TORSEURS ARITHMÉTIQUES ET ESPACES FIBRÉS

par

Antoine Chambert-Loir et Yuri Tschinkel

Table des matières

Introduction

Cet article est le premier d'une série dont le thème principal est l'étude des hauteurs sur certaines variétés algébriques sur un corps de nombres. On voudrait notamment comprendre la distribution des points rationnels de hauteur bornée.

Précisément, soient X une variété algébrique projective lisse sur un corps de nombres F, $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X et $H_{\mathscr{L}} : X(\overline{F}) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction hauteur (exponentielle) pour $\mathscr{L}$. Si U est un ouvert de Zariski de X, on cherche à estimer le nombre

$$N_U(\mathscr{L}, H) = \#\{x \in U(F)\,;\, H_{\mathscr{L}}(x) \leq H\}$$

lorsque H tend vers $+\infty$. L'étude de nombreux exemples a montré que l'on peut s'attendre à un équivalent de la forme

$$(*) \qquad N_U(\mathscr{L}, H) = \Theta(\mathscr{L}) H^{a(\mathscr{L})} (\log H)^{b(\mathscr{L})-1} (1 + o(1)), \quad H \to +\infty$$

pour un ouvert U convenable et lorsque par exemple $\mathscr{L}$ et ω_X^{-1} (fibré anticanonique) sont amples. On a en effet un résultat de ce genre lorsque X est une variété de drapeaux [**12**], une intersection complète lisse de bas degré (méthode du cercle), une variété torique [**5**], une variété horosphérique [**22**], etc. On dispose de plus d'une description conjecturale assez précise des constantes $a(\mathscr{L})$ et $b(\mathscr{L})$ en termes du cône des diviseurs effectifs [**2**] ainsi que de la constante $\Theta(\mathscr{L})$ ([**16**], [**6**]).

En fait, on étudie plutôt la *fonction zêta des hauteurs*, définie par la série de Dirichlet

$$Z_U(\mathscr{L}, s) = \sum_{x \in U(F)} H_{\mathscr{L}}(x)^{-s}$$

à laquelle on applique des théorèmes taubériens standard. Sur cette série, on peut se poser les questions suivantes : domaine de convergence, prolongement méromorphe, ordre du premier pôle, terme principal, sans oublier la croissance dans les bandes verticales à gauche du premier pôle. Cela permet de proposer des conjectures de précision variable.

Il est naturel de vouloir tester la compatibilité de cette conjecture avec les constructions usuelles de la géométrie algébrique. Par exemple, on n'arrive pas à démontrer cette conjecture pour un éclatement X' d'une variété X pour laquelle cette conjecture est connue. Même pour un éclatement de 4 points dans le plan projectif, on n'a pas de résultat complet !

Dans cet article, nous considérons certaines fibrations localement triviales construites de la façon suivante. Soient G un groupe algébrique linéaire sur F agissant sur une variété projective lisse X, B une variété projective lisse sur F et T un G-torseur sur B localement trivial pour la topologie de Zariski. Ces données définissent une variété algébrique projective Y munie d'un morphisme $Y \to B$ dont les fibres sont isomorphes à X. On donne au § 2.7 de nombreux exemples « concrets » de variétés algébriques provenant d'une telle construction. Le cœur du problème est de comprendre le comportement de la fonction hauteur lorsqu'on passe d'une fibre à l'autre, comportement vraiment non trivial bien qu'elles soient toutes isomorphes.

Pour définir et étudier de façon systématique les fonctions hauteurs sur Y, on est amené à dégager de nouvelles notions dans l'esprit de la géométrie d'Arakelov. Apparaissent notamment les notions de G-torseur arithmétique au § 1.1.3, ainsi que la définition de la *fonction L d'Arakelov* attachée à un tel torseur arithmétique et à une fonction sur le groupe adélique $G(\mathbf{A}_F)$ invariante par $G(F)$ et par un sous-groupe compact convenable (§ 1.4). Elles généralisent les notions usuelles de fibré inversible métrisé ainsi que la fonction zêta des hauteurs introduits par S. Arakelov [**1**].

Ceci fait, on peut voir que les fonctions hauteurs d'une fibre Y_b de la projection $Y \to B$ diffèrent de la fonction hauteur sur X par ce que nous appelons *torsion adélique*, dans laquelle on retrouve explicitement la classe d'isomorphisme du G-torseur arithmétique T_b sur F (§ 2.4).

Dans un deuxième article, nous appliquerons ces considérations générales au cas d'une fibration en variétés toriques provenant d'un torseur sous un tore pour l'ouvert U défini par le tore. Le principe de l'étude généralise [**22**] et est le suivant. On construit les hauteurs à l'aide d'un prolongement du torseur géométrique en un torseur arithmétique, ce qui correspond en l'occurence au choix de métriques hermitiennes sur certains fibrés en droites. On écrit ensuite la fonction zêta comme la somme des fonctions zêta des fibres

$$Z_U(\mathscr{L}, s) = \sum_{b\in B(F)} \sum_{x\in U_b(F)} H_{\mathscr{L}}(x)^{-s} = \sum_{b\in B(F)} Z_{U_b}(\mathscr{L}|_{U_b}, s).$$

Chaque U_b est isomorphe au tore et on peut récrire la fonction zêta des hauteurs de U_b à l'aide de la formule de Poisson adélique. De cette façon, la fonction zêta de U apparaît comme une intégrale sur certains caractères du tore adélique de la fonction L d'Arakelov d'un torseur arithmétique sur B.

Cette expression nous permettra d'établir des théorèmes de montée ou de descente : supposons que B vérifie une conjecture, alors Y la vérifie ; réciproquement, supposons que Y la vérifie, alors, B aussi. Bien sûr, la méthode reprend les outils utilisés dans la démonstration de ces conjectures pour les variétés toriques ([**5, 3, 4**]).

Alors que le présent article contient des considérations générales de « théorie d'Arakelov équivariante » dont on peut espérer qu'elles seront utiles dans d'autres contextes, le deuxième verra intervenir des outils de théorie analytique des nombres (formule de Poisson, théorème des résidus, estimations, etc.).

Remerciements. — Nous remercions J.-B. Bost pour d'utiles discussions. Pendant la préparation de cet article, le second auteur(*) était invité à l'I.H.E.S. et à Jussieu ; il est reconnaissant envers ces institutions pour leur hospitalité.

Notations et conventions

Si $\mathscr{X}$ est un schéma, on désigne par $\mathrm{QCoh}(\mathscr{X})$ et $\mathrm{Fib}_d(\mathscr{X})$ les catégories des faisceaux quasi-cohérents (resp. des faisceaux localement libres de rang d) sur $\mathscr{X}$. On note $\mathrm{Pic}(\mathscr{X})$ le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathscr{X}$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{X}$, on note $\mathbf{V}(\mathscr{F}) = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}\mathscr{F}$ et $\mathbf{P}(\mathscr{F}) = \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}\mathscr{F}$ les fibrés vectoriels et projectifs associés à $\mathscr{F}$.

On note $\widehat{\mathrm{Fib}}_d(\mathscr{X})$ la catégorie des fibrés vectoriels hermitiens sur $\mathscr{X}$ (c'est-à-dire des faisceaux localement libres de rang d munis d'une métrique hermitienne continue

(*)partially supported by the N.S.A.

sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ et invariante par la conjugaison complexe). On note $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{X})$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites hermitiens sur $\mathscr{X}$.

Si $\mathscr{X}$ est un S-schéma, et si $\sigma \in S(\mathbf{C})$, on désigne par $\mathscr{X}_\sigma$ le $\mathbf{C}$-schéma $\mathscr{X} \times_\sigma \mathbf{C}$. Cette notation servira lorsque S est le spectre d'un localisé de l'anneau des entiers d'un corps de nombres F, de sorte que σ n'est autre qu'un plongement de F dans $\mathbf{C}$.

Si G est un schéma en groupes sur S, $X^*(G)$ désigne le groupe des S-homomorphismes $G \to \mathbf{G}_m$ (caractères algébriques).

Si $\mathscr{X}/S$ est lisse, le faisceau canonique de $\mathscr{X}/S$, noté $\omega_{\mathscr{X}/S}$ est la puissance extérieure maximale de $\Omega^1_{\mathscr{X}/S}$.

§ 1. Torseurs arithmétiques

1.1. Définitions

Rappelons la définition d'un torseur en géométrie algébrique.

Définition 1.1.1. — Soient S un schéma, $\mathscr{B}$ un S-schéma et G un S-schéma en groupes plat et localement de présentation finie.

Un *G-torseur* sur un $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{B}$-schéma $\pi : \mathscr{T} \to \mathscr{B}$ fidèlement plat et localement de présentation finie muni d'une action de G au-dessus de $\mathscr{B}$, $m : G \times_S \mathscr{T} \to \mathscr{T}$, de sorte que le morphisme

$$(m, p_2) : G \times_S \mathscr{T} \to \mathscr{T} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{T}$$

soit un isomorphisme. On le suppose de plus *localement trivial pour la topologie de Zariski.*

On note $\mathrm{H}^1(\mathscr{B}, G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-torseurs sur $\mathscr{B}$.

Situation 1.1.2. — *Supposons que S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres F et que G est un S-schéma en groupes linéaire connexe plat et de présentation finie. Fixons pour tout plongement complexe de F, $\sigma \in S(\mathbf{C})$, un sous-groupe compact maximal K_σ de $G(\mathbf{C})$ et notons $\mathbf{K}_\infty$ la collection $(K_\sigma)_\sigma$. On suppose que pour deux plongements complexes conjugués, les sous-groupes compacts maximaux correspondants sont échangés par la conjugaison complexe.*

Définition 1.1.3. — On appelle $(G, \mathbf{K}_\infty)$-*torseur arithmétique* sur $\mathscr{B}$ la donnée d'un G-torseur $\mathscr{T}$ sur $\mathscr{B}$ ainsi que pour tout $\sigma \in S(\mathbf{C})$, d'une section du $K_\sigma \backslash G_\sigma(\mathbf{C})$-fibré sur $\mathscr{B}_\sigma(\mathbf{C})$ quotient à $\mathscr{T}_\sigma(\mathbf{C})$ par l'action de K_σ. On suppose de plus que pour deux plongements complexes conjugués, les sections sont échangées par la conjugaison complexe.

On note $\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques sur $\mathscr{B}$.

On note aussi $\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty))$ l'ensemble des sections $g \in \mathrm{H}^0(\mathscr{B}, G)$ telles que pour toute place à l'infini σ, g définisse une section $\mathscr{B}_\sigma(\mathbf{C}) \to \mathbf{K}_\sigma$.

Remarque 1.1.4. — Se donner une section du $K_\sigma\backslash G_\sigma(\mathbf{C})$-fibré associé à $\mathscr{T}_\sigma(\mathbf{C})$ sur $\mathscr{B}_\sigma(\mathbf{C})$ revient à fixer dans un recouvrement ouvert (U_i) pour la topologie complexe les fonctions de transition $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G)$ à valeurs dans K_σ. Il en existe car $G_\sigma(\mathbf{C})$ est homéomorphe au produit de K_σ par un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, cf. par exemple [**7**].

D'autre part, on choisit dans cet article de supposer la section continue. Dans certaines situations, il pourrait être judicieux de la supposer indéfiniment différentiable.

La dépendance de cette notion en les sous-groupes maximaux fixés est la suivante : toute famille $(x_\sigma) \in \prod_\sigma G_\sigma(\mathbf{C})$ telle que $K'_\sigma = x_\sigma K_\sigma x_\sigma^{-1}$ détermine une bijection canonique

$$\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \simeq \widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}'_\infty)).$$

(Rappelons que deux sous-groupes compacts maximaux sont conjugués.)

1.1.5. *Variante adélique.* — Il existe une variante adélique des considérations précédentes qui supprime en apparence la référence à un modèle sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$. En effet, si $\mathscr{B}$ est propre sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$, remarquons que pour toute place finie de F, un G-torseur arithmétique sur $\mathscr{B}$ induit une section du morphisme $G(\mathfrak{o}_v)\backslash\mathscr{T}(F_v) \to \mathscr{B}(F_v)$.

Définition 1.1.6. — Soit G_F un F-schéma en groupes de type fini et fixons un sous-groupe compact maximal[1] $\mathbf{K} = \prod_v K_v$ du groupe adélique $G(\mathbf{A}_F)$. Soit $\mathscr{B}_F$ un F-schéma propre.

