, che, grazie alla (3.48) ha codimensione reale $2n$ in X , e dunque è finito. Inoltre l'orientazione su $Z(s)$ in un punto x è così data: se $x \in Z(s)$, prendiamo coordinate locali x^1, \dots, x^{2n} attorno ad x e ricordando che

$$Z(s) = \{s^1 = s^2 = \dots = s^{2n} = 0\},$$

allora x è orientato positivamente o negativamente a seconda se la forma

$$ds^1 \wedge ds^2 \wedge \dots \wedge ds^{2n}$$

sia positiva o negativa. Ma essa è uguale a

$$\det \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{2n},$$

e dunque l'orientazione su x è $\text{sgn} \det \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^j} (x) \right) = \text{Ind}(s, x)$.

Abbiamo visto nel Teorema 3.27 che

$$\text{Res}_{c_n,0}^\perp = c_n((\ker \sigma)^\perp|_{\Sigma_0(\sigma)}).$$

Ma $(\ker \sigma)^\perp|_{\Sigma_0(\sigma)}$ è un fibrato banale di rango 1 su $\Sigma_0(\sigma)$ e dunque $\text{Res}_{c_n,0}^\perp = 0$. Invece

$$\text{Res}_{c_n,1}^\perp = \int_{\pi_1} c_n(\pi_1^*(\ker \sigma)^\perp \oplus U_1^\perp) = \int_{\pi_1} c_n(U_1^\perp),$$

perché $(\ker \sigma)^\perp|_{\Sigma_1(\sigma)} = 0$. Ora nella sezione 3.9 abbiamo visto che quest'ultima integrazione lungo le fibre fa 1, dunque la (4.2) diventa la seguente uguaglianza tra correnti su X

$$c_n(F) = \llbracket Z(s) \rrbracket + \partial T \quad (4.3)$$

che calcolata sulla 0-forma differenziale 1, dice

$$\int_X c_n(F) = \int_{Z(s)} 1 = \sum_{x \in Z(s)} \text{Ind}(s, x),$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta all'orientazione su ogni punto di $Z(s)$, discussa prima. \square

Sia ora X una varietà complessa, compatta e connessa e ricordiamo due fatti importanti: il primo è che vi è un isomorfismo come fibrati vettoriali reali tra il fibrato tangente reale $T_{\mathbf{R}}X$ ed il fibrato tangente olomorfo $T'X$.

Il secondo è il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern:

$$\int_X c_n(T'X) = \chi(X).$$

Combinando questo con il Teorema 4.1 otteniamo il

Teorema 4.2 *Sia X una varietà complessa, compatta e connessa, $\dim_{\mathbf{C}} X = n$ e sia v un campo vettoriale C^∞ su X , trasverso alla sezione nulla di $T_{\mathbf{R}}X$. Allora vale la formula*

$$\chi(X) = \sum_{x \in Z(v)} \text{Ind}(v, x).$$

4.2 Il residuo di Grothendieck

Iniziamo il paragrafo con una digressione sul residuo di Grothendieck, che ci sarà utile in seguito.

Sia \mathcal{O}_n l'anello dei germi di funzioni olomorfe attorno all'origine di \mathbf{C}^n e siano $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{O}_n$ che abbiano rappresentanti che si annullino tutti contemporaneamente solo in 0. Sia ω un germe di n -forma olomorfa e scegliamo un intorno U di 0 dove siano definiti dei rappresentanti degli a_i e di ω , che chiameremo allo stesso modo.

Sia $\Gamma = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |a_1(z)| = \dots = |a_n(z)| = \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$ piccolo in modo che $\Gamma \subset U$. Orientiamo Γ in modo che la n -forma $d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$ sia positiva, $\theta_i = \arg a_i$.

Definizione 4.3 *Il residuo di Grothendieck in 0 di ω rispetto agli a_i è*

$$\text{Res}_0 \left[\begin{array}{c} \omega \\ a_1, \dots, a_n \end{array} \right] = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma} \frac{\omega}{a_1 \cdots a_n}.$$

A causa dell'orientazione, il residuo è alternante negli a_i e si può calcolare nel modo seguente. Se chiamiamo (a_1, \dots, a_n) l'ideale generato dagli a_i , allora per ipotesi $V(a_1, \dots, a_n) = \{0\}$ e quindi grazie al Nullstellensatz, $\mathcal{O}_n = I(\{0\}) = \sqrt{(a_1, \dots, a_n)} \supset z_i$ per ogni i , dunque esistono interi positivi k_i

tali che $z_i^{k_i} \in (a_1, \dots, a_n)$ e possiamo scrivere $z_i^{k_i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_j$ con $c_{ij} \in \mathcal{O}_n$. Allora

$$\text{Res}_0 \begin{bmatrix} \omega \\ a_1, \dots, a_n \end{bmatrix} = \text{Res}_0 \begin{bmatrix} \det(c_{ij})\omega \\ z_1^{k_1}, \dots, z_n^{k_n} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Se scriviamo $\omega = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ con $f \in \mathcal{O}_n$, allora il lato destro della (4.4) diventa, grazie alla formula di Cauchy, il coefficiente di $z_1^{k_1-1} \dots z_n^{k_n-1}$ nell'espansione in serie di potenze di $f \det(c_{ij})$.

In particolare, se gli a_i sono non degeneri, ovvero se lo Jacobiano $J_a = \det\left(\frac{\partial a_i}{\partial z_j}\right)$ è diverso da zero in 0, allora

$$\text{Res}_0 \begin{bmatrix} \omega \\ a_1, \dots, a_n \end{bmatrix} = \frac{f(0)}{J_a(0)}.$$

4.3 Foliazioni olomorfe

Sia M una varietà complessa di dimensione n e sia $T'M$ il suo fibrato tangente olomorfo. Se E è un fibrato vettoriale olomorfo su M , $\mathcal{O}(E)$ indica il fascio dei germi di sezioni olomorfe di E . Esso è un fascio analitico localmente libero e quindi coerente per il Corollario 1.28.

