

משך הבחינה שלוש שעות. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**. יש להשיב על **ארבע** השאלות. משקלן של שלוש השאלות שתקבלנה את הציונים הגבוהים יותר הוא 30% לכל שאלה ומשקלה של השאלה שתקבל את הציון הנמוך ביותר הוא 10%. אין בהכרח קשר בין סעיפים שונים של אותה השאלה.

**1.** א. חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות ( $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים):

- i.  $(N \rightarrow \{0,1\}) \rightarrow P(\{\emptyset\})$
- ii.  $P(N - (N - \{1,2,3\}))$
- iii.  $P(N) - P(N - \{1,2,3\})$
- iv.  $P(P(N) \cap P(P(N)))$

ב. תהינה  $a, b$  שתי עוצמות,  $a, b > 0$ . נגדיר  $\text{Log}(a, b) = \{c \mid a^c = b\}$ . תנו דוגמה לעוצמות  $a$  ו- $b$  כך ש  $|\text{Log}(a, b)| = \aleph_0$ . הוכיחו קביעתכם במלואה.

ג. תהי  $P$  קבוצת פסוקים. נגדיר יחס  $S$  על  $P$  כך:  $\{ \langle \alpha, \beta \rangle \in P \times P \mid \text{הפסוק } \alpha \rightarrow \beta \text{ הוא פסוק אמת} \}$ . האם היחס  $S$  הוא בהכרח יחס טרנזיטיבי? נמקו.

**2.** א. מצאו ביטוי סגור לאיבר הכללי  $a_k$  של הסדרה  $\lambda k \in N. a_k$  המוגדרת על ידי  $a_0 = 2, a_1 = 5$ , ועל ידי משוואת הנסיגה  $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$ .

ב. הסדרה  $\lambda k \in N. d_k$  מקיימת  $d_0 = 1, d_1 = 2$ , ואת משוואת הנסיגה  $d_{k+2} = 5d_{k+1} - 6d_k + 2$ . מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה  $\lambda k \in N. b_k$  אם מתקיים  $d_0 = b_0$ , ולכל  $k$  חיובי  $d_k = b_k - b_{k-1}$ .

ג. יהי  $ABCD$  ריבוע שאורך צלעו 2. הוכיחו כי לכל בחירה של 5 נקודות בפנים הריבוע קיים לפחות זוג נקודות מהן שהמרחק ביניהן אינו עולה על  $\sqrt{2}$ .

**3.** א. לכל מספר טבעי  $n$  נסמן ב- $I_n$  את קבוצת המספרים הטבעיים הקטנים מ- $n$ , למשל  $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . חשבו את העוצמות הבאות, והשלימו את החישוב לקבלת **תוצאה מספרית סופית**.

- i.  $|I_5 \rightarrow I_{10}|$
- ii.  $|\{f \in (I_5 \rightarrow I_{10}) \mid |f[I_5]| = 2\}|$
- iii.  $|\{f \in (I_5 \rightarrow I_{10}) \mid |f[I_5]| = 3\}|$

**תזכורת:**  $f[A]$  היא קבוצת התמונות של איברי  $A$  לפי  $f$ .

ב. נתונים 100 כדורים **שוניים** ו-4 תאים שממוספרים 1, 2, 3, 4. בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים לתאים כך שמספר הכדורים בתא ה- $i$  זוגי **אם ורק אם**  $i$  זוגי (עבור  $1 \leq i \leq 4$ )?

4. תזכורת: **איזומורפיזם** מגרף (פשוט, בלתי מכוון)  $G=(V,E)$ , לגרף (כני"ל)  $G'=(V',E')$  הוא פונקציה  $f:V \rightarrow V'$  הפיכה כך שכל שני קדקדים  $x$  ו- $y$  מתוך  $V$  הם קצותיה של קשת ב- $E$ , אם ורק אם  $f(y)$  ו- $f(x)$  הם קצותיה של קשת ב- $E'$ . איזומורפיזם מגרף  $G$  לעצמו, יקרא **אוטומורפיזם** של  $G$ .

א. הציגו גרף פשוט על קבוצת הקודקודים  $V=\{1,2,3,4\}$ , שכל פונקציה הפיכה מ- $V$  ל- $V$  היא אוטומורפיזם שלו.

ב. מה העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים  $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ , ששום שניים מהם אינם איזומורפיים?

ג. ציירו את העץ המתקבל מהמילה  $(2,3,2,4,7,10,1,1)$  לפי הקידוד (קוד Prüfer) בהוכחת משפט קיילי.

ד. יהי  $G=(V,E)$ ,  $|V|=n$ , גרף פשוט חסר מעגלים שבו  $k$  רכיבי קשירות. הוכיחו כי  $|E|=n-k$ .

**בהצלחה!**