On appelle *$(G_F, \mathbf{K})$-torseur adélique* sur $\mathscr{B}_F$ la donnée d'un G_F-torseur $\mathscr{T}_F \to \mathscr{B}_F$, ainsi que pour toute place v de F, d'une section continue de $K_v\backslash\mathscr{T}_F(F_v) \to \mathscr{B}_F(F_v)$. On suppose de plus qu'il existe un ouvert non vide U de $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$, un U-schéma en groupes plat et de présentation fini G, un U-schéma $\mathscr{B}$ propre, plat et de type fini, ainsi qu'un G-torseur $\mathscr{T} \to \mathscr{B}$ qui prolongent respectivement G_F, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{T}_F$ et vérifiant : pour toute place finie v de F dominant U, $G(\mathfrak{o}_v) = K_v$ et la section continue de $K_v\backslash\mathscr{T}_F(F_v) \to \mathscr{B}_F(F_v)$ est celle fournie par le modèle $\mathscr{T} \to \mathscr{B}$.

On note $\overline{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}_F, (G_F, \mathbf{K}))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(G_F, \mathbf{K})$-torseurs adéliques sur $\mathscr{B}_F$.

Bien sûr, si $\mathscr{B}$ est un $\mathfrak{o}_F$-schéma propre et G un $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes plat et de présentation finie, tout $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique sur $\mathscr{B}$ définit un $(G_F, \mathbf{K})$-torseur adélique où $\mathbf{K}$ est le compact adélique $\prod_{v \text{ finie}} G(\mathfrak{o}_v) \prod_\sigma K_\sigma$.

1.1.7. *Exemples.* — a) Quand $G = \mathrm{GL}(d)$, le torseur $\mathscr{T}$ correspond naturellement à la donnée d'un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang d sur $\mathscr{B}$ par la formule $\mathscr{T} = \mathbf{Isom}(\mathscr{O}_{\mathscr{B}}^n, \mathscr{E})$. Si l'on choisit $K_\sigma = \mathrm{U}(d)$, une section du $\mathrm{U}(d, \mathbf{C})\backslash \mathrm{GL}(d, \mathbf{C})$-fibré associé correspond à une métrique hermitienne (continue) sur $\mathscr{E}$. Ainsi, les $(\mathrm{GL}(d), \mathrm{U}(d))$-torseurs arithmétiques sont en bijection naturelle avec les fibrés vectoriels hermitiens.

[1] Cela signifiera pour nous que les K_v sont des sous-groupes compacts ouverts aux places finies, et maximaux aux places infinies.

b) En particulier, lorsque $G = \mathbf{G}_m$, la famille des sous-groupes compacts maximaux $\mathbf{K}_\infty$ est canoniquement définie (ce qui permet de les omettre dans la notation) et $\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, \mathbf{G}_m) = \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})$, le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur $\mathscr{B}$ munis d'une métrique hermitienne continue compatible à la conjugaison complexe. Les $\mathbf{G}_m$-torseurs adéliques s'identifient de même aux fibrés inversibles munis d'une métrique adélique. Nous rappelons cette théorie au paragraphe 1.3

c) Dans ce texte, nous ne considérons que des G-torseurs localement triviaux pour la topologie de Zariski. Néanmoins, lorsque G/S est un S-schéma abélien, un exemple de G-torseur localement trivial pour la topologie étale sur $\mathscr{B}$ est fourni par un schéma abélien $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ obtenu par torsion de G/S, c'est-à-dire tel qu'il existe un revêtement étale $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ de sorte que $\mathscr{A} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ soit isomorphe à $G \times_S \mathscr{B}'$ (famille de schémas abéliens à module constant). De tels exemples devraient bien sûr faire partie d'une étude plus générale de la géométrie d'Arakelov des torseurs que nous reportons à une occasion ultérieure.

1.2. Propriétés

Les ensembles de classes d'isomorphisme de $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques vérifient un certain nombre de propriétés formelles, dont les analogues algébriques sont bien connus. Leur démonstration est standard et laissée au lecteur.

Proposition 1.2.1. — *L'oubli de la structure arithmétique induit une application*

$$\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{B}, G).$$

On a aussi une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \to \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{B}, G) \to \left(\bigoplus_\sigma \Gamma(\mathscr{B}_\sigma(\mathbf{C}), K_\sigma \backslash G_\sigma(\mathbf{C})) \right)^{F_\infty} \to$$
$$\to \widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{B}, G) \to 1.$$

Remarque 1.2.2. — Lorsque $G = \mathbf{G}_m$, en identifiant $\mathbf{G}_m(\mathbf{C})/K$ à $\mathbf{R}_+^*$, nous retrouvons la suite exacte bien connue pour $\widehat{\mathrm{Pic}}$ et Pic (cf. [**14**], 3.3.5 ou 3.4.2).

D'autre part, on devrait pouvoir interpréter cette suite exacte à l'aide de la *mapping cylinder category* introduite par S. Lichtenbaum dans son étude des valeurs spéciales des fonctions zêta des corps de nombres. En effet, cette catégorie est (? !) la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur, disons $\operatorname{Spec} \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.2.3. — *Supposons que le groupe G est commutatif. Alors, les sous-groupes compacts maximaux sont uniques et l'ensemble $\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty))$ hérite d'une structure de groupe abélien compatible avec la structure de groupe abélien sur $\mathrm{H}^1(\mathscr{B}, G)$. Dans ce cas, la suite exacte 1.2.1 est une suite exacte de groupes abéliens.*

PROPOSITION 1.2.4. — (Changement de base) *Tout morphisme de S-schémas $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ induit un foncteur des $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques sur $\mathscr{B}$ vers les $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques sur $\mathscr{B}'$, compatible à l'oubli des structures arithmétiques et aux classes d'isomorphisme.*

(Changement du corps de base) *Si F' est une extension de F, $S' = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_{F'}$ et si on choisit pour tout plongement complexe σ' de F' $K_{\sigma'} = K_{\sigma'|_F}$, on dispose d'un foncteur des $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques sur $\mathscr{B}$ vers les $(G \times_S S', \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques sur $\mathscr{B} \times_S S'$, compatible à l'oubli des structures arithmétiques et aux classes d'isomorphisme.*

PROPOSITION 1.2.5. — (Changement de groupe) *Si $p : G \to G'$ est un morphisme de S-schémas en groupes et que les sous-groupes compacts maximaux $\mathbf{K}_\infty$ et $\mathbf{K}'_\infty$ sont choisis de sorte que pour tout plongement complexe σ, tel que $p(K'_\sigma) \subset K'_\sigma$, il y a un foncteur des $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques vers les $(G', \mathbf{K}'_\infty)$-torseurs arithmétiques, compatible à l'oubli des structures arithmétiques et aux classes d'isomorphisme.*

(Suite exacte courte) *Soit*

$$1 \to G'' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} G' \to 1$$

une suite exacte de S-schémas en groupes. Soient $\mathbf{K}_\infty$, $\mathbf{K}'_\infty$ et $\mathbf{K}''_\infty$ des familles de sous-groupes compacts maximaux pour G, G' et G'' aux places archimédiennes choisis de sorte que $K''_\sigma = \iota^{-1}(K_\sigma)$ et $p(K_\sigma) = K'_\sigma$ pour toute place σ.

Si p admet localement une section (comme S-schéma), alors on a une suite exacte courte canonique d'ensembles pointés :

$$1 \to \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{B}, (G'', \mathbf{K}''_\infty)) \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \xrightarrow{p} \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{B}, (G', \mathbf{K}'_\infty)) \xrightarrow{\delta}$$
$$\to \widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G'', \mathbf{K}''_\infty)) \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \xrightarrow{\pi} \widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G', \mathbf{K}'_\infty)).$$

Sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseurs arithmétiques a une description très simple, similaire à la description classique des classes d'isomorphisme de G-torseurs sur une courbe projective sur un corps fini. Cela généralise la description analogue du groupe $\widehat{\operatorname{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F)$ (cf. [**14**], 3.4.3, p. 131, où le groupe correspondant est noté $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F)$).

PROPOSITION 1.2.6. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$\widehat{\mathrm{H}}^1(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F, (G, \mathbf{K}_\infty)) \simeq G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F) / \mathbf{K}_G,$$

où $\mathbf{K}_G$ désigne le produit $\prod_{v \text{ finie}} G(\mathfrak{o}_v) \prod_{\sigma \text{ infinie}} K_\sigma$.

De même, pour un sous-groupe compact maximal $\mathbf{K}$ de $G(\mathbf{A}_F)$, on a un isomorphisme canonique

$$\overline{\mathrm{H}}^1(\operatorname{Spec} F, (G_F, \mathbf{K})) \simeq G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F) / \mathbf{K}.$$

Démonstration. — Soit $\widehat{\mathscr{T}}$ un $(G, \mathbf{K})$-torseur arithmétique sur $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_F)$, localement trivial pour la topologie de Zariski. Commençons par fixer un section $\tau_F \in \mathscr{T}(F)$. Si v

est une place finie de F, comme $\mathrm{H}^1(\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_v, G) = 0$, il existe une section $\tau_v \in \mathscr{T}(\mathfrak{o}_v)$, unique modulo l'action de $G(\mathfrak{o}_v)$. Cette section se relie à τ_F par un élement bien défini $g_v \in G(F_v)/G(\mathfrak{o}_v)$ tel que $g_v^{-1} \cdot \tau_F = \tau_v$. Comme τ_F s'étend en une section de $\mathscr{T}$ sur un ouvert de $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$, on a $g_v \in \mathbf{K}_v$ pour presque toute place v. D'autre part, si σ est une place infinie, la section de $K_\sigma\backslash\mathscr{T}(\mathbf{C})$ donnée par la structure de $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique est de la forme $K_\sigma g_\sigma^{-1}\tau_F$, pour un unique $g_\sigma \in G(\mathbf{C})/K_\sigma$. On a ainsi défini un élement $\mathbf{g}$ dans $G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$. Il dépend de la section τ_F, mais si on choisit une autre section, elle sera de la forme $g_F\tau_F$, ce qui revient à changer l'élément $\mathbf{g}$ par $g_F^{-1}\mathbf{g}$. Nous avons donc attaché au $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique $\widehat{\mathscr{T}}$ un élément dans $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$ qui visiblement ne dépend que de la classe d'isomorphisme de $\widehat{\mathscr{T}}$.

Pour la bijection réciproque, on choisit un représentant de $\mathbf{g} \in G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$ où pour toute place finie v, $g_v \in G(F)$, et où presque tous les g_v valent 1. Soit alors U le plus grand ouvert de $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ tel que pour toute place finie v, $g_v \in G(U)$; si v est une place finie qui ne domine pas U, soit $U_v = U \cup \{v\}$. On définit un G-torseur $\mathscr{T}$ sur $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ comme isomorphe à G sur U et sur chaque U_v, les isomorphismes de transition étant fixés par l'isomorphisme entre $\mathscr{T}|_U = G|_U$ et $\mathscr{T}|_{U_v} \times U = G|_U$ induit par la multiplication à gauche par g_v^{-1}. On munit ce G-torseur de la K_σ-classe à gauche $K_\sigma g_\sigma^{-1}$ dans la trivialisation canonique sur l'ouvert U qui contient $\operatorname{Spec} F$, d'où un $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique sur $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier plus en détail que la classe d'isomorphisme du $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique ainsi construit est indépendante du représentant choisi, et que cela définit effectivement la bijection réciproque voulue.

La variante adélique $\overline{\mathrm{H}}^1(\operatorname{Spec} F, (G_F, \mathbf{K}))$ se traite de même (et plus facilement car on n'a pas de torseur à construire !). □

Remarque 1.2.7. — On aurait aussi pu construire le G-torseur $\mathscr{T}$ associé à un point adélique (g_v) en décrétant que les sections de $\mathscr{T}$ sur un ouvert U de $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ sont les $\gamma \in G(F)$ tels que pour toute place finie v dominant U, $\gamma g_v \in G(\mathfrak{o}_v)$.

1.3. Métriques adéliques

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la théorie des métriques adéliques sur les fibrés en droites. C'est un cas particulier bien connu des constructions précédentes lorsque le groupe est $\mathbf{G}_m$, mais l'exposer nous permettra de fixer quelques notations.

Définition 1.3.1. — Soient F un corps valué, X un schéma de type fini sur F et $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X. Une métrique sur $\mathscr{L}$ est une application continue $\mathbf{V}(\mathscr{L}^\vee)(F) \to \mathbf{R}_+$ de sorte que pour tout $x \in X(F)$, la restriction de cette application à la fibre en x (identifiée naturellement à F) soit une norme.