Proposizione 4.4 *Sia F un fibrato vettoriale olomorfo su M . Allora il fascio $\mathcal{O}(F)$ è un sottofascio di $\mathcal{O}(T'M)$ se e solo se esiste un morfismo olomorfo di fibrati $i : F \rightarrow T'M$ che sia iniettivo al di fuori di una sottovarietà analitica $\Sigma \subset M$ di codimensione maggiore o uguale ad 1.*

Dimostrazione

Notiamo innanzitutto che, poiché M è connessa, le sottovarietà proprie V hanno codimensione maggiore o uguale ad 1 grazie alla Proposizione 1.36.

Se il morfismo a livello di fasci è iniettivo, allora quello a livello di fibrati è iniettivo al di fuori del luogo dove il quoziente $\mathcal{O}(T'M)/\mathcal{O}(F)$ non è localmente libero, che è una sottovarietà analitica propria.

Viceversa, se il morfismo a livello di fibrati è iniettivo in $x \in M$, allora anche quello a livello di fasci è iniettivo sulla spiga in x : infatti il morfismo tra fibrati è iniettivo in un intorno aperto U di x , dunque abbiamo la successione esatta corta

$$0 \rightarrow F|_U \rightarrow T'M|_U,$$

e quindi la successione di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(F)_x \rightarrow \mathcal{O}(T'M)_x$$

è esatta.

Ora, se il morfismo di fasci non è iniettivo nella spiga $\mathcal{O}(F)_x$ allora, dato che il nucleo di un morfismo di fasci coerenti è coerente, è non iniettivo in un intorno aperto U di x , grazie alla Proposizione 1.29. Allora anche il morfismo di fibrati non può essere iniettivo in tutto tale aperto, contro l'ipotesi che il luogo di non iniettività del morfismo di fibrati fosse una sottovarietà propria. \square

Definizione 4.5 *Sia F un fibrato vettoriale olomorfo su M , con $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(T'M)$. Diciamo che F è integrabile se per ogni $x \in M$,*

$$[\mathcal{O}(F)_x, \mathcal{O}(F)_x] \subset \mathcal{O}(F)_x. \quad (4.5)$$

Definizione 4.6 *Una foliazione \mathcal{F} su M di dimensione p è un fibrato vettoriale olomorfo ed integrabile F di rango p , con un morfismo olomorfo di fibrati $i : F \rightarrow T'M$, iniettivo al di fuori di una sottovarietà $S(\mathcal{F}) \subset M$ di codimensione maggiore o uguale ad 1. Il fibrato virtuale normale alla foliazione è $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = T'M - F$.*

Supponiamo di avere una foliazione \mathcal{F} di dimensione p ed un polinomio φ invariante di grado l . È un fatto noto che ogni polinomio invariante si può sempre scrivere in modo unico come un polinomio nelle classi di Chern e dunque esiste un unico polinomio $\tilde{\varphi}$ tale che

$$\varphi = \tilde{\varphi}(c_1, \dots, c_l),$$

dove le c_i sono le classi di Chern.

Vogliamo definire $\varphi(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ e lo facciamo nel seguente modo. Siano A e B fibrati vettoriali olomorfi e sia

$$c(A) = 1 + c_1(A) + c_2(A) + \dots \in H^*(M, \mathbf{C})$$

la classe di Chern totale. Poiché $c_0(B) = 1$ per definizione, $c(B)$ è invertibile in $H^*(M, \mathbf{C})$ e possiamo porre

$$c(A - B) = \frac{c(A)}{c(B)}. \quad (4.6)$$

Questo definisce dunque $c_i(A - B)$ per ogni i e dunque anche

$$\varphi(A - B) = \tilde{\varphi}(c_1(A - B), \dots, c_l(A - B)) \in H^{2l}(M, \mathbf{C}). \quad (4.7)$$

Se M è compatta e Z è una componente connessa di $S(\mathcal{F})$, abbiamo l'omomorfismo $\mu_* : H_j(Z, \mathbf{C}) \rightarrow H^{2n-j}(M, \mathbf{C})$ dato dalla composizione del morfismo indotto dall'inclusione $Z \subset M$ in omologia e dalla dualità di Poincaré.

Vale il Teorema

Teorema 4.7 (Baum-Bott[2]) Sia \mathcal{F} una foliazione di dimensione p su M , varietà complessa di dimensione n . Sia $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ il fibrato virtuale normale alla foliazione e sia $\varphi \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio invariante di grado l , con $n - p < l \leq n$. Sia Z una componente connessa compatta di $S(\mathcal{F})$. Allora esiste una classe di omologia $\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, Z) \in H_{2n-2l}(Z, \mathbf{C})$ tale che

- 1) $\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, Z)$ dipende solo da φ e dal comportamento locale di \mathcal{F} attorno a Z e
- 2) se M è compatta, allora

$$\sum_Z \mu_* \text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, Z) = \varphi(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}). \quad (4.8)$$

Baum e Bott calcolano anche i residui nel seguente caso

Teorema 4.8 (Baum-Bott[2], [4]) Sia \mathcal{F} una foliazione di dimensione 1 su M , varietà complessa di dimensione n , che possiamo vedere come un morfismo oloomorfo $\alpha : F \rightarrow T^*M$ dove F è un fibrato in rette. Sia $\varphi \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio invariante di grado n . Supponiamo che $S(\mathcal{F})$ sia composto da un insieme finito di punti Z_1, \dots, Z_k . Allora

$$\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, Z_j) = \text{Res}_{Z_j} \left[\begin{array}{c} \varphi(A_j) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \\ a_1, \dots, a_n \end{array} \right], \quad (4.9)$$

dove z^1, \dots, z^n sono coordinate oloomorfe attorno a Z_j , s_j è una sezione oloomorfa di F diversa da 0 in Z_i ,

$$\alpha(s_j) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

$$A_j = \left(\frac{\partial a_l}{\partial z^m} \right).$$

I Teoremi appena citati hanno avuto un'importanza enorme negli anni 70 nello studio delle foliazioni, e recentemente hanno trovato anche applicazioni in dinamica oloomorfa [1].

