מתמטיקה בדידה — סמסטר א׳ תשס״ח

א. אברון, ש. דר, י. רודיטי — מועד א׳ 18. 04.08

משך הבחינה **שלש** שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפים לשאלון).

<u>נמקו כל פתרון בפרוט ובמדויק.</u>

כמקובל, האותיות ***N***, ***R*** ו-***Q*** מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.

בבחינה **חמש** שאלות. יש לענות על כל השאלות. ערך מכסימלי לתשובה **נכונה** לשאלה הוא 25% . למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **שלש** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום שלש השאלות הקודמות.

1. א. הוכיחו כי חיבור עוצמות מוגדר היטב.

   ב. תהיינה a , b עוצמות. הוכיחו כי :

   $a \ge b \iff$ קיימת עוצמה c כך ש- $a = b+c$.

2. א. הביעו את הסכום הבא כביטוי מפורש של n . $\sum_{k=0}^{n} k3^k$

   ב. לכל אחד מהביטויים הבאים חשבו את ערכו אם הוא תקין. אם אינו תקין , ציינו מדוע :

$$\aleph-\aleph_0\ ,\ 0^0\ ,\ \aleph/7\ ,\ \ \iota a.a^{\aleph_0}=\aleph\ ,\ 3^{\aleph_0}5^{\aleph_0}$$

3. תהיינה a,b עוצמות ותהיינה A,B קבוצות כך ש - $|B|=b$, $|A|= a$. נגדיר :

   $O(a,b) = |\{ f : B \to A \mid$ על A $f \}|$

   א. הצרינו את הטענה המוכיחה כי $O(a,b)$ מוגדר היטב ללא שימוש במושג העוצמה או בסימון עבור עוצמת קבוצה . **אין צורך להוכיח את הטענה .**(ניתן להשתמש בכל הסימנים המקובלים האחרים).

   ב. חשבו את $O(\aleph_0, \aleph)$, $O(\aleph, \aleph_0)$.

   ג. חשבו את $O(30,20)$, $O(20,30)$.

4. עבור $n\in N^+$ ‏$A_n = \{\ k\in N \mid 1 \le k \le n^2\ \}$. חשבו את עוצמת כל אחת מהקבוצות הבאות.

א. $\{\ f\in A_n\to\{0,1\} \mid \forall j\in A_n.\ 1 \le j \le n^2-1 \Rightarrow f(j) \le f(j+1)\ \}$

ב. $\{\ f\in A_n\to\{0,1\} \mid \forall j\in A_n.\ 1 \le j \le n^2-n \Rightarrow f(j)+f(j+n)=1\}$

ג. $\{\ f\in A_n\to\{0,1\} \mid \forall j\in A_n.\ 1 \le j \le n^2-1 \Rightarrow \neg(\ f(j) = f(j+1) = 1)\ \}$

5. תהיינה X, Y קבוצות (לא ריקות). תהי $f : X \to Y$ פונקציה.

נגדיר שתי פונקציות:

$F = \lambda A \in P(X)\ .\ f\,[A]$ (**תזכורת :** $f\,[A] = \{\ y \in Y \mid \exists x \in A.\ f(x) = y\ \}$)

וכן : $G = \lambda B \in P(Y)\ .\ f^{-1}\,[B]$ (**תזכורת :** $f^{-1}\,[B] = \{\ x \in X \mid f(x)\in B\ \}$).

הוכיחו:

א. לכל $W \in P(Y)$ מתקיים $(F \circ G)(W) \subseteq W$ ושוויון מתקיים לכל W **<u>אםם</u>** f על Y.

ב. $\forall U,V \subseteq Y : G(U \cap V) = G(U) \cap G(V)$

בהצלחה!