Soient F un corps de nombres, X un schéma projectif sur F et $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X. La donnée d'un schéma projectif et plat $\widetilde{X}$ sur le spectre $S = \operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ de l'anneau des entiers de F dont la fibre générique est X définit pour toute place non-archimédienne v de F une métrique sur le fibré en droites $\mathscr{L} \otimes F_v$ sur $X \times F_v$.

Définition 1.3.2. — On appelle *métrique adélique* sur $\mathscr{L}$ toute collection de métriques $(\|\cdot\|_v)_v$ sur $\mathscr{L} \otimes F_v$ pour toutes les places v de F qui est obtenue de cette façon pour presque toutes les places (non-archimédiennes) de F.

On note $\overline{\mathrm{Pic}}(X) = \overline{\mathrm{H}}^1(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X munis de métriques adéliques.

Donnons nous une métrique adélique sur $\mathscr{L}$. Tout morphisme $f : Y \to X$ de F-schémas projectifs fournit par image réciproque une métrique adélique sur $f^*\mathscr{L}$. Si Y n'est pas projective, on obtient tout de même de la sorte une collection de métriques pour toutes les places de F.

Définition 1.3.3. — Si $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|\cdot\|_v)_v)$ est un fibré en droites sur X muni d'une métrique adélique, on appelle *fonction hauteur* (exponentielle) associée à $\overline{\mathscr{L}}$ la fonction

$$H(\overline{\mathscr{L}}; \cdot) : X(F) \to \mathbf{R}_+, \quad x \mapsto \prod_v \|\mathsf{s}\|_v (x)^{-1},$$

s étant une section non nulle arbitraire de $\mathscr{L}|_x \simeq F$.

Si s est une section globale non nulle de $\mathscr{L}$, on définit une *fonction hauteur* (exponentielle) *sur les points adéliques de* X en posant

$$H(\overline{\mathscr{L}}, \mathsf{s}; \cdot) : X(\mathbf{A}_F) \setminus |\operatorname{div}(s)| \to \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{x} = (x_v)_v \mapsto \prod_v \|\mathsf{s}\|_v (x_v)^{-1}.$$

(Dans les deux cas, le produit converge en effet car il n'y a qu'un nombre fini de termes différents de 1.) D'autre part, elle est multiplicative en le fibré en droites (resp. en la section), ce qui permettra de l'étendre aux groupes de Picard tensorisés par $\mathbf{C}$.

Comme on a un isomorphisme canonique $\overline{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} F) = \widehat{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F)$, on remarque que

$$H(\overline{\mathscr{L}}; x) = \exp(\widehat{\deg}\, \overline{\mathscr{L}}|_x)$$

où $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F) \to \mathbf{R}$ est l'homomorphisme « degré arithmétique » défini dans [**14**], 3.4.3, p. 131. Par l'isomorphisme de *loc. cit.,*

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F) \to F^\times \backslash \mathbf{A}_F^\times / K,$$

$\exp \circ \widehat{\deg}$ correspond à l'inverse de la norme.

Définition 1.3.4. — Soit X une variété sur F, $\overline{\mathscr{L}} \in \overline{\mathrm{Pic}}(X)_{\mathbf{C}}$ (le groupe des fibrés inversibles sur X munis d'une métrique adélique tensorisé par $\mathbf{C}$). Si $U \subset X$ est un ouvert de Zariski, on appelle fonction zêta des hauteurs de U en $\overline{\mathscr{L}}$ la somme

$$Z_U(\overline{\mathscr{L}}) = \sum_{x \in U(F)} H(\overline{\mathscr{L}}; x)^{-1}$$

quand elle existe.

Remarque 1.3.5. — La convergence absolue de la série ne dépend que de la partie réelle de $\overline{\mathscr{L}}$ dans $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$ (on peut comparer deux métriques adéliques). De plus, l'ensemble des $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$ pour lesquels la série converge est une partie convexe (inégalité arithmético-géométrique). Enfin, si $\mathscr{L}$ est ample, alors $Z_U(s\overline{\mathscr{L}})$ converge pour $\Re(s)$ assez grand et définit une fonction analytique de s, notée $Z_U(\overline{\mathscr{L}}, s)$ dans l'introduction.

Les considérations analogues sont évidemment valables pour le groupe de Picard–Arakelov $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{X})$ d'un modèle propre et plat $\mathscr{X}$ de X sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$.

Exemple 1.3.6. — Lorsque X est une variété torique, $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$ est un espace vectoriel de dimension finie et il y a des métriques canoniques sur les fibrés en droites sur X (cf. [**3**]), d'où un homomorphisme canonique $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{C}} \to \overline{\mathrm{Pic}}(X)_{\mathbf{C}}$. Batyrev et Tschinkel ont montré dans [**5**] que la série définissant la fonction zêta des hauteurs du tore converge dès que $\mathscr{L} \otimes \omega_X$ est dans l'intérieur du cône effectif $\Lambda_{\mathrm{eff}}^{\circ}(X) \subset \mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$, le fibré en droites $\mathscr{L}$ étant muni de sa métrique adélique canonique. Elle définit même une fonction holomorphe dans le tube sur ce cône.

1.4. Fonctions L d'Arakelov

On se place dans la situation 1.1.2. Soient $\mathscr{B}$ un schéma propre et fidèlement plat sur $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$ et $\widehat{\mathscr{T}}$ un $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique sur $\mathscr{B}$.

Pour tout $b \in \mathscr{B}(F)$, il existe une unique section $\varepsilon_b : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F \to \mathscr{B}$ qui prolonge b. On dispose ainsi d'un $(G, \mathbf{K}_\infty)$-torseur arithmétique $\varepsilon_b^* \widehat{\mathscr{T}}$ sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$ que l'on notera $\widehat{\mathscr{T}}|_b$. En particulier, si Φ est une fonction à valeurs complexes sur

$$G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F) / \mathbf{K}_G \simeq \widehat{\mathrm{H}}^1(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F, (G, \mathbf{K}_\infty)),$$

la composition

$$\widehat{\mathrm{H}}^1(\mathscr{B}, (G, \mathbf{K}_\infty)) \xrightarrow{\varepsilon_b} \widehat{\mathrm{H}}^1(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F, (G, \mathbf{K}_\infty)) \xrightarrow{\chi} \mathbf{C}$$

définit un nombre complexe $\Phi(\widehat{\mathscr{T}}|_b)$.

Définition 1.4.1. — Soient Φ une fonction sur $G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F) / \mathbf{K}_G$ et U une partie de $\mathscr{B}(F)$. On appelle *fonction L d'Arakelov* l'expression

$$L(\widehat{\mathscr{T}}, U, \chi) = \sum_{b \in U \subset \mathscr{B}(F)} \Phi(\widehat{\mathscr{T}}|_b),$$

quand la série converge (absolument).

1.4.2. *Exemple.* — Soit $\widehat{\mathscr{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathscr{B})$ identifié au $\mathbf{G}_m$-torseur arithmétique qu'il définit. Si U est l'ensemble des points rationnels d'un ouvert de $\mathscr{B}$, la fonction L d'Arakelov $L(\widehat{\mathscr{L}}, U, \|\cdot\|^s)$ définie au § 1.4 ($\|\cdot\|$ désigne la norme adélique) n'est autre que la fonction zêta d'Arakelov $Z_U(\mathscr{L}, s)$, introduite par Arakelov et largement étudiée depuis.

En revanche, lorsque χ est un quasi-caractère arbitraire de $\widehat{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F)$ (pour la topologie adélique), on obtient un nouvel invariant $L(\widehat{\mathscr{L}}, U, \chi)$ dont l'importance apparaîtra à la fin de cet article.

Remarque 1.4.3. — Bien entendu, on définit de la même façon une fonction L d'Arakelov, $L(\overline{\mathscr{T}}, U, \Phi)$ attachée à un torseur adélique $\overline{\mathscr{T}}$ sur $\mathscr{B}$ (sur F) et à une fonction Φ sur $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}$.

1.4.4. *Fonctions θ et ζ.* — Dans la suite de cette section, on suppose pour simplifier que $F = \mathbf{Q}$. Un $\mathrm{GL}(d)$-torseur arithmétique $\widehat{E}$ sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ (pour le choix du sous-groupe compact maximal $U(d)$) n'est autre qu'un $\mathbf{Z}$-module libre de rang d muni d'une norme euclidienne, auquel on sait attacher (au moins) deux invariants :

$$\theta(\widehat{E}, t) = \sum_{e \in \widehat{E}} \exp(-\pi t \, \|e\|^2) \quad \text{et} \quad \zeta(\widehat{E}, s) = \sum_{e \in \widehat{E} \setminus \{0\}} \frac{1}{\|e\|^s}.$$

(Ces séries convergent respectivement pour $\Re(t) > 0$ et $\Re(s) > d$.) Comme il est bien connu, la formule de Poisson standard implique l'équation fonctionnelle

$$\theta(\widehat{E}, t) = \frac{1}{t^{d/2} \operatorname{vol}(\widehat{E})} \theta(\widehat{E}^\vee, 1/t)$$

où $\operatorname{vol}(\widehat{E}) = \exp(-\widehat{\deg}\, \widehat{E})$ est le covolume du réseau $\widehat{E}$ dans $\widehat{E} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^d$, $\widehat{E}^\vee$ désigne le réseau dual (muni de la norme euclidienne duale) et où la détermination de $t^{d/2}$ est usuelle pour $t > 0$. Il est aussi bien connu comment utiliser cette équation pour en déduire que la fonction définie par

$$\Lambda(\widehat{E}, s) = \sqrt{\operatorname{vol}(\widehat{E})} \zeta(\widehat{E}, s) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$$

possède un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, avec des pôles simples en $s = 0$ et $s = d$ de résidus respectivement $-2\sqrt{\operatorname{vol}(\widehat{E})}$ et $2/\sqrt{\operatorname{vol}(\widehat{E})}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(\widehat{E}, s) = \Lambda(\widehat{E}^\vee, d - s).$$

Sur un corps de nombres quelconque, il faudrait tenir compte de la différente, comme dans l'article récent de van der Geer et Schoof [**13**]. Selon ces mêmes auteurs, l'invariant $\theta(\widehat{E}, 1)$ mesure l'*effectivité* du fibré vectoriel hermitien $\widehat{E}$. Ils interprètent en particulier l'équation fonctionnelle de la fonction θ comme une formule de Riemann–Roch.

1.4.5. *Exemples exotiques de fonctions L.* — Soit maintenant $\widehat{\mathscr{E}} \in \widehat{\mathrm{Fib}}_d(\mathscr{B})$. On peut définir des fonctions L d'Arakelov (pour une partie $U \subset \mathscr{B}(F)$ fixée)

$$\Theta(\widehat{\mathscr{E}}, s) = L(\widehat{\mathscr{E}}, U, \theta(\cdot, 1) \operatorname{vol}(\cdot)^s) = \sum_{b \in U \subset \mathscr{B}(F)} \theta(\widehat{\mathscr{E}}|_b, 1) \operatorname{vol}(\widehat{\mathscr{E}}|_b)^s$$

et

$$Z(\widehat{\mathscr{E}}, s) = L(\widehat{\mathscr{E}}, U, \zeta(\cdot, ds) \operatorname{vol}(\cdot)^s) = \sum_{b \in U \subset \mathscr{B}(F)} \zeta(\widehat{\mathscr{E}}|_b, ds) \operatorname{vol}(\widehat{\mathscr{E}}|_b)^s$$

et l'on a les égalités, où chacun des membres converge absolument quand l'autre converge absolument,

$$\Theta(\widehat{\mathscr{E}}, s) = \Theta(\widehat{\mathscr{E}}^\vee, 1 - s) \quad \text{et} \quad Z(\widehat{\mathscr{E}}, s) = Z(\widehat{\mathscr{E}}^\vee, 1 - s).$$

Par exemple, pour $\mathscr{B} = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$ et $\widehat{\mathscr{E}} = \mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)$ avec la métrique « max. des coordonnées », on a

$$\Theta(\widehat{\mathscr{E}}, s) = \sum_{N\geq 1} 2(1+2\varphi(N))\theta(N^2)N^{1-s},$$

expression qui converge pour $\Re(s) > 3$ et dans laquelle θ désigne la fonction thêta de Riemann.