4.4 Connessioni parziali, azioni oloomorfe su fibrati e Teorema di vanishing di Bott

Sia M una varietà complessa di dimensione n , sia $TM = T_{\mathbf{R}}M \otimes \mathbf{C}$ il suo fibrato tangente complesso e sia $H \subset TM$ un sottofibrato. Allora possiamo vedere H^* come un quoziente di T^*M con proiezione $\rho : T^*M \rightarrow H^*$.

Definizione 4.9 Una connessione parziale su E , fibrato su M , è una coppia (H, δ) con $H \subset TM$ e

$$\delta : A^0(M, E) \rightarrow A^0(M, H^* \otimes E)$$

mappa \mathbf{C} -lineare e tale che

$$\delta(fs) = \rho(df) \otimes s + f\delta(s) \quad (4.10)$$

per ogni $f \in A^0(M)$ e $s \in A^0(M, E)$.

Come per le connessioni, si dimostra che δ è un operatore locale e dunque ammette una rappresentazione locale come matrice, le cui entrate sono sezioni C^∞ di H^* .

Definizione 4.10 Sia (H, δ) una connessione parziale per E . Diciamo che una connessione ∇ su E estende (H, δ) se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A^0(M, E) & \xrightarrow{\nabla} & A^1(M, E) = A^0(M, T^*M \otimes E) \\ Id \downarrow & & \rho \otimes Id \downarrow \\ A^0(M, E) & \xrightarrow{\delta} & A^0(M, H^* \otimes E) \end{array}$$

commuta.

Lemma 4.11 Per ogni connessione parziale (H, δ) su E , esiste una connessione ∇ su E che la estende.

Dimostrazione

Copriamo M con aperti $\{U_\alpha\}$ banalizzanti per E e sia $\{e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha\}$ un frame per E su U_α . Definiamo $\gamma_{ij}^\alpha \in A^0(U_\alpha, H^*)$ come

$$\delta e_i^\alpha = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha,$$

e scegliamo $\theta_{ij}^\alpha \in A^0(U_\alpha, T^*M)$ tali che

$$\rho(\theta_{ij}^\alpha) = \gamma_{ij}^\alpha.$$

Definiamo una connessione ∇_α su $E|_{U_\alpha}$ con

$$\nabla_\alpha e_i^\alpha = \sum_{j=1}^r \theta_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha.$$

Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A^0(U_\alpha, E) & \xrightarrow{\nabla_\alpha} & A^0(U_\alpha, T^*M \otimes E) \\ Id \downarrow & & \rho \otimes Id \downarrow \\ A^0(U_\alpha, E) & \xrightarrow{\delta} & A^0(U_\alpha, H^* \otimes E) \end{array}$$

commuta per costruzione.

Sia ora $\{\psi_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Definiamo la connessione ∇ su E cercata come

$$\nabla = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \nabla_{\alpha}.$$

□

Se ora E è un fibrato olomorfo, abbiamo l'operatore

$$\bar{\partial} : A^0(M, E) \rightarrow A^0(M, T'^*M \otimes E),$$

e $(T''M, \bar{\partial})$ è chiaramente una connessione parziale su E . Una connessione che la estenda è detta di tipo $(1, 0)$.

Definizione 4.12 *Sia F un sottofibrato integrabile di TM . Un'azione olomorfa di F su un fibrato olomorfo E su M è una mappa \mathbf{C} -lineare*

$$\alpha : A^0(M, F) \times A^0(M, E) \rightarrow A^0(M, E)$$

tale che per ogni $f \in A^0(M)$, $u, v \in A^0(M, F)$, $s \in A^0(M, E)$ valgano

- (i) $\alpha([u, v], s) = \alpha(u, \alpha(v, s)) - \alpha(v, \alpha(u, s))$
 - (ii) $\alpha(fu, s) = f\alpha(u, s)$
 - (iii) $\alpha(u, fs) = u(f)s + f\alpha(u, s)$
 - (iv) $\alpha(u, s)$ è olomorfa se lo sono u ed s .
- E è detto un F -fibrato.

Lemma 4.13 *Se α è un'azione olomorfa di F su E e se*

$$\delta_{\alpha} : A^0(M, E) \rightarrow A^0(M, F^* \otimes E) = A^0(M, \text{Hom}(F, E))$$

è definita da $\delta_{\alpha}(s)(u) = \alpha(u, s)$, allora (F, δ_{α}) è una connessione parziale per E .

Dimostrazione

Prendiamo $u \in A^0(M, F)$, $s \in A^0(M, E)$ e $f \in A^0(M)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha}(fs)(u) &= \alpha(u, fs) = u(f)s + f\alpha(u, s) = (\rho(df) \otimes s)(u) + f\delta_{\alpha}(s)(u) \\ &= (\rho(df) \otimes s + f\delta_{\alpha}(s))(u). \end{aligned}$$

□

Definizione 4.14 *Sia α un'azione olomorfa di F su E . Una F -connessione è una connessione su E che estenda la connessione parziale*

$$(F \oplus T''M, \delta_{\alpha} \oplus \bar{\partial}).$$

Osservazione 4.15 *Dal lemma 4.11 segue che su ogni F -fibrato esiste sempre una F -connessione.*

Osservazione 4.16 *Se ∇ è una connessione su E , F -fibrato, essa è una F -connessione se e solo se*

- (i) $\nabla s(u) = \alpha(u, s)$
- (ii) ∇ è di tipo $(1, 0)$.

Teorema 4.17 (Bott[5]) *Sia M una varietà complessa di dimensione n e sia F un sottofibrato oloomorfo di $T'M$ integrabile e di rango p . Sia E un F -fibrato oloomorfo su M , di rango r , sia ∇ una F -connessione per E e sia φ un polinomio invariante di grado $n - p < d \leq n$. Allora $\varphi(E) = 0$.*

Dimostrazione

Grazie al Teorema di Frobenius, attorno ad ogni punto di M esiste un aperto U , con coordinate (z^1, \dots, z^n) , tale che $F|_U$ sia generato da (v_1, \dots, v_p) , dove $v_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$.

