

סמסטר א' תשס"ט
מועד ב' 30.8.2009

מתמטיקה בדידה
אברון, דר, טרסי, רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות.

להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**. יש להשיב על כל תשע השאלות. לכל פתרון יש להציג הוכחה מלאה, נסמכת על חומר שהוצג בקורס.

חלק ראשון (שאלות 1 עד 5)

ניקוד השאלות בחלק זה (לא לפי הסדר): 20, 10, 10, 10, 5 סה"כ 55 נקודות. חישוב הציון: לפתרון כל שאלה יקבע ציון גלמי עד 10 נק'. לפני הסיכום יוכפל הציון הגלמי הגבוה ביותר בשתיים והנמוך ביותר יחולק בשתיים.

1. לכל מספר טבעי k נגדיר $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq k-1\}$ וכמו-כן נסמן

$$B = \{\{\emptyset\}, N, P(N)\}. \text{ חשבו את עוצמת הקבוצה } N_{100} \rightarrow P(B).$$

2. תהא $A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ קבוצה בת-מנייה של סדרות בינאריות ותהא $\lambda n \in \mathbb{N}. S_n$

פונקצית שקילות מ- \mathbb{N} על A . הוכיחו: $\lambda k \in \mathbb{N}. |S_k(k) - 1| \notin A$.
(למען הסר ספק, "-" מסמן כאן חיסור מספרים ו-"|" מסמן ערך מוחלט).

3. הוכיחו כי לכל קבוצה אינסופית A קיימת פונקצית שקילות מהקבוצה $P(A)$ על הקבוצה $A \cup P(A)$.

4. לקבוצה לא ריקה A ופונקציה $f \in A \rightarrow A$ נגדיר יחס שקילות S_f ב- A כלהלן:
 $S_f = \{\langle a, b \rangle \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}$
בקבוצה $A \rightarrow A$ ע"י \sim ונגדיר יחס שקילות \sim בקבוצה $A \rightarrow A$ ע"י $f \sim g \Leftrightarrow S_f = S_g$.
מהי מחלקת השקילות של פונקצית הזהות i_A בקבוצת המנה $(A \rightarrow A) / \sim$? הוכיחו קביעתכם.

5. נגדיר פונקציה $H = \lambda f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq x\}$

הוכיחו שהביטוי $\alpha. (\alpha \leq \aleph_0) \wedge (\forall f \in \text{Eq}(\mathbb{N}, \mathbb{N}). |H(f)| \neq \alpha)$ מוגדר היטב.
(המשתנה α מציין עוצמה; $\text{Eq}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ היא קבוצת פונקציות השקילות מקבוצת הטבעיים על עצמה.)

חלק שני בעמוד הבא

חלק שני (שאלות 6 עד 9)

ניקוד השאלות בחלק זה (לא לפי הסדר): 20, 10, 10, 5 סה"כ 45 נקודות.
 חישוב הציון: לפתרון כל שאלה יקבע ציון גלמי עד 10 נק'. לפני הסיכום יוכפל הציון הגלמי הגבוה ביותר בשתיים והנמוך ביותר יחולק בשתיים.

6. הציגו את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה b_n , $\lambda n \in \mathbb{N}$, המוגדרת על ידי $b_0 = a_0 = 0$ ו- $a_1 = 1$, ומשוואות הנסיגה $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 1$ ו- $b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$.

(אין צורך, ומומלץ שלא לנסות, לחשב את האיבר הכללי.)

7. תהינה N_k ו- B הקבוצות שהוגדרו בשאלה 1 בחלק הראשון. חשבו את עוצמת הקבוצה

$$\left\{ f \in N_{100} \rightarrow B \mid \forall k \in N_{99}, (7 \in f(k) \Rightarrow 6 \notin f(k+1)) \right\}$$

8. כמה רביעיות $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ של מספרים טבעיים מקיימות $x_1 + x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 1,000,000$ וגם $x_1 \leq 1$ וגם $x_2 \leq 9$?

9. כמה רביעיות $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ של מספרים טבעיים מקיימות $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1,000,000$?

בהצלחה!