§ 2. Espaces fibrés

2.1. Constructions

Situation 2.1.1. — *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes linéaire et plat, dont on suppose pour simplifier les fibres géométriquement connexes $f : \mathscr{X} \to S$ un S-schéma plat (quasi-compact et quasi-séparé), muni d'une action de G/S. Soient aussi $g : \mathscr{B} \to S$ un S-schéma plat ainsi qu'un G-torseur $\mathscr{T} \to \mathscr{B}$ localement trivial pour la topologie de Zariski.*

Construction 2.1.2. — *On définit un S-schéma $\mathscr{Y}$, muni d'un morphisme $\pi : \mathscr{Y} \to \mathscr{B}$ localement isomorphe à $\mathscr{X}$ sur $\mathscr{B}$, par le changement de groupe structural $G \to \mathrm{Aut}_S(\mathscr{X})$.*

En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$ tel qu'il existe une trivialisation $\varphi_i : G\times_S U_i \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}|_{U_i}$. Si $i, j \in I$, soit $g_{ij} \in \Gamma(U_i\cap U_j, G)$ l'unique section telle que $\varphi_i = g_{ij}\varphi_j$ sur $U_i \cap U_j$. En particulier, les g_{ij} donnent un cocycle dont la classe dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{B}, G)$ représente la classe d'isomorphisme du G-torseur $\mathscr{T}$. Posons $\mathscr{Y}_i = \mathscr{X}\times_S U_i$; alors, g_{ij} agit sur $\mathscr{X}\times_S (U_i\cap U_j)$ et induit un isomorphisme

$$\varphi_{ij} : \mathscr{Y}_j|_{U_i\cap U_j} \simeq \mathscr{Y}_i|_{U_i\cap U_j}$$

que l'on utilise pour recoller les $\mathscr{Y}_i$.

On laisse vérifier que $\mathscr{Y}$ est un $\mathscr{B}$-schéma bien défini, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas à isomorphisme canonique près du choix des trivialisations locales que l'on a fait.

Lemme 2.1.3. — *On a $\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{Y}} = g^* f_*\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$.*

Remarque 2.1.4. — Dans certains cas, $\mathscr{Y}$ hérite d'une action d'un sous-groupe de G, notamment quand G est commutatif.

Construction 2.1.5. — *Il résulte de la construction précédente une application*

$$\vartheta : \mathrm{Z}^{d,G}(\mathscr{X}) \to \mathrm{Z}^d(\mathscr{Y})$$

des cycles G-invariants de codimension d sur $\mathscr{X}$ dans les cycles de codimension d sur $\mathscr{Y}$.

Définition 2.1.6. — Une *G-linéarisation* d'un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{X}$ est une action de G sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ qui relève l'action de G sur $\mathscr{X}$.

Un morphisme (resp. le produit tensoriel, le dual, la somme directe, le faisceau des homomorphismes, des extensions, etc.) de faisceaux quasi-cohérents G-linéarisés est défini naturellement. On note $\mathrm{QCoh}^G(\mathscr{X})$ (resp. $\mathrm{Fib}_d^G(\mathscr{X})$, resp. $\mathrm{Pic}^G(\mathscr{X})$) la catégorie des faisceaux quasi-cohérents (resp. de fibrés vectoriels de rang d, resp. des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles) G-linéarisés sur $\mathscr{X}$.

CONSTRUCTION 2.1.7. — *On construit un foncteur*

$$\vartheta : \mathrm{QCoh}^G(\mathscr{X}) \to \mathrm{QCoh}(\mathscr{Y})$$

qui est compatible avec les opérations standard sur les faisceaux quasi-cohérents.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent G-linéarisé sur $\mathscr{X}$. Reprenons les notations de la construction 2.1.2 de $\mathscr{Y}$. Posons $\mathscr{F}_i$ le faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{Y}_i = \mathscr{X} \times_S U_i$ image réciproque de $\mathscr{F}$ par la première projection. Grâce à la G-linéarisation sur $\mathscr{F}$, les g_{ij} induisent des isomorphismes

$$\varphi_{ij}^* \mathscr{F}_j|_{\mathscr{X} \times (U_i \cap U_j)} \simeq \mathscr{F}_i|_{\mathscr{X} \times (U_i \cap U_j)}$$

qui fournissent par recollement un faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{Y}$.

On laisse vérifier que ce foncteur est bien défini, c'est-à-dire, est indépendant des choix que l'on a fait.

Si $\mathscr{F}$ est un fibré vectoriel G-linéarisé de rang d sur $\mathscr{X}$, il est clair que le faisceau obtenu sur $\mathscr{Y}$ est aussi un fibré vectoriel de rang d.

On laisse vérifier que cette application est compatible aux opérations standard, et en particulier qu'elle descend en une application sur les classes d'isomorphisme.

Un cas particulier des constructions précédentes est obtenu lorsque $\mathscr{X} = S$, auquel cas $\mathscr{Y} = \mathscr{B}$. On notera $\eta_{\mathscr{T}}$ l'application qui en résulte des faisceaux quasi-cohérents sur S avec action de G/S vers les faisceaux quasi-cohérents sur $\mathscr{B}$. Bien sûr, $\eta_{\mathscr{T}} : \mathrm{Rep}_d(G) \to \mathrm{Fib}_d(\mathscr{B})$ n'est autre que l'application usuelle de changement de groupe structural (passage d'un G-torseur à un $\mathrm{GL}(d)$-torseur).

PROPOSITION 2.1.8. — *Le faisceau $\Omega^1_{\mathscr{X}/S}$ est muni d'une linéarisation canonique de G. Par la construction 2.1.7, on obtient le faisceau $\Omega^1_{\mathscr{X}/\mathscr{B}}$.*

Supposons en particulier que $\mathscr{X}$ et $\mathscr{B}$ sont lisses sur S ; le faisceau canonique sur $\mathscr{X}/S$ est alors automatiquement G-linéarisé et on a un isomorphisme

$$\omega_{\mathscr{Y}/S} \simeq \vartheta(\omega_{\mathscr{X}/S}) \otimes \pi^* \omega_{\mathscr{B}/S}.$$

Démonstration. — Si (U_i) est un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$ avec des isomorphismes $(\varphi_i, \pi) : \pi^{-1}(U_i) \simeq \mathscr{X} \times_S U_i$ comme dans la construction 2.1.2, on a un isomorphisme naturel

$$\Omega^1_{\mathscr{Y}/\mathscr{B}}|_{\pi^{-1}(U_i)} = \Omega^1_{\pi^{-1}(U_i)/U_i} \simeq \varphi_i^* \Omega^1_{\mathscr{X}/S}$$

qui se recollent précisément comme dans la construction 2.1.7.

Dans le cas où $\mathscr{X}/S$ et $\mathscr{B}/S$ sont lisses, la suite exacte

$$0 \to \Omega^1_{\mathscr{Y}/\mathscr{B}} \to \Omega^1_{\mathscr{Y}/S} \to \Omega^1_{\mathscr{B}/S} \to 0$$

implique que

$$\omega_{\mathscr{Y}/S} \simeq \det \Omega^1_{\mathscr{Y}/\mathscr{B}} \otimes \pi^*\omega_{\mathscr{B}/S} \simeq \vartheta(\omega_{\mathscr{X}/\mathscr{B}}) \otimes \pi^*\omega_{\mathscr{B}/S}. \qquad \square$$

LEMME 2.1.9. — *Si $\mathscr{F} \in \mathrm{QCoh}^G(\mathscr{X})$, $f_*\mathscr{F}$ est muni d'une action naturelle de G et $g_*\vartheta(\mathscr{F})$ est canoniquement isomorphe à $\eta_{\mathscr{T}}(f_*\mathscr{F})$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

PROPOSITION 2.1.10. — *Soient $(\lambda, \alpha) \in \mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}) \times \mathrm{Pic}(\mathscr{B})$. Le fibré en droites $\vartheta(\lambda) \otimes \pi^*\alpha$ sur $\mathscr{Y}$ est effectif si et seulement si le fibré vectoriel sur $\mathscr{B}$*

$$\eta_{\mathscr{T}}(f_*\lambda) \otimes \alpha$$

est effectif. Cela implique que λ est effectif.

Démonstration. — On a

$$\pi_*(\vartheta(\lambda) \otimes \pi^*\alpha) = \pi_*(\vartheta(\lambda)) \otimes \alpha = \eta_{\mathscr{T}}(f_*\lambda) \otimes \alpha$$

d'après le lemme 2.1.9. □

Notons ι le morphisme de groupes naturel $X^*(G) \to \mathrm{Pic}^G(\mathscr{X})$ qui associe à un caractère χ le fibré trivial muni de la linéarisation telle que G agit par χ sur le second facteur de $\mathscr{X} \times_S \mathbf{A}^1_S$.

PROPOSITION 2.1.11. — *Pour tout caractère χ, il existe un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles*

$$\vartheta(\iota(\chi)) \simeq \pi^*\eta_{\mathscr{T}}(\chi).$$

Démonstration. — Soit (U_i) un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$ avec des isomorphismes $(\varphi_i, \pi) : \pi^{-1}(U_i) \simeq \mathscr{X} \times_S U_i$; notons $g_{ij} \in G(U_i \cap U_J)$ tel que $\varphi_i = g_{ij} \cdot \varphi_j : \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \to \mathscr{X}$. Alors, le fibré en droites $\vartheta(\iota(\chi))$ est obtenu en recollant $\mathbf{A}^1 \times \mathscr{X} \times U_i$ et $\mathbf{A}^1 \times \mathscr{X} \times U_j$ par le morphisme $(t, x, u) \mapsto (\chi(g_{ij})t, g_{ij} \cdot x, u)$.

D'autre part, $\eta_{\mathscr{T}}(\chi)$ est un fibré en droite sur $\mathscr{B}$ obtenu en recollant $\mathbf{A}^1 \times U_i$ et $\mathbf{A}^1 \times U_j$ par $(t, u) \mapsto (\chi(g_{ij})t, u)$. □

2.2. Groupe de Picard

Dans ce paragraphe, on suppose que S est le spectre d'un corps F de caractéristique 0. On cherche à exprimer le groupe de Picard de $\mathscr{Y}$ en fonction de ceux de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{B}$. Pour cela, on se place sous les hypothèses suivantes :

2.2.1. *Hypothèses sur $\mathscr{X}$.* — On suppose que

1. $\mathscr{X}$ est propre, lisse, géométriquement intègre ;
2. $\mathrm{H}^1(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) = 0$;
3. $\mathscr{X}(F)$ est non vide ;
4. tout fibré en droites sur $\mathscr{X}$ est G-linéarisable, et de même après toute extension algébrique de F ;

5. $\operatorname{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}})$ est sans torsion.

Remarque 2.2.2. — Ces hypothèses concernant $\mathscr{X}$ sont vérifiées lorsque $\mathscr{X}$ est une variété torique projective déployée sur F, ou bien un espace de drapeaux généralisé pour un groupe algébrique déployé sur F.

Elles entraînent que les groupes de Picard et de Néron-Séveri de $\mathscr{X}_{\overline{F}}$ coïncident (voir la preuve du lemme 2.2.3 plus bas). En particulier, $\operatorname{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}})$ est sous ces hypothèses un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini.

D'autre part, il est prouvé dans [**15**], Cor. 1.6, p. 35, que sous l'hypothèse (i), tout fibré en droites sur $\mathscr{X}$ admet une puissance G-linéarisable. (Rappelons que G est connexe.) Le lecteur qui désirerait s'affranchir de cette hypothèse vérifiera que de nombreux résultats de la suite de ce texte restent vrais, au moins après tensorisation par $\mathbf{Q}$.

LEMME 2.2.3. — *Si les hypothèses 2.2.1 sont satisfaites, on a les deux assertions :*

- $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) = F$;
- *pour tout F-schéma connexe U possédant un point F-rationnel, l'homomorphisme naturel*
$$\operatorname{Pic}(\mathscr{X}) \times \operatorname{Pic}(U) \to \operatorname{Pic}(\mathscr{X} \times_F U)$$
est un isomorphisme.