Affermiamo che, a patto di restringere U , è possibile trovare un frame oloomorfo (s_1, \dots, s_r) di E su U , tale che

$$\alpha(v_i, s_j) = 0 \tag{4.11}$$

per ogni i, j . Infatti, prendiamo un qualunque frame oloomorfo di E su U , (s'_1, \dots, s'_r) e chiamiamo

$$\alpha(v_i, s'_j) = \sum_{k=1}^r h_{ij}^k s'_k.$$

$H_i = (h_{ij}^k)$ è quindi una matrice $r \times r$ di funzioni oloomorfe su U . Se trovassimo un'altra matrice di funzioni oloomorfe su U , $A = (a_j^m)$, che sia non singolare ovunque e tale che valgano

$$\frac{\partial A}{\partial z^i} + AH_i = 0 \tag{4.12}$$

per ogni $i = 1, \dots, p$, allora ponendo $s_i = \sum_{j=1}^r a_i^j s'_j$, avremmo

$$\begin{aligned} \alpha(v_i, s_j) &= \sum_{k=1}^r \alpha(v_i, a_j^k s'_k) = \sum_{k=1}^r (v_i(a_j^k) s'_k + a_j^k \alpha(v_i, s'_k)) \\ &= \sum_{k=1}^r (v_i(a_j^k) s'_k + a_j^k \sum_{l=1}^r h_{ik}^l s'_l) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (v_i(a_j^k) s'_k + a_j^k h_{ik}^l s'_l) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (v_i(a_j^k) + a_j^k h_{ik}^l) s'_l = \sum_{l=1}^r \left(\frac{\partial A}{\partial z^i} + AH_i \right)_j^l s'_l = 0 \end{aligned}$$

per ogni i, j .

Per risolvere il sistema (4.12), usiamo di nuovo il Teorema di Frobenius, che ci dice che per avere una soluzione è sufficiente (e necessario) che siano verificate le condizioni di compatibilità, che si ottengono derivando l'equazione ed eguagliando le derivate seconde miste dell'incognita. Esplicitamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{\partial A}{\partial z^i} + AH_i \right) &= \frac{\partial^2 A}{\partial z^i \partial z^j} + \frac{\partial A}{\partial z^j} H_i + A \frac{\partial H_i}{\partial z^j} \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial z^i \partial z^j} + A \left(-H_j H_i + \frac{\partial H_i}{\partial z^j} \right) = 0 \end{aligned}$$

da cui, uguagliando $\frac{\partial^2 A}{\partial z^i \partial z^j} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^j \partial z^i}$ e usando che A è invertibile, otteniamo le condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial H_i}{\partial z^j} + H_i H_j = \frac{\partial H_j}{\partial z^i} + H_j H_i. \quad (4.13)$$

Vediamo che esse sono verificate: infatti nella Definizione 4.12, al punto (i) c'è scritto che

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha([v_i, v_j], s'_k) = \alpha(v_i, \alpha(v_j, s'_k)) - \alpha(v_j, \alpha(v_i, s'_k)) = \sum_{l=1}^r \alpha(v_i, h_{jk}^l s'_l) \\ &\quad - \sum_{l=1}^r \alpha(v_j, h_{ik}^l s'_l) = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r \left(v_i(h_{jk}^m) + h_{jk}^l h_{il}^m - v_j(h_{ik}^m) - h_{ik}^l h_{jl}^m \right) s'_m \\ &= \sum_{m=1}^r \left(\frac{\partial H_j}{\partial z^i} + H_j H_i - \frac{\partial H_i}{\partial z^j} - H_i H_j \right)_k s'_m, \end{aligned}$$

perché $[v_i, v_j] = [\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}] = 0$. Questa è proprio la (4.13), dunque abbiamo ottenuto il frame (s_1, \dots, s_r) che soddisfa la (4.11).

Sia dunque ∇ una F -connessione per E e sia (θ_i^j) la matrice della connessione, definita da

$$\nabla(s_i) = \sum_{j=1}^r \theta_i^j \otimes s_j.$$

Ogni θ_i^j è una forma di tipo $(1, 0)$ su U e abbiamo

$$0 = \alpha(v_i, s_j) = \nabla(s_j)(v_i) = \sum_{k=1}^r (\theta_j^k \otimes s_k)(v_i) = \sum_{k=1}^r \langle \theta_j^k, v_i \rangle s_k,$$

da cui, essendo le s_k linearmente indipendenti,

$$\langle \theta_j^k, v_i \rangle = 0 \quad (4.14)$$

per ogni i, j, k .

Sia $A(U)$ l'insieme di tutte le forme differenziali su U ; esso ha la struttura di anello, con le operazioni di somma e di wedge. Sia $I(U)$ l'ideale di $A(U)$ generato da dz^{p+1}, \dots, dz^n . Esso ha le seguenti due proprietà evidenti:

- se $\omega \in I(U)$ allora $d\omega \in I(U)$
- se $\omega_1, \dots, \omega_{n-p+1} \in I(U)$ allora $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-p+1} = 0$.

La (4.14) dice che $\theta_i^j \in I(U)$ per ogni i, j . Ricordiamo che la curvatura della connessione ∇ è rappresentata su U dalla matrice di 2-forme (κ_i^j) data da

$$\kappa_i^j = d\theta_i^j + \sum_{k=1}^r \theta_k^j \wedge \theta_i^k,$$

ed è ora chiaro che $\kappa_i^j \in I(U)$.

Sia φ un polinomio invariante di grado $n - p < d \leq n$ e scriviamolo $\varphi = \tilde{\varphi}(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ dove le σ_i sono le funzioni simmetriche elementari. Allora su U , $\varphi(\nabla) = \tilde{\varphi}(\sigma_1(\kappa), \dots, \sigma_l(\kappa))$ e poiché $n - p + 1 \leq d$, la seconda proprietà di $I(U)$ mi dice che $\varphi(\nabla) = 0$ su U . \square