Démonstration. — La première proposition découle de la factorisation de Stein. Pour la seconde, on a d'après [**8**, 8.1/4] une suite exacte
$$0 \to \operatorname{Pic}(U) \to \operatorname{Pic}(\mathscr{X} \times_F U) \to \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(U) \to 0.$$
En particulier, $\operatorname{Pic}(\mathscr{X}) = \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(F)$. La nullité de $\mathrm{H}^1(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}})$ implique que $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}$ est de dimension 0, donc que sa composante neutre $\operatorname{Pic}^0_{\mathscr{X}/F} = 0$ puisque F est de caractéristique nulle. Ainsi, $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}$ est discret. Alors, tout point rationnel $u \in U(F)$ définit un homomorphisme $u^* : \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(U) \to \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(F)$ qui par connexité est l'inverse de l'homomorphisme naturel $\operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(F) \to \operatorname{Pic}_{\mathscr{X}/F}(U)$. □

THÉORÈME 2.2.4. — *Si ι désigne le morphisme de groupes $X^*(G) \to \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$ introduit au paragraphe précédent, considérons l'homomorphisme*
$$\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}) \oplus \operatorname{Pic}(\mathscr{B}) \to \operatorname{Pic}(\mathscr{Y}), \quad (\lambda, \alpha) \mapsto \vartheta(\lambda) \otimes \pi^*\alpha.$$
Si les hypothèses 2.2.1 sont satisfaites et si $\mathscr{B}(F)$ est Zariski-dense dans $\mathscr{B}$, alors la suite
$$0 \to X^*(G) \xrightarrow{(\iota, -\eta_{\mathscr{T}})} \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}) \oplus \operatorname{Pic}(\mathscr{B}) \xrightarrow{\vartheta \otimes \pi^*} \operatorname{Pic}(\mathscr{Y}) \to 0$$
est exacte.

Démonstration. — Si $\iota(\chi)$ est trivial dans $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$, il résulte de ce que $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) = F$ que χ est nécessairement le caractère trivial. En particulier, le premier homomorphisme est injectif.

La proposition 2.1.11 implique que la composition des deux premiers homomorphismes est nulle.

Si λ est un fibré en droites G-linéarisé sur $\mathscr{X}$ et α est un fibré en droites sur $\mathscr{B}$, $\vartheta(\lambda)\otimes\pi^*\alpha$ est un fibré en droites sur $\mathscr{Y}$ dont la classe d'isomorphisme ne dépend que des classes d'isomorphismes de λ dans $\mathrm{Pic}^G(\mathscr{X})$ et α dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{B})$.

Supposons qu'elle soit triviale. Soit b un point F-rationnel de $\mathscr{B}$. En restreignant $\vartheta(\lambda)\otimes\pi^*\alpha$ à $\pi^{-1}(b)$, la construction 2.1.5 de $\vartheta(\lambda)$ implique que λ est trivial. La G-linéarisation de λ est ainsi donnée par un caractère χ de G et $\lambda=\iota(\chi)$. D'après la proposition 2.1.11, on a $\vartheta(\lambda)=\pi^*\eta_{\mathscr{T}}(\chi)$. Par suite, $\pi^*\alpha\simeq\pi^*\eta_{\mathscr{T}}(\chi)^{-1}$, ce qui prouve l'exactitude au milieu.

Montrons alors que la dernière flèche est surjective. Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $\mathscr{Y}$. On peut recouvrir $\mathscr{B}$ par des ouverts connexes non vides U_i assez petits de sorte que

$$\pi^{-1}(U_i)\simeq\mathscr{X}\times_F U_i.$$

La restriction de $\mathscr{L}$ à $\pi^{-1}(U_i)$ fournit alors pour tout i un élément de

$$\mathrm{Pic}(\mathscr{X}\times_F U_i)=\mathrm{Pic}(\mathscr{X})\times\mathrm{Pic}(U_i)$$

puisque chaque U_i a un point F-rationnel. On en déduit d'abord pour tout i un élément de $\mathrm{Pic}(\mathscr{X})$ qui, comme on le voit en les restreignant à $U_i\cap U_j$, ne dépend pas de i. Notons le λ. Finalement, il existe un faisceau inversible $\alpha_i\in\mathrm{Pic}(U_i)$ tel que la restriction de $\mathscr{L}$ à $\pi^{-1}(U_i)\simeq\mathscr{X}\times_F U_i$ est isomorphe à $p_1^*\lambda\otimes p_2^*\alpha_i$. Quitte à raffiner le recouvrement (U_i), on peut de plus supposer que $\alpha_i\simeq\mathscr{O}_{U_i}$.

Choisissons une G-linéarisation sur λ. On constate que la restriction de $\mathscr{L}\otimes\vartheta(\lambda)^{-1}$ à $\pi^{-1}(U_i)$ est triviale. Si l'on choisit des trivialisations on obtient en les comparant sur $\pi^{-1}(U_i\cap U_j)$ un élément de

$$\Gamma(\pi^{-1}(U_i\cap U_j),\mathscr{O}_{\mathscr{Y}}^\times)=\Gamma(U_i\cap U_j,\mathscr{O}_{\mathscr{B}}^\times)$$

car $\mathrm{H}^0(\mathscr{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})=F$. Ces éléments définissent un 2-cocycle de Čech sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{B}}^\times$, d'où un fibré en droites $\alpha\in\mathrm{Pic}(\mathscr{B})$ tel que

$$\mathscr{L}\otimes\vartheta(\lambda)^{-1}\simeq\pi^*\alpha.$$

Autrement dit, $\mathscr{L}$ appartient à l'image de l'homomorphisme $\vartheta\otimes\pi^*$.

Le théorème est ainsi démontré. □

Corollaire 2.2.5. — *Supposons vérifiées les hypothèses 2.2.1 et supposons que $\mathscr{B}(F)$ est Zariski-dense dans $\mathscr{B}$. On dispose alors de suites exactes de $\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)]$-modules :*

$$0\to X^*(G_{\overline{F}})\to\mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}_{\overline{F}})\to\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}})\to 0 \tag{2.2.6}$$

$$0\to X^*(G_{\overline{F}})\to\mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}_{\overline{F}})\oplus\mathrm{Pic}(\mathscr{B}_{\overline{F}})\to\mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_{\overline{F}})\to 0 \tag{2.2.7}$$

$$0\to\mathrm{Pic}(\mathscr{B}_{\overline{F}})\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_{\overline{F}})\to\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}})\to 0. \tag{2.2.8}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.4 sur $\overline{F}$, et de constater que la suite exacte obtenue est $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-équivariante. □

THÉORÈME 2.2.9. — *Supposons vérifiées les hypothèses 2.2.1, que $\mathscr{B}(F)$ est Zariski-dense dans $\mathscr{B}$, et supposons de plus que G est un groupe algébrique F-résoluble*[(2)]*, un fibré en droites sur $\mathscr{Y}$ est alors effectif si et seulement s'il s'écrit comme l'image d'un couple $(\lambda, \alpha) \in \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}) \times \operatorname{Pic}(\mathscr{B})$ où λ et α sont effectifs.*

Démonstration. — Soient $\lambda \in \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$ et $\alpha \in \operatorname{Pic}(\mathscr{B})$ effectifs. On veut montrer que $\vartheta(\lambda) \otimes \pi^*\alpha$ est effectif. Il suffit de prouver que $\vartheta(\lambda)$ est effectif, et pour cela, il suffit de prouver qu'il existe un diviseur de Cartier G-invariant D sur $\mathscr{X}$ tel que l'on ait un isomorphisme de fibrés en droites G-linéarisés, $\lambda \simeq \mathscr{O}(D)$. Autrement dit, il faut montrer que la représentation de G sur $f_*\lambda$ admet une F-droite stable, ce qu'implique le théorème de point fixe de Borel puisque G est F-résoluble.

Soit maintenant $\mathscr{L}$ un fibré en droites effectif sur $\mathscr{Y}$. Comme G est connexe et $\operatorname{Pic}(G) = 0$, la démonstration de la proposition 1.5, p. 34, de [**15**] implique que tout fibré inversible sur $\mathscr{X}$ est G-linéarisable. Le théorème 2.2.4 implique donc qu'il existe $\lambda \in \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$ et $\alpha \in \operatorname{Pic}(\mathscr{B})$ tels que $\mathscr{L} = \vartheta(\lambda) \otimes \pi^*\alpha$. D'après la proposition 2.1.10, $\eta_{\mathscr{T}}(f_*\lambda) \otimes \alpha$ est effectif. Comme G est F-résoluble, toute représentation linéaire de G est extension successive de représentations de dimension 1. Cela implique que $\eta_{\mathscr{T}}(f_*\lambda)$ est extension successive de fibrés en droites ; notons les λ_i. Alors, $\eta_{\mathscr{T}}(f_*\lambda) \otimes \alpha$ est extension des $\lambda_i \otimes \alpha$, et l'effectivité de $\mathscr{L}$ implique que l'un au moins des $\lambda_i \otimes \alpha$ est effectif.

Or, λ_i est associé à un caractère χ_i de G ; si on remplace λ par le fibré en droite G-linéarisé $\lambda \otimes \iota(\chi_i)^{-1}$ où l'action a été divisée par χ_i, on représente ainsi $\mathscr{L}$ sous la forme

$$\mathscr{L} \simeq \vartheta(\lambda \otimes \iota(\chi_i)^{-1}) \otimes (\lambda_i \otimes \alpha),$$

ce qui conclut la démonstration, $\lambda \otimes \iota(\chi_i)^{-1}$ étant isomorphe à λ comme fibré en droites, donc effectif. $\square$

2.3. Métriques hermitiennes

Dans ce paragraphe, nous étendons la construction 2.1.7 en supposant que S est le spectre d'un corps de nombres et en faisant intervenir des métriques hermitiennes.

Définition 2.3.1. — Soit G un groupe de Lie connexe sur $\mathbf{C}$; fixons un sous-groupe compact maximal K de G. Soit X une variété analytique complexe munie d'une action de G.

Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel complexe G-linéarisé sur X, on dit qu'une métrique hermitienne est *K-invariante* si l'action de K sur $\mathbf{V}(\mathscr{E}) \times X$ est isométrique.

On remarquera que les constructions usuelles (tensorielles) de fibrés hermitiens préservent la K-invariance des métriques hermitiennes.

(2) Cela signifie que G est extension itérée de $\mathbf{G}_m$ et $\mathbf{G}_a$, autrement dit, que G est résoluble et déployé sur F.

Remarque 2.3.2. — Avec les notations de la définition précédente, tout fibré vectoriel sur X admet une métrique hermitienne K-invariante : si $\|\cdot\|_0$ est une métrique hermitienne sur $\mathscr{E}$, on peut en effet choisir une mesure de Haar sur K et poser pour toute section s,

$$\|\mathsf{s}\|^2(x) = \int_K \|k\cdot\mathsf{s}\|(x)^2\,dk.$$

Rappelons l'énoncé de la situation 1.1.2 :

SITUATION. — *Supposons que S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres F et que G est un S-schéma en groupes linéaire connexe. Fixons pour tout plongement complexe de F $\sigma\in S(\mathbf{C})$ un sous-groupe compact maximal K_σ de $G(\mathbf{C})$ et notons $\mathbf{K}_\infty$ la collection $(K_\sigma)_\sigma$.*

Définition 2.3.3. — Supposons que G agit sur un S-schéma plat $\mathscr{X}$. On appelle *fibré vectoriel hermitien $(G,\mathbf{K}_\infty)$-linéarisé* un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{X}$ muni d'une G-linéarisation et, pour tout $\sigma\in S(\mathbf{C})$, d'une métrique hermitienne sur le fibré vectoriel $\mathscr{E}\otimes_\sigma\mathbf{C}$ sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ qui est K_σ-invariante.

On note $\widehat{\mathrm{Fib}}_d^{G,\mathbf{K}_\infty}(\mathscr{X})$ la catégorie des fibrés vectoriels hermitiens $(G,\mathbf{K}_\infty)$-linéarisés de rang d sur $\mathscr{X}$. Si $d=1$, on notera $\widehat{\mathrm{Pic}}^{G,\mathbf{K}_\infty}(\mathscr{X})$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels hermitiens de rang 1 $(G,\mathbf{K}_\infty)$-linéarisés sur $\mathscr{X}$.

SITUATION 2.3.4. — *Plaçons-nous dans la situation 1.1.2. Soit $f:\mathscr{X}\to S$ un S-schéma plat, muni d'une action de G/S. Soient aussi $g:\mathscr{B}\to S$ un S-schéma plat ainsi qu'un $(G,\mathbf{K})$-torseur arithmétique $\widehat{\mathscr{T}}$ sur $\mathscr{B}$ (voir la définition 1.1.3).*

CONSTRUCTION 2.3.5. — *Le foncteur $\vartheta:\mathrm{Fib}_d^G(\mathscr{X})\to\mathrm{Fib}_d(\mathscr{Y})$ s'étend en un foncteur*

$$\vartheta:\widehat{\mathrm{Fib}}_d^{G,\mathbf{K}_\infty}(\mathscr{X})\to\widehat{\mathrm{Fib}}_d(\mathscr{Y})$$

qui est compatible avec les opérations tensorielles standard sur les fibrés vectoriels hermitiens $(G,\mathbf{K}_\infty)$-linéarisés (resp. les fibrés vectoriels hermitiens).