Vediamo che nelle ipotesi del Teorema 4.17, il fibrato quoziente $T'M/F$ ha una naturale struttura di F -fibrato. In effetti se

$$\eta : T'M \rightarrow T'M/F$$

è la proiezione, se $u \in A^0(M, F)$ e $s \in A^0(M, T'M/F)$, scelgo $\tilde{s} \in A^0(M, T'M)$ tale che $\eta(\tilde{s}) = s$ e definisco

$$\alpha(u, s) = \eta([u, \tilde{s}]).$$

Poiché F è integrabile, questo non dipende dall'estensione \tilde{s} scelta: se \hat{s} è un'altra estensione, allora $\eta(\tilde{s} - \hat{s}) = 0$, ovvero $\tilde{s} - \hat{s} \in F$ e dunque

$$\eta([u, \tilde{s}]) - \eta([u, \hat{s}]) = \eta([u, \tilde{s} - \hat{s}]) = 0$$

perché, grazie all'integrabilità, $[u, \tilde{s} - \hat{s}] \in F$ e dunque si proietta a zero. Vediamo che ciò definisce un'azione olomorfa di F su $T'M/F$. Per la (i) della Definizione 4.12 calcoliamo

$$\begin{aligned} \alpha([u, v], s) &= \eta([u, v], \tilde{s}) = \eta([u, [v, \tilde{s}]] - \eta([v, [u, \tilde{s}]]) \\ &= \eta([u, \eta([v, \tilde{s}]]) - \eta([v, \eta([u, \tilde{s}]]) = \alpha(u, \alpha(v, s)) - \alpha(v, \alpha(u, s)) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità di Jacobi ed il fatto che grazie all'integrabilità di F , $\eta([u, v]) = \eta([u, \eta(v)])$ se $u \in A^0(M, F)$, $v \in A^0(M, T'M)$.

Per la (ii), calcoliamo

$$\alpha(fu, s) = \eta([fu, \tilde{s}]) = \eta(f[u, \tilde{s}] + \tilde{s}(f)u) = \eta(f[u, \tilde{s}]) = f\alpha(u, s)$$

perché $\tilde{s}(f)u$ essendo un multiplo di u sta ancora in F e dunque si proietta a zero.

Per la (iii), calcoliamo

$$\alpha(u, fs) = \eta([u, f\tilde{s}]) = \eta(f[u, \tilde{s}] + u(f)\tilde{s}) = f\alpha(u, s) + u(f)s.$$

La (iv) è evidente.

Ora, visto che è sempre possibile mettere una F -connessione su $T'M/F$, vale il

Corollario 4.18 (Bott[5]) *Sia M una varietà complessa di dimensione n e sia F un sottofibrato olomorfo di $T'M$ integrabile e di rango p . Sia φ un polinomio invariante di grado $n - p < d \leq n$. Allora $\varphi(T'M/F) = 0$.*

4.5 Il Teorema di Baum-Bott

In questa sezione sono contenuti i nostri risultati originali, ovvero i Teoremi 4.19 e 4.20. Essi consistono in una dimostrazione di una versione debole del Teorema dell'Indice di Baum-Bott.

Supponiamo di avere su M complessa, $\dim_{\mathbf{C}} M = \nu$ e su di essa una foliazione olomorfa \mathcal{F} , di dimensione p . Per quanto detto sopra esiste un fibrato olomorfo F di rango p su M ed un morfismo $\alpha : F \rightarrow T'M$. Inoltre il fibrato F è integrabile, ovvero $\mathcal{O}(F) \subset \mathcal{O}(T'M)$ è chiuso rispetto al bracket.

Teorema 4.19 *Sia \mathcal{F} una foliazione di dimensione p su M , varietà complessa compatta di dimensione ν . Sia $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ il fibrato virtuale normale alla foliazione e sia φ un polinomio invariante di grado l , con $\nu - p < l \leq \nu$. Allora esiste una classe di omologia $\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}) \in H_*(S(\mathcal{F}), \mathbf{C})$ che dipende solo da φ e dal comportamento locale di \mathcal{F} attorno a $S(\mathcal{F})$ e tale che*

$$\mu_* \text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}) = \varphi(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}), \quad (4.15)$$

dove $\mu_* : H_*(S(\mathcal{F}), \mathbf{C}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{C})$ è data dalla composizione del morfismo indotto dall'inclusione $S(\mathcal{F}) \subset M$ in omologia e dalla dualità di Poincaré.

Sia $\alpha : F \rightarrow T'M$ il morfismo olomorfo della foliazione \mathcal{F} , e siano

$$\Sigma_k(\alpha) = \{x \in M \mid \dim \ker \alpha_x = k\}.$$

Allora chiaramente

$$S(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^p \Sigma_k(\alpha).$$

Chiamiamo $\mu_k = \dim \Sigma_k(\alpha)$ e $\nu_k = \nu - k(\nu - p + k)$.

Teorema 4.20 *Sia \mathcal{F} una foliazione di dimensione p su M , varietà complessa compatta di dimensione ν . Supponiamo che α sia normale oppure che $\mu_k \leq \nu_k$ per ogni k . Sia $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ il fibrato virtuale normale alla foliazione e sia φ un polinomio invariante di grado l , con $\nu - p < l \leq \nu$. Allora esistono classi di omologia $\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, k) \in H_{2\nu-2l}(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C})$ che dipende solo da φ e dal comportamento locale di \mathcal{F} attorno a $\Sigma_k(\alpha)$ e tali che*

$$\sum_{k=1}^p \mu_* \text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, k) = \varphi(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}), \quad (4.16)$$

dove $\mu_* : H_*(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{C})$ è data dalla composizione del morfismo indotto dall'inclusione $\Sigma_k(\alpha) \subset M$ in omologia e dalla dualità di Poincaré.

Supponiamo inizialmente che α sia normale. Allora preso un polinomio invariante φ , di grado l qualunque, applicando il Teorema 3.21, otteniamo

$$\varphi(F) = \sum_{k=0}^p \text{Res}_{\varphi, k}[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T. \quad (4.17)$$

Iniziamo con calcolare il termine per $k = 0$. Poiché α è normale, $\dim_{\mathbf{C}} \Sigma_0(\alpha) = \nu$ e abbiamo visto nel Teorema 3.27 che

$$\text{Res}_{\varphi, 0} = \varphi(\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}).$$

Quindi la (4.17) si legge

$$\varphi(F) - \varphi(\text{Im } \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)})[\Sigma_0(\alpha)] = \sum_{k=1}^p \text{Res}_{\varphi, k}[\Sigma_k(\alpha)] + \partial T. \quad (4.18)$$

Lemma 4.21 *Se $A - B$ è un fibrato virtuale su M , allora*

$$c_l(A - B) = \sum_J d_J c_{i_1}^{a_1}(A) c_{i_2}^{a_2}(A) \cdots c_{i_k}^{a_k}(A) c_{j_1}^{b_1}(B) c_{j_2}^{b_2}(B) \cdots c_{j_h}^{b_h}(B)$$

dove la somma è su tutti i multiindici $J = \{i_*, j_*, a_*, b_*, h, k\}$ con $0 \leq i_*, j_*, a_*, b_*, h, k \leq l$, $i_1 a_1 + \cdots + i_k a_k + j_1 b_1 + \cdots + j_h b_h = l$ e $d_J \in \mathbf{Z}$.

Dimostrazione

Partiamo dalla relazione (4.6). Poiché $c_0(B) = 1$ per definizione, $c(B)$ è invertibile in $H^*(M, \mathbf{C})$ e posto $t = c(B) - 1$ possiamo scrivere formalmente

$$c(B)^{-1} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k.$$

Quindi

$$c(A-B) = 1 + c_1(A-B) + c_2(A-B) + \dots = c(A) + c(A)t + c(A)t^2 + \dots \quad (4.19)$$

da cui, sviluppando t^k e considerando le componenti di grado l di ambo i membri della (4.19), si ottiene la tesi. \square

Lemma 4.22 *Se $A - B$ è un fibrato virtuale su M , allora*

$$c_l^m(A - B) = \sum_J d_J c_{i_1}^{a_1}(A) c_{i_2}^{a_2}(A) \cdots c_{i_k}^{a_k}(A) c_{j_1}^{b_1}(B) c_{j_2}^{b_2}(B) \cdots c_{j_h}^{b_h}(B)$$

dove la somma è su tutti i multiindici $J = \{i_*, j_*, a_*, b_*, h, k\}$ con $0 \leq i_*, j_*, a_*, b_*, h, k \leq lm$, $i_1 a_1 + \cdots + i_k a_k + j_1 b_1 + \cdots + j_h b_h = lm$ e $d_J \in \mathbf{Z}$.

Dimostrazione

Grazie al Lemma 4.21 abbiamo un'espressione per $c_l(A - B)$, che possiamo elevare alla m , espandere ed ottenere una sommatoria il cui generico termine è proprio della forma voluta. \square

Lemma 4.23 *Se $A - B$ è un fibrato virtuale su M e φ è un polinomio invariante di grado l a coefficienti complessi, allora*

$$\varphi(A - B) = \sum_J d_J c_{i_1}^{a_1}(A) c_{i_2}^{a_2}(A) \cdots c_{i_k}^{a_k}(A) c_{j_1}^{b_1}(B) c_{j_2}^{b_2}(B) \cdots c_{j_h}^{b_h}(B)$$

dove la somma è su tutti i multiindici $J = \{i_*, j_*, a_*, b_*, h, k\}$ con $0 \leq i_*, j_*, a_*, b_*, h, k \leq l$, $i_1 a_1 + \cdots + i_k a_k + j_1 b_1 + \cdots + j_h b_h = l$ e $d_J \in \mathbf{C}$.

Dimostrazione

È un fatto noto che ogni polinomio invariante si può sempre scrivere in modo unico come un polinomio nelle classi di Chern, dunque esiste un unico polinomio $\tilde{\varphi}$ tale che $\varphi = \tilde{\varphi}(c_1, \dots, c_l)$. Quindi

$$\varphi(E) = \sum_I a_I c^I(E)$$

dove $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ con $0 \leq i_j \leq l$, $i_1 + 2i_2 + \cdots + li_l = l$, $a_I \in \mathbf{C}$ e

$$c^I(E) = c_1^{i_1}(E) c_2^{i_2}(E) \cdots c_l^{i_l}(E).$$

Un utilizzo ripetuto del Lemma 4.22 permette di scrivere $c^I(A - B)$ nella forma voluta, da cui la tesi. \square

Torniamo alla (4.18) e calcoliamo le correnti da ambo i lati su una forma differenziale chiusa $\psi \in A^{\nu-l, \nu-l}(M)$. Per farlo, notiamo prima che, poiché i è supposto normale, $\dim_{\mathbf{C}} \Sigma_k(\alpha) = \nu - k(\nu - p + k)$, mentre la dimensione

delle fibre di $Gr(k, \ker\alpha \oplus \operatorname{coker}\alpha)$ è $k(\nu - p + k)$.

Ora l'integrazione lungo le fibre di $\pi_k : G_k \rightarrow \Sigma_k(\alpha)$ diminuisce il grado delle forme differenziali proprio di $2k(\nu - p + k)$ e dunque $\operatorname{Res}_{\varphi,k}$ è una forma differenziale di tipo $(l - k(\nu - p + k), l - k(\nu - p + k))$.

Quindi possiamo integrare $\operatorname{Res}_{\varphi,k} \wedge \iota_k^* \psi$ su $\Sigma_k(\alpha)$ perché hanno la stessa dimensione e trovare

$$\int_M \varphi(F) \wedge \psi - \int_{\Sigma_0(\alpha)} \varphi(\operatorname{Im} \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)}) \wedge \iota_0^* \psi = \sum_{k=1}^p \int_{\Sigma_k(\alpha)} \operatorname{Res}_{\varphi,k} \wedge \iota_k^* \psi. \quad (4.20)$$

dove $\iota_k : \Sigma_k(\alpha) \hookrightarrow M$.

Questo vale per ogni polinomio φ indipendentemente dal suo grado.

Notiamo ora che il fibrato $\operatorname{Im} \alpha|_{\Sigma_0(\alpha)} \subset T'\Sigma_0(\alpha)$ è integrabile: infatti, visto che in $\Sigma_0(\alpha)$, α è iniettivo, allora si ha per ogni $x \in \Sigma_0(\alpha)$ un'uguaglianza tra spighe $\mathcal{O}(\operatorname{Im} \alpha)_x \cong \mathcal{O}(F)_x$ e quest'ultima è chiusa rispetto al bracket per ipotesi.