Soit $\mathscr{F}$ un fibré vectoriel hermitien $(G,\mathbf{K}_\infty)$-linéarisé sur $\mathscr{X}$. Soit $\sigma\in S(\mathbf{C})$. De manière analogue à ce qu'on a fait dans la construction 2.1.5, choisissons un recouvrement ouvert (U_i) de $\mathscr{B}_\sigma(\mathbf{C})$ pour la topologie complexe de sorte que la restriction du torseur $\mathscr{T}$ à U_i est triviale et qu'il existe des trivialisations dont les fonctions de transistions associés $g_{ij}\in\Gamma(U_i\cap U_j,G)$ soient à valeurs dans K_σ. Le choix de telles trivialisations induit des isomorphismes

$$\pi^{-1}(U_i)\simeq\mathscr{X}(\mathbf{C})\times U_i,\qquad \vartheta(\mathscr{F})|_{\pi^{-1}(U_i)}\simeq p_1^*\mathscr{F}.$$

Pour tout i, on a ainsi une métrique hermitienne naturelle sur $\vartheta(\mathscr{F})|_{\pi^{-1}(U_i)}$ par image réciproque de la métrique hermitienne sur $\mathscr{F}$. Comme $g_{ij}\in K_\sigma$ et comme la métrique hermitienne sur $\mathscr{F}$ est K_σ-invariante, les métriques hermitiennes sur $\vartheta(\mathscr{F})|_{U_i\cap U_j}$ induites par U_i et par U_j coïncident, d'où une métrique hermitienne bien définie sur $\vartheta(\mathscr{F})$.

Enfin, la proposition 2.1.11 admet une généralisation avec métriques hermitiennes :

PROPOSITION 2.3.6. — *Pour tout caractère $\chi \in X^*(G)$, l'isomorphisme canonique de la proposition 2.1.11 est une isométrie.*

Démonstration. — Si l'on reproduit la démonstration de la proposition 2.1.11 pour un recouvrement ouvert pour la topologie complexe (les g_{ij} étant donc dans le sous-groupe compact maximal), chacun des fibrés est défini par recollement de la même manière, et les métriques sur ces fibrés sont définies de sorte que cette identification soit une isométrie. Il en résulte que l'isomorphisme de cette proposition, qui consistait en l'application évidente sur les ouverts $\mathscr{X} \times U_i$ est une isométrie. $\square$

2.4. Torsion des métriques adéliques

Plaçons nous alors dans la situation 2.3.4, toujours avec $S = \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$. Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites hermitien $(G, \mathbf{K}_\infty)$-linéarisé sur $\mathscr{X}$. La restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathscr{X}_F$ est ainsi munie d'une métrique adélique naturelle.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.4.1. — *Soit $\mathbf{g} = (g_v)_v \in G(\mathbf{A}_F)$. On définit une métrique adélique sur $\mathscr{L}$, appelée* métrique adélique tordue par $\mathbf{g}$ *en posant pour toute place v de F, tout point $x \in \mathscr{X}(F_v)$ et toute section $\mathsf{s} \in \mathscr{L}_x$,*

$$\|\mathsf{s}\|'_v(x) = \|g_v \cdot \mathsf{s}\|_v (g_v \cdot x).$$

Démonstration. — Il est clair que pour toute place v, on a défini une métrique v-adique. L'ensemble des places non-archimédiennes v telles que $g_v \in G(\mathfrak{o}_v)$ est par définition de complémentaire fini. Pour ces places, $\|\mathsf{s}\|'_v(x) = \|\mathsf{s}\|_v(x)$ car g_v étant un automorphisme de $\mathscr{L}$ sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_v$, la section $g_v \cdot s$ est entière en $g_v \cdot x$ si et seulement si la section s est entière en x. Ainsi, hors d'un nombre fini de places, la nouvelle collection de métriques v-adiques est définie par un modèle entier. Elle définit donc une métrique adélique. $\square$

Remarquons que $G(\mathbf{A}_F)$ n'agit en fait qu'à travers $G(\mathbf{A}_F)/\mathbf{K}_G$.

Exemple 2.4.2. — Soit E un F-espace vectoriel de dimension finie et notons $\mathbf{P}$ l'espace projectif des droites de E. Faisons agir $\mathrm{GL}(E)$ de manière naturelle sur $\mathbf{P}$. Le faisceau $\mathscr{O}_\mathbf{P}(1)$ possède une $\mathrm{GL}(E)$-linéarisation naturelle dès qu'on a remarqué qu'une section de $\mathscr{O}_\mathbf{P}(-1)$ en un point $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ correspond à un point de la droite $D_\mathbf{x}$ définie par $\mathbf{x}$. De manière explicite, l'espace vectoriel des sections globales de $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}$ s'identifie au dual E^* de E sur lequel la $\mathrm{GL}(E)$-linéarisation sur $\mathscr{O}(1)$ induit la représentation contragrédiente $\varphi \mapsto \varphi \circ g^{-1}$.

Supposons que E est muni d'une métrique adélique. On a alors une métrique adélique sur $\mathscr{O}_\mathbf{P}(1)$ par la formule

$$\|\varphi\|(\mathbf{x}) = \frac{|\varphi(e)|}{\|e\|_v}, \quad \varphi \in E^*, \quad e \in D_\mathbf{x} \setminus \{0\}.$$

Il résulte de la formule du produit que la hauteur exponentielle d'un point $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(F)$ est donnée par la formule

$$H(\mathbf{x}) = \prod_v \|e\|_v, \quad e \in D_{\mathbf{x}} \setminus \{0\}.$$

Soit alors $(g_v)_v \in \mathrm{GL}(E)(\mathbf{A}_F)$. La métrique v-adique tordue par g_v sur $\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)$ est ainsi donnée par

$$\|\varphi\|'(\mathbf{x}) = \frac{|\varphi(e)|}{\|g_v \cdot e\|_v}, \quad \varphi \in E^*, \quad e \in D_{\mathbf{x}} \setminus \{0\}.$$

Autrement dit, la hauteur exponentielle tordue de $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(F)$ est définie par l'expression

$$H'(\mathbf{x}) = \prod_v \|g_v \cdot e\|_v, \quad e \in D_{\mathbf{x}} \setminus \{0\}.$$

Cette formule était donnée comme définition de la hauteur tordue par Roy et Thunder dans [**19**].

Dans certains cas, on peut comparer la métrique adélique initiale sur $\mathscr{L}$ et la métrique adélique tordue.

PROPOSITION 2.4.3. — *Supposons que* s *est une section globale de* $\mathscr{L}$ *sur* $\mathscr{X}_F$ *dont le diviseur est* G*-invariant. Il existe alors un unique caractère* $\chi \in X^*(G)$ F*-rationnel (le* poids *de* s*) tel que pour tout* $g \in G$, $g \cdot \mathsf{s} = \chi(g)\mathsf{s}$.

Soit $\mathbf{g} \in G(\mathbf{A}_F)$*, et considérons* $\overline{\mathscr{L}'}$ *la métrique adélique tordue par* $\mathbf{g}$. *Si* $x \in X(F)$ *n'appartient pas au diviseur de* s*, on a la formule*

$$H(\overline{\mathscr{L}'}; x) = \prod_v |\chi(g_v)|_v^{-1} \, H(\overline{\mathscr{L}}, \mathsf{s}, \mathbf{g} \cdot x).$$

Démonstration. — Comme le diviseur de s est G-invariant, il existe pour tout $g \in G$ un élément $\chi(g) \neq 0$ tel que $g \cdot \mathsf{s} = \chi(g)\mathsf{s}$. Il est alors clair que $g \mapsto \chi(g)$ définit un caractère F-rationnel (algébrique) de g.

D'autre part, on a pour toute place v de F,

$$\|\mathsf{s}\|_v'(x) = \|g_v \cdot \mathsf{s}\|_v (g_v x) = \|\chi(g_v)\mathsf{s}\|_v (g_v x) = |\chi(g_v)|_v \|\mathsf{s}\|_v (g_v x).$$

La proposition en découle en prenant le produit. □

Remarque 2.4.4. — Bien sûr, dans l'énoncé précédent, il suffit de supposer que la section s est propre pour les éléments g_v. En particulier, si G' est un sous-groupe de G tel que $\mathrm{div}(\mathsf{s})$ est invariant par G', on aura une formule du même type pour les métriques adéliques tordue par un élément de $G(\mathbf{A}_F)$.

Remarque 2.4.5 (Choix des sections). — La formule précédente permet de comparer la restriction à $G(\mathbf{A}_F)\mathscr{X}(F)$ des hauteurs sur les points adéliques associées à deux sections s_1 et s_2 de poids respectivement χ_1 et χ_2. En effet, si $\mathbf{x} = \mathbf{g} \cdot x \in G(\mathbf{A}_F)\mathscr{X}(F)$, on a, $\overline{\mathscr{L}'}$ désignant la métrique adélique tordue par $\mathbf{g}$,

$$H(\overline{\mathscr{L}}, \mathsf{s}_1; \mathbf{x}) = \prod_v |\chi_1(g_v)|_v \; H(\overline{\mathscr{L}'}; x) = \prod_v \left|\chi_1\chi_2^{-1}(g_v)\right|_v \; H(\overline{\mathscr{L}}, \mathsf{s}_2; \mathbf{x}).$$

Appliquée à des sections de même poids χ, cela permet d'étendre les fonctions $H(\overline{\mathscr{L}}, \mathsf{s}; \cdot)$ au complémentaire dans $G(\mathbf{A}_F)\mathscr{X}(F)$ de l'intersection des diviseurs des sections de poids χ.

Remarque 2.4.6. — Lorsque $\mathscr{X}$ est une variété torique, compactification équivariante lisse d'un tore G, tout fibré en droites effectif $\mathscr{L}$ qui est G-linéarisé possède une unique droite F-rationnelle de sections pour lesquelles G agit par le caractère trivial. On peut utiliser cette section pour définir une hauteur sur les points adéliques du complémentaire de son diviseur, donc en particulier sur $G(\mathbf{A}_F)$.

Expliquons maintenant comment la torsion des métriques adéliques intervient dans nos constructions. Nous allons préciser un peu la situation 2.3.4 en faisant désormais l'hypothèse suivante :

SITUATION 2.4.7. — *Nous faisons les hypothèses contenues dans la situation 2.3.4. En particulier, S est le spectre de l'anneau des entiers de corps de nombres F. De plus, supposons que $\mathscr{X}$ et $\mathscr{B}$ sont propres sur S.*

Soit b un point F-rationnel de $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{B}$ est propre sur S, il en résulte une unique section $\varepsilon_b : S \to \mathscr{B}$ qui prolonge b. Toute trivialisation du G_F-torseur $G_F \simeq \mathscr{T}|_b$ sur $\operatorname{Spec} F$ (il en existe car c'est un torseur pour la topologie de Zariski) induit un isomorphisme $\mathscr{X}_F \simeq \mathscr{Y}|_b$. Fixons un tel isomorphisme φ. Si $\lambda \in \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$, $\varphi^*\vartheta(\lambda)$ est un fibré en droite sur $\mathscr{X}_F$ canoniquement isomorphe à λ. En revanche, les métriques (adéliques) sont en général distinctes.

Soit v une place finie de F, notons $\mathfrak{o}_v$ le complété de l'anneau local de $\mathfrak{o}_F$ en v. Soit $\varepsilon_v : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_v \to \mathscr{B}$ la restriction de ε_b à $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_v$. Alors, $\varepsilon_v^*\mathscr{T}$ est un $G \otimes \mathfrak{o}_v$-torseur sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_v$, et est donc trivialisable. Ainsi, $\varepsilon_v^*\mathscr{Y}$ est isomorphe à $\mathscr{X} \otimes \mathfrak{o}_v$. Fixons un isomorphisme φ_v induit par une trivialisation du torseur. Il existe par définition $g_v \in G(F_v)$ tel que

$$\varphi = \varphi_v \circ [g_v], \quad \mathscr{X} \otimes F_v \to \mathscr{Y}|_b \otimes F_v,$$

$[g_v]$ désignant l'automorphisme de $\mathscr{X} \otimes F_v$ défini par g_v. La définition de la métrique v-adique associée à un modèle montre que φ_v est une isométrie. Ainsi, en tant que fibré inversible métrisé sur $\mathscr{X} \otimes F_v$, $\varphi^*(\vartheta(\lambda))$ est isomorphe (isométrique) à $[g_v]^*\lambda$.

Soit maintenant v une place à l'infini. Comme on s'était fixé une trivialisation du $G(\mathbf{C})/K_v$-fibré sur $\mathscr{B}(\mathbf{C})$, on dispose d'un isomorphisme φ_v bien défini modulo K_v qui par définition ne modifie pas les métriques. La comparaison entre φ et φ_v se fait comme précédemment par un élément $g_v \in G(\mathbf{C})$.

Il en résulte le théorème :

THÉORÈME 2.4.8. — *Soit* $\mathbf{g} = (g_v)_v \in G(\mathbf{A}_F)$ *l'élément du groupe adélique que nous venons d'introduire. Il représente la classe de la restriction à b du* $(G, \mathbf{K}_\infty)$*-torseur arithmétique* $\widehat{\mathscr{T}}$ *dans l'isomorphisme de la proposition 1.2.6. De plus, la métrique adélique image réciproque sur* $\varphi^*\vartheta(\lambda)$ *s'identifie à la métrique adélique tordue par* $\mathbf{g}$ *sur* λ.

2.5. Nombres de Tamagawa

Commençons par rappeler la définition, due à Peyre (cf. **[16]** et **[18]**) des nombres de Tamagawa associés à une métrique adélique sur le faisceau anticanonique.

2.5.1. *Hypothèses.* — Soit X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur F telle que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = \mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et que $X(F)$ soit Zariski-dense dans X. Sous ces conditions, $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})_{\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.5.2. *Définition.* — Munissons le fibré canonique ω_X d'une métrique adélique. Pour toute place v de F, une construction classique de Weil fournit une mesure $\mu_{X,v}$ sur $X(F_v)$ à partir de la métrique v-adique sur ω_X. Notons $L_v(s, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}))$ le facteur local en v de la fonction L d'Artin de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})_{\mathbf{Q}}$. Le théorème de Weil sur la mesure de $X(F_v)$ pour $\mu_{X,v}$ et le théorème de Deligne sur les conjectures de Weil concernant le nombre de points rationnels des variétés sur les corps finis ont la conséquence suivante : il existe un ensemble fini Σ de places de F, contenant les places archimédiennes, tel que

$$\prod_{v\in\Sigma} \mu_{X,v} \times \prod_{v\notin\Sigma} \left(L_v^{-1}(1, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}))\mu_{X,v}\right)$$

définisse une mesure $\mu_{X,\Sigma}$ sur $X(\mathbf{A}_F)$ pour laquelle $X(\mathbf{A}_F)$ a un volume fini.

Soit $L_\Sigma(s, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})) = \prod_{v\notin\Sigma} L_v(s, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}))$ la fonction L partielle de $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$. Le produit eulérien converge en effet pour $\Re(s) > 1$ et L_Σ a un pôle en $s = 1$ d'ordre la dimension t des invariants sous $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ de $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})_{\mathbf{Q}}$. Notons

$$L_\Sigma^*(1, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})) = \lim_{s\to 1}(s-1)^r L_\Sigma(s, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})).$$

On définit alors le nombre de Tamagawa de X (associé à la métrique adélique choisie sur ω_X) par

$$\tau(X) = L_\Sigma^*(s, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})) \int_{\overline{X(F)}} \mu_{X,\Sigma}.$$

Il est facile de vérifier qu'il ne dépend pas de l'ensemble fini de places Σ choisi.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant.

LEMME 2.5.3. — *Supposons réalisées les hypothèses 2.5.1. Soit U un ouvert non vide de X. Notons $\overline{U(F)}$ l'adhérence de $U(F)$ dans $\prod_v U(F_v)$ pour la topologie produit (qui est la topologie induite sur $\prod_v U(F_v)$ par la topologie adélique de $X(\mathbf{A}_F)$). Alors, on a l'égalité*

$$\int_{\overline{U(F)}} \mu_{X,\Sigma} = \int_{\overline{X(F)}} \mu_{X,\Sigma}.$$

Démonstration. — Tout point $x=(x_v)\in\prod_v U(F_v)$ possède par définition un voisinage (pour la topologie induite) contenu dans $\prod_v U(F_v)$. Par suite, si une suite $(x^{(n)})$ de points de $X(F)$ converge vers x, à partir d'un certain rang, $x^{(n)}$ appartient à $U(F_v)$ pour toute place v, et donc $x^{(n)}\in U(F)$. Cela montre que $\overline{U(F)}=\overline{X(F)}\cap\prod_v U(F_v)$. Ainsi, le complémentaire de $\overline{U(F)}$ dans $\overline{X(F)}$ est contenu dans $X(\mathbf{A}_F)\setminus\prod_v U(F_v)$, donc dans la réunion

$$\bigcup_v (X\setminus U)(F_v)\prod_{w\neq v} X(F_w).$$

La définition de la mesure $\mu_{X,v}$ implique que $(X\setminus U)(F_v)$ est de mesure nulle pour $\mu_{X,v}$. On voit donc que $\overline{X(F)}\setminus\overline{U(F)}$ est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle pour la mesure de Tamagawa sur $X(\mathbf{A}_F)$, donc est de mesure nulle. □

On se place maintenant dans la situation 2.3.4, S étant le spectre $\operatorname{Spec}\mathfrak{o}_F$ de l'anneau des entiers d'un corps de nombres F.

LEMME 2.5.4. — *Si $\mathscr{X}_F$ et $\mathscr{B}_F$ satisfont les hypothèses 2.5.1 nécessaires pour la définition des nombres de Tamagawa, $\mathscr{Y}_F$ les satisfait aussi.*

Démonstration. — Que $\mathscr{Y}_F$ soit lisse, propre et géométrique intègre est clair. D'autre part, les points rationnels de $\mathscr{Y}_F$ sont denses dans chaque fibre au-dessus d'un point rationnel de $\mathscr{B}_F$, lesquels sont supposés denses dans $\mathscr{B}_F$. Comme $\mathscr{Y}_F\to\mathscr{B}_F$ est propre, un argument élémentaire de platitude puis de dimension implique que les points rationnels de $\mathscr{Y}_F$ sont Zariski-denses.

D'autre part, les hypothèses sur $\mathscr{X}_F$ impliquent que $R^0\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{Y}_F}=\mathscr{O}_{\mathscr{B}_F}$ et que

$$R^1\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{Y}_F}=R^2\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{Y}_F}=0.$$

La suite spectrale des foncteurs composés implique que $\mathrm{H}^q(\mathscr{O}_{\mathscr{B}_F})$ est un quotient de $\bigoplus_{i+j=q}\mathrm{H}^i(\mathscr{B}_F,R^j\pi_*\mathscr{O}_{\mathscr{Y}_F})$. Si $j=1$ ou si $j=2$, on a $\mathrm{H}^i(R^j\pi_*)=0$ puisque $R^j\pi_*=0$. Si $j=0$ et $i\in\{1,2\}$, $\mathrm{H}^i(R^0\pi_*)=\mathrm{H}^i(\mathscr{O}_{\mathscr{B}_F})=0$ en vertu des hypothèses faites sur $\mathscr{B}_F$. □

Supposons donc que $\mathscr{X}_F$ et $\mathscr{B}_F$ satisfont ces hypothèses 2.5.1. Le faisceau canonique sur $\mathscr{Y}$ admet d'après la proposition 2.1.8 une décomposition

$$\omega_{\mathscr{Y}}=\vartheta(\omega_{\mathscr{X}}/S)\otimes\pi^*\omega_{\mathscr{B}/S}.$$

Choisissons une structure de fibré en droite hermitien $(G,\mathbf{K}_\infty)$ linéarisé sur $\omega_{\mathscr{X}/S}$ compatible à la linéarisation canonique sur $\omega_{\mathscr{X}/S}$ (autrement dit, pour toute place archimédienne σ, une métrique hermitienne K_σ-invariante sur $\mathscr{X}\times_\sigma\mathbf{C}$). Choisissons aussi une métrique hermitienne sur $\omega_{\mathscr{B}/S}$. Il en résulte une métrique hermitienne canonique sur $\omega_{\mathscr{Y}/S}$ par la construction 2.3.5. Le fait de disposer d'un modèle sur $\mathfrak{o}_F$ induit de plus des métriques v-adiques au places finies, d'où des métriques adéliques sur $\omega_{\mathscr{X}_F}$, sur $\omega_{\mathscr{B}_F}$ et sur $\omega_{\mathscr{Y}_F}$.

THÉORÈME 2.5.5. — *Muni de ces métriques adéliques, on a l'égalité*

$$\tau(\mathscr{Y}_F) = \tau(\mathscr{X}_F)\tau(\mathscr{B}_F).$$

Démonstration. — Soit U un ouvert de Zariski non vide de $\mathscr{B}_F$ tel que $\mathscr{T}|_U \simeq G \times_S U$. Notons $V = \pi^{-1}(U) \subset \mathscr{Y}_F$, de sorte que V est un ouvert non vide de $\mathscr{Y}|_F$ isomorphe à $\mathscr{X}_F \times U$, et que dans cette décomposition, la mesure

$$\mu_{\mathscr{Y},v}|_{\pi^{-1}(U)} = \mu_{\mathscr{X},v} \otimes \mu_{\mathscr{B},v}|_U. \tag{2.5.6}$$

Pour toute place v de F, il résulte du corollaire au théorème 2.2.4 la relation entre facteurs locaux

$$L_v(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_{\overline{F}})) = L_v(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}}))L_v(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{B}_{\overline{F}})). \tag{2.5.7}$$

Alors, les équations (2.5.6) et (2.5.7) impliquent que la restriction de la mesure de Tamagawa de $\mathscr{X}(\mathbf{A}_F)$ à $\prod_v V(F_v)$ s'écrit comme le produit

$$\mu_{\mathscr{Y},\Sigma}|_{\prod_v V(F_v)} = \mu_{\mathscr{X},\Sigma} \otimes \mu_{\mathscr{B},\Sigma}|_{\prod_v U(F_v)}.$$

Or, si $\overline{U(F)}$ est l'adhérence de $U(F)$ dans le produit $\prod_v U(F_v)$, l'adhérence de $V(F)$ dans $\prod_v V(F_v)$ s'identifie à $\overline{\mathscr{X}(F)} \times \overline{U(F)}$. Intégrons $\mu_{\mathscr{Y},\Sigma}$ sur $\overline{V(F)}$; en utilisant le lemme 2.5.3, on obtient

$$\int_{\overline{\mathscr{Y}(F)}} \mu_{\mathscr{Y},\Sigma} = \int_{\overline{\mathscr{X}(F)}} \mu_{\mathscr{X},\Sigma} \times \int_{\overline{\mathscr{B}(F)}} \mu_{\mathscr{B},\Sigma}.$$

L'équation (2.5.7) implique aussi que pour $\Re(s) > 1$,

$$L_\Sigma(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_{\overline{F}})) = L_\Sigma(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}}))L_\Sigma(s, \mathrm{Pic}(\mathscr{B}_{\overline{F}})).$$

Par suite, l'ordre du pôle en $s = 1$ pour la fonction L_Σ de $\mathscr{Y}$ est la somme des ordes des pôles pour $\mathscr{X}$ et $\mathscr{B}$, et donc

$$L^*_\Sigma(1, \mathrm{Pic}(\mathscr{Y}_{\overline{F}})) = L^*_\Sigma(1, \mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{\overline{F}}))L^*_\Sigma(1, \mathrm{Pic}(\mathscr{B}_{\overline{F}})).$$

Le théorème est donc démontré. □

2.6. Torseurs trivialisants

Le paragraphe 2.4 a montré que le phénomène de torsion des métriques adéliques intervient naturellement dans nos constructions. Cependant, la hauteur tordue n'est facile à calculer que lorsqu'il existe des sections propres pour l'action du groupe. L'existence de sections canoniques permet comme on l'a vu de disposer d'une fonction hauteur sur les points adéliques.

Les torseurs trivialisants que nous introduisons ici ont pour fonction de fournir — au prix d'un changement de variété — d'une droite canonique de sections.

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons sur un corps F. Supposons que $\mathrm{Pic}^G(\mathscr{X}) \simeq \mathrm{Pic}(\mathscr{X}) \times X^*(G)$ est un groupe de type fini.

Soit H un groupe algébrique sur F, $\mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}$ un H-torseur qui induise par fonctorialité covariante des torseurs un isomorphisme $X^*(H) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{X})$. On suppose de plus que $\mathscr{X}_1$ est muni d'une action de G qui relève l'action de G sur $\mathscr{X}$ et qui commute à l'action de H. On peut construire un tel $\mathscr{X}_1$ en fixant $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ des fibrés inversibles G-linéarisés sur $\mathscr{X}$ dont les classes forment une base de $\operatorname{Pic}(\mathscr{X})$. On pose alors $\mathscr{X}_1 = \prod_{i=1}^h (\mathbf{V}(\lambda_i^\vee) \setminus \{0\})$ et $H = \mathbf{G}_m^h$.