Prendiamo ora φ di grado l con $\nu - p < l \leq \nu$ e applichiamo il Teorema 4.18 al fibrato integrabile $\operatorname{Im} \alpha \subset T'\Sigma_0(\alpha)$ su $\Sigma_0(\alpha)$ per ottenere

$$\varphi(T'\Sigma_0(\alpha)/\operatorname{Im} \alpha) = 0. \quad (4.21)$$

Preso una forma differenziale chiusa $\eta \in A^{\nu-l, \nu-l}(M)$ grazie al Lemma 4.23 possiamo scrivere la (4.21) come

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma_0(\alpha)} \varphi(T'\Sigma_0(\alpha)/\operatorname{Im} \alpha) \wedge \iota_0^* \eta \\ &= \sum_J d_J \int_{\Sigma_0(\alpha)} c_{i_1}^{a_1}(T'\Sigma_0(\alpha)) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'\Sigma_0(\alpha)) c_{j_1}^{b_1}(\operatorname{Im} \alpha) \cdots c_{j_h}^{b_h}(\operatorname{Im} \alpha) \wedge \iota_0^* \eta. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Notiamo innanzitutto che $\iota_0^* T'M = T'\Sigma_0(\alpha)$ e dunque

$$\varphi(T'\Sigma_0(\alpha)) = \varphi(\iota_0^* T'M) = \iota_0^* \varphi(T'M).$$

In ciascun termine dell'ultima sommatoria applichiamo la (4.20) con $c_{j_1}^{b_1} \cdots c_{j_h}^{b_h}$ al posto di φ e con

$$c_{i_1}^{a_1}(T'\Sigma_0(\alpha)) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'\Sigma_0(\alpha)) \wedge \iota_0^* \eta = \iota_0^*(c_{i_1}^{a_1}(T'M) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'M) \wedge \eta)$$

al posto di $\iota_0^* \psi$ e otteniamo

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_J d_J \int_M c_{i_1}^{a_1}(T'M) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'M) c_{j_1}^{b_1}(F) \cdots c_{j_h}^{b_h}(F) \wedge \eta \\
 &\quad - \sum_{k=1}^p \int_{\Sigma_k(\alpha)} \widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k} \wedge \iota_k^* \eta = \int_M \varphi(T'M - F) \wedge \eta - \sum_{k=1}^p \int_{\Sigma_k(\alpha)} \widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k} \wedge \iota_k^* \eta
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

dove

$$\widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k} = \sum_J d_J \iota_k^* (c_{i_1}^{a_1}(T'M) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'M)) \wedge \text{Res}_{c_{j_1}^{b_1} \cdots c_{j_h}^{b_h}, k}.$$

Non resta che notare che la (4.23) si può riscrivere nel seguente modo. Innanzitutto

$$S(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^p \Sigma_k(\alpha).$$

Sia $[\Sigma_k(\alpha)]$ la classe fondamentale in $H_*(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C})$, chiamiamo

$$\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, k) = [\Sigma_k(\alpha)] \frown \widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k},$$

$P : H_*(M, \mathbf{C}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{C})$ la dualità di Poincaré e $\iota_k : \Sigma_k(\alpha) \hookrightarrow M$ l'inclusione.

Dato che

$$\widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k} \in H^{2l-2k(\nu-p+k)}(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C})$$

e che

$$[\Sigma_k(\alpha)] \in H_{2\nu-2k(\nu-p+k)}(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C}),$$

allora

$$[\Sigma_k(\alpha)] \frown \widetilde{\text{Res}}_{\varphi, k} \in H_{2\nu-2l}(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C})$$

per ogni k e quindi

$$\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, k) \in H_{2\nu-2l}(\Sigma_k(\alpha), \mathbf{C}).$$

Allora la (4.23) si può riscrivere come un'uguaglianza tra classi di coomologia di M :

$$\varphi(T'M - F) = \sum_k P \circ (\iota_k)_* \text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}, k). \tag{4.24}$$

Questa equazione è la (4.16), e quindi dimostra il Teorema 4.20 nel caso normale. Essa è simile alla (4.8) del Teorema 4.7, ma è più debole di essa. Infatti $\Sigma_k(\alpha)$ può essere sconnesso, ed in quel caso Baum e Bott trovano dei residui separati per ogni componente connessa, mentre noi possiamo solo calcolare la somma dei residui delle varie componenti connesse, ma non

ciascuno singolarmente.

Passiamo ora al caso in cui le singolarità non siano troppo grosse, ovvero se $\nu_k = \nu - k(\nu - p + k) \geq \mu_k = \dim_{\mathbf{C}} \Sigma_k(\alpha)$ per ogni $0 \leq k \leq p$.

Visto che chiaramente $M = \bigcup_{k=0}^p \Sigma_k(\alpha)$, che ha dimensione ν , si ha che necessariamente $\mu_0 = \nu_0 = \nu$.

Grazie a ciò possiamo ripetere esattamente lo stesso discorso del caso normale (coi residui moltiplicati per le funzioni n_k del Teorema 3.24) solo che stavolta, se $\mu_j < \nu_j$, nella (4.20) il termine j -esimo della somma al membro destro sarà zero, perché $n_j = 0$ e possiamo quindi supporre $\text{Res}_{\varphi, j} = 0$.

Il risultato finale è quindi formalmente lo stesso del caso normale, ed il Teorema 4.20 è completamente dimostrato.