Soit T le plus grand quotient de G tel que l'homomorphisme naturel $X^*(T) \to X^*(G)$ est un isomorphisme. (C'est le quotient de G par l'intersection des noyaux des caractères de G). On pose $\widetilde{\mathscr{X}} = \widetilde{\mathscr{X}}_1 \times T$ et $\pi : \widetilde{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ la composition de la première projection de de la projection $\widetilde{\mathscr{X}_1} \to \mathscr{X}$. C'est un $H \times T$-torseur muni d'une action de G (diagonale).

Exemple 2.6.1. — Supposons que $\mathscr{X} = P\backslash G$ est un espace de drapeaux généralisé pour un groupe algébrique simplement connexe semi-simple G sur F. On a $\operatorname{Pic}(\mathscr{X}) \simeq X^*(P)$ et $G \to \mathscr{X}$ est un P-torseur qui induit un isomorphisme $X^*(P) \simeq \operatorname{Pic}(\mathscr{X})$. De plus, $T = \{1\}$. Ainsi, on peut prendre $\widetilde{\mathscr{X}} = G$.

Exemple 2.6.2. — Lorsque le groupe G est trivial, on retrouve les torseurs universels introduits dans le contexte des hauteurs par Salberger et Peyre (cf. [**20**], [**18**]).

FAIT 2.6.3. — *Si $\lambda \in \operatorname{Pic}^G(\mathscr{X})$, $\pi^*\lambda$ admet une F-droite canonique de sections G-invariantes.*

Remarque 2.6.4. — L'isomorphisme canonique $\operatorname{Pic}^G(\mathscr{X}) \simeq X^*(H \times T) = X^*(H) \times X^*(G)$ admet une réciproque qu'il est facile d'expliciter. En effet, soient χ_H et χ_G deux caractères de H et G respectivement. On définit un fibré inversible G-linéarisé sur $\mathscr{X}$ comme suit : on quotiente $\widetilde{\mathscr{X}} \times \mathbf{A}^1 = \widetilde{\mathscr{X}_1} \times T \times \mathbf{A}^1$ par l'action de H donnée par

$$h \cdot (\widetilde{x}, t, u) = (h \cdot \widetilde{x}, t, \chi_H(h)^{-1} u), \quad h \in H, \quad (\widetilde{x}, t, u) \in \widetilde{\mathscr{X}_1} \times T \times \mathbf{A}^1$$

et la G-linéarisation provient de l'action de G sur $\widetilde{\mathscr{X}} \times \mathbf{A}^1$ fournie par

$$(\widetilde{x}, t, u) \cdot g = (g \cdot \widetilde{x}, g \cdot t, \chi_G^{-1}(g) u), \quad g \in G, \quad (\widetilde{x}, t, u) \in \widetilde{\mathscr{X}_1} \times T \times \mathbf{A}^1.$$

Par la construction 2.1.2, on obtient ainsi un F-schéma $\widetilde{\mathscr{Y}}$ avec une projection $\widetilde{\mathscr{Y}} \to \mathscr{Y}$. Supposons que $\mathscr{Y}$ provient de la situation 2.3.4, on dispose en particulier de fibrés inversibles sur $\mathscr{Y}_F$ munis de métriques adéliques associés aux fibrés inversibles $(G, \mathbf{K})$-linéarisés sur $\mathscr{X}$. En particulier, on obtient sur $\widetilde{\mathscr{Y}}$ des fibrés inversibles avec métriques adéliques. Le fait nouveau est que l'on dispose d'une hauteur sur les points adéliques de $\widetilde{\mathscr{Y}}$ associée à ces fibrés inversibles. En effet, une fois remontés à $\widetilde{\mathscr{Y}}$, ces fibrés inversibles possèdent une droite de sections F-rationnelle canonique.

2.7. Exemples

2.7.1. *Action d'un tore.* — Pour les applications auxquelles notre deuxième article sera consacré, on considère l'action d'un tore T.

Un tel tore peut agir non seulement sur des variétés toriques, mais aussi sur des variétés de drapeaux généralisées $P\backslash G$, via un morphisme $T \to G$.

Dans le cas des variétés toriques sur un corps de nombres F, on dispose de modèles canoniques sur $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}_F$ (si le tore est déployé), et de métriques hermitiennes à l'infini canoniques sur les fibrés en droites. Pour tout plongement σ de F dans $\mathbf{C}$, les points complexes $T(\mathbf{C})$ du tore admettent un unique sous-groupe compact maximal K_σ, et les métriques hermitiennes introduites sont automatiquement K_σ-invariantes. On obtient ainsi des fibrés hermitiens $(T,\mathbf{K})$-linéarisés (cf. par exemple [**3**]).

Dans le cas des variétés de drapeaux $P\backslash G$, une fois fixé des sous-groupes compacts maximaux de G aux places à l'infini, il est aussi possible de munir les fibrés en droites P-linéarisés de métriques hermitiennes invariantes pour ces sous-groupes compacts maximaux et donc pour le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbf{C})$. Aux places finies, les métriques v-adiques qu'on obtient admettent une description analogue en termes de la décomposition d'Iwasawa (cf. [**12**]).

D'autre part, un T-torseur sur un F-schéma $\mathscr{B}$, du moins quand le tore est déployé, à la donnée d'un morphisme $X^*(T)\to \mathrm{Pic}(\mathscr{B})$, et donc, une fois fixé une base de $X^*(T)$, à des fibrés en droites $\lambda_1,\dots,\lambda_t\in\mathrm{Pic}(\mathscr{B})$. (On a noté $t=\dim T$.) La trivialisation des T/K_σ-torseurs correspond, ainsi qu'on l'a dit après la définition 1.1.3 d'un T-torseur arithmétique, à une métrique hermitienne sur les fibrés en droites λ_i.

Dans le cas où T agit sur une variété torique, on obtient alors par la construction 2.3.4 une famille de variétés toriques sur $\mathscr{B}$. On peut notamment compactifier ainsi une variété semi-abélienne $\mathscr{T}\to\mathscr{B}$ et construire sur la compactification $\mathscr{Y}$ des fonctions hauteurs canoniques. Dans ce cas, les λ_i sont des fibrés en droites algébriquement équivalent à 0 sur une variété abélienne $\mathscr{B}$. Si on a pris soin de les munir, ainsi que tous les fibrés en droites sur $\mathscr{B}$, de leur métrique adélique canonique, pour laquelle le théorème du cube est une isométrie, on obtient sur $\mathscr{Y}$ les hauteurs canoniques, au sens de la hauteur de Néron–Tate. (Dans ce cas particulier, cf. [**9**] où l'on trouvera cette construction dans un esprit analogue, et [**11**], où est donnée une construction « à la Tate » de ces hauteurs canoniques, due à M. Waldschmidt).

Dans le cas où T agit sur une variété de drapeaux généralisée, on obtient la variété de drapeaux (généralisée) d'un fibré vectoriel sur $\mathscr{B}$ construit naturellement à partir des λ_i. Ce cas était étudié (lorsque la base est aussi une variété de drapeaux) dans la thèse de M. Strauch ([**21**]).

2.7.2. *Variétés de drapeaux.* — Tout fibré vectoriel sur $\mathscr{B}$ donne lieu à des variétés de drapeaux généralisées. Dans ce cas, le groupe G est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(d)$, $\mathscr{X}$ est une variété $P\backslash G$. On identifie en effet un fibré vectoriel de rang n sur $\mathscr{B}$ à un $\mathrm{GL}(d)$-torseur. Si l'on choisit comme sous-groupe compact à l'infini le groupe unitaire $\mathrm{U}(d)$, la trivialisation à l'infini du G/K-fibré correspond à une métrique hermitienne sur le fibré vectoriel.

Il est à noter que cette situation se retrouve, mais dans l'autre sens, dans le calcul du comportement de la fonction zêta des hauteurs d'une puissance symétrique d'une courbe $\mathscr{C}$ de genre $g\geq 2$. Dans ce cas en effet, si $d>2g-2$, $\mathrm{Sym}^d\mathscr{C}$ est un fibré projectif au-dessus de la jacobienne de $\mathscr{C}$ associé à un fibré vectoriel de rang $d+1-g$.

2.7.3. *Action d'un groupe vectoriel.* — Dans [**10**] et [**9**], on étudie des compactifications d'extensions vectorielles de variétés abéliennes. Expliquons comment ce travail s'insère dans les constructions de cet article lorsque, pour simplifier les notations, on prend $G = \mathbf{G}_a$.

Un $\mathbf{G}_a$-torseur sur $\mathscr{B}$ correspond à une extension de $\mathscr{O}_{\mathscr{B}}$ par lui-même, soit un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ de rang 2 sur $\mathscr{B}$. La trivialisation du $\mathbf{G}_a$-torseur à l'infini correspond à un scindage $\mathscr{C}^\infty$ de l'extension sur $\mathscr{B}(\mathbf{C})$. D'autre part, $\mathbf{G}_a$ agit naturellement sur $\mathbf{P}^1$ (via son plongement dans GL(2), $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). On obtient ainsi une compactification du $\mathbf{G}_a$-torseur en une famille de droites projectives sur $\mathscr{B}$.

Références

[1] S. J. Arakelov – « Theory of intersections on the arithmetic surface », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, 1974), 1974, p. 405–408.

[2] V. V. Batyrev et Yu. I. Manin – « Sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques », *Math. Ann.* **286** (1990), p. 27–43.

[3] V. V. Batyrev et Yu. Tschinkel – « Rational points on bounded height on compactifications of anisotropic tori », *Internat. Math. Res. Notices* **12** (1995), p. 591–635.

[4] ______ « Height zeta functions of toric varieties », *Journal Math. Sciences* **82** (1996), no. 1, p. 3220–3239.

[5] ______ « Manin's conjecture for toric varieties », *J. Algebraic Geometry* **7** (1998), no. 1, p. 15–53.

[6] ______ « Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties », dans *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* [**17**], à paraître.

[7] A. Borel – « Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie (d'après Cartan, Iwasawa et Mostow) », *Séminaire Bourbaki 1950/51*, Exp. 33.

[8] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud – *Néron models*, Ergeb., no. 21, Springer Verlag, 1990.

[9] A. Chambert-Loir – « Extensions vectorielles, périodes et hauteurs », Thèse de doctorat, Univ. P. et M. Curie, Paris, 1995.

[10] ______ « Extension universelle d'une variété abélienne et hauteurs des points de torsion », *Compositio Math.* **103** (1996), p. 243–267.

[11] P. Cohen – « Heights of torsion points on commutative group varieties », *Proc. London Math. Soc.* **52** (1986), p. 427–444.

[12] J. Franke, Yu. I. Manin et Yu. Tschinkel – « Rational points of bounded height on Fano varieties », *Invent. Math.* **95** (1989), no. 2, p. 421–435.

[13] G. van der Geer et R. Schoof – « Effectivity of Arakelov divisors and the Theta divisor of a number field », Tech. report, math.AG/9802121, 1998.

[14] H. Gillet et C. Soulé – « Arithmetic intersection theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **72** (1990), p. 94–174.

[15] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan – *Geometric invariant theory*, Ergeb., no. 34, Springer Verlag, 1994.

[16] E. Peyre – « Hauteurs et nombres de tamagawa sur les variétés de Fano », *Duke Math. J.* **79** (1995), p. 101–218.

[17] ______ (éd.) – *Nombre et répartition des points de hauteur bornée*, Astérisque, 1998, à paraître.

[18] ——— « Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels », dans *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* [**17**], à paraître.

[19] D. Roy et J. L. Thunder – « An absolute Siegel's lemma », *J. Reine Angew. Math.* **476** (1996), p. 1–26.

[20] P. Salberger – « Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties », dans *Nombre et répartition des points de hauteur bornée* [**17**], à paraître.

[21] M. Strauch – « Thèse », Thèse de doctorat, Universität Bonn, 1997.

[22] M. Strauch et Y. Tschinkel – « Height zeta functions of toric bundles over flag varieties », Tech. report, Universität Bonn, 1997.

Soumis sur l'archive alg-geom *le 4 janvier 1999*

Antoine Chambert-Loir, Institut de mathématiques de Jussieu, Boite 247, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 • *E-mail :* `chambert@math.jussieu.fr`

Yuri Tschinkel, Department of Mathematics, U.I.C., Chicago (IL) 60607 *E-mail :* `yuri@math.uic.edu`