Dimostriamo infine il Teorema 4.19: sia $\alpha : F \rightarrow T'M$ una foliazione olomorfa con $\text{rank } F = p$, φ un polinomio invariante con $l = \deg \varphi$, $\nu - p < l \leq \nu$, $\eta \in A^{\nu-l, \nu-l}(M)$ chiusa. Di nuovo $\Sigma_0(\alpha)$ ha dimensione ν , ed usando la (3.65) con lo stesso ragionamento di qua sopra otteniamo

$$0 = \int_M \varphi(T'M - F) \wedge \eta - \langle \tilde{\Xi}_{\varphi}, \eta \rangle$$

dove

$$\tilde{\Xi}_{\varphi} := \sum_J d_J [c_{i_1}^{a_1}(T'M) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'M)] \wedge \Xi_{c_{j_1}^{b_1} \cdots c_{j_h}^{b_h}}.$$

Ora chiamiamo $\Theta_{\varphi} \in H_*(S(\mathcal{F}), \mathbf{C})$ la classe in omologia della corrente Ξ_{φ} , dove $S(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^p \Sigma_k(\alpha)$ e chiamiamo

$$\text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}) := \sum_J d_J [c_{i_1}^{a_1}(T'M) \cdots c_{i_k}^{a_k}(T'M)] \frown \Theta_{c_{j_1}^{b_1} \cdots c_{j_h}^{b_h}}.$$

Chiamando infine $\iota : S(\mathcal{F}) \hookrightarrow M$ l'inclusione, otteniamo

$$\varphi(T'M - F) = P \circ \iota_* \text{Res}_{\varphi}(\mathcal{F}), \quad (4.25)$$

ovvero la (4.15). Quindi abbiamo una formula generale di localizzazione, che però non è esplicita ed a differenza di Baum e Bott non siamo in grado di scriverla come somma di contributi dalle varie componenti connesse di $S(\mathcal{F})$, e non abbiamo un equivalente del Teorema 4.8.

Conclusioni

Abbiamo mostrato come la formula di MacPherson di localizzazione di classi caratteristiche di fibrati sulle singolarità di morfismi tra essi possa, assieme al Teorema di Vanishing di Bott, dare una versione più debole del Teorema dell'indice di Baum-Bott.

Il nostro Teorema (4.19 e 4.20) è più debole di quello di Baum-Bott nel senso che le localizzazioni non sono sulle varie componenti connesse dell'insieme dei punti singolari della foliazione, bensì sulla stratificazione

$$S(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^p \Sigma_k(\alpha)$$

che appare naturalmente nello studio delle singolarità di mappe.

Se per esempio la foliazione \mathcal{F} è di dimensione 1 e l'insieme $S(\mathcal{F})$ è ridotto ad un numero finito di punti, allora Baum e Bott danno un esplicito residuo in ciascuno dei punti, dato appunto dal residuo di Grothendieck. La formula di MacPherson invece dà solo un residuo complessivo che è la somma di quelli su tutti i punti.

D'altronde era prevedibile che questi mezzi non fossero in grado di dare tutto il Teorema di Baum-Bott, perchè esso è un Teorema che riguarda strettamente la struttura olomorfa, mentre la formula di MacPherson si applica anche a mappe solo differenziabili e normali. Dunque non ci si poteva aspettare di cogliere sfumature sottili della struttura olomorfa con un teorema sostanzialmente reale.

Non è quindi probabilmente possibile usare questi mezzi per attaccare la seguente

Congettura 4.24 (di Razionalità, Baum-Bott [2]) *Sia \mathcal{F} una foliazione olomorfa di dimensione p su una varietà complessa M di dimensione n , sia Z una componente connessa compatta di $S(\mathcal{F})$. Sia φ un polinomio invariante a coefficienti razionali di grado l con $n - p + 1 < l \leq n$. Allora*

$$\text{Res}_\varphi(\mathcal{F}, Z) \in H_*(Z, \mathbf{Q}).$$

Risulta comunque inaspettato che i nostri Teoremi 4.19 e 4.20 seguano così facilmente dal lavoro di MacPherson e Harvey-Lawson.

Bibliografia

- [1] M. ABATE, F. BRACCI, F. TOVENA *Index theorems for holomorphic self-maps*, Annals of Math., to appear.
- [2] P. BAUM, R. BOTT *Singularities of holomorphic foliations*, J. Differential Geometry 7 (1972), 279-342.
- [3] J.M. BOARDMAN *Singularities of differentiable maps*, Publ. Math. IHES 33 (1967), 383-419.
- [4] R. BOTT *A residue formula for holomorphic vector fields*, J. Differential Geometry 1 (1967), 311-330.
- [5] R. BOTT *On a topological obstruction to integrability*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 16, AMS (1970), 127-132.
- [6] J.P. DEMAILLY *Complex analytic and differential geometry*, Université de Grenoble I, 1997.
- [7] H. FEDERER *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, New York, 1969.
- [8] M. GIAQUINTA, G. MODICA, J. SOUČEK *Cartesian currents in the calculus of variations I*, Springer, Berlin, 1998.
- [9] P. GRIFFITHS, J. HARRIS *Principles of algebraic geometry*, Wiley & Sons, New York, 1978.
- [10] A. HATCHER *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [11] F.R. HARVEY, H.B. LAWSON *A theory of characteristic currents associated with a singular connection*, Astérisque 213, SMF, Montrouge, 1993.
- [12] F.R. HARVEY, H.B. LAWSON *Geometric residue theorems*, Amer. J. Math. 117 no.4 (1995), 829-874.
- [13] F.R. HARVEY, H.B. LAWSON *Finite volume flows and Morse theory*, Annals of Math. 153 no.1 (2001), 1-25.

- [14] F.R. HARVEY, H.B. LAWSON *Singularities and Chern-Weil theory I. The local MacPherson formula*, Asian J. Math. 4 (2000), no. 1, 71-95.
- [15] F.R. HARVEY, H.B. LAWSON *Singularities and Chern-Weil theory II. Geometric atomicity*, Duke Math. J. 119 (2003), no. 1, 119-158.
- [16] M.W. HIRSCH *Differential Topology*, Springer Verlag, New York, 1976.
- [17] S. KOBAYASHI *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, 1987.
- [18] R.D. MACPHERSON *Singularities of maps and characteristic classes*, Tesi di Dottorato, Harvard University, 1970.
- [19] R.D. MACPHERSON *Generic vector bundle maps*, in “Dynamical Systems, Proceedings of Symposium, University of Bahia, Salvador 1971”, Academic Press, New York, 1973, 165-175.
- [20] J.W. MILNOR, J.D. STASHEFF *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [21] S. MORITA *Geometry of differential forms*, AMS, Providence, 2001.
- [22] F. RONGA *Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux*, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 15-35.
- [23] J.P. SERRE *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math. 61 (1955), 197-278.
- [24] E.H. SPANIER *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [25] T. SUWA *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*, Hermann, Paris, 1998.