

סמסטר א' תשס"ז
מועד א' 16.2.2007

מתמטיקה בדידה
אברון, טרסי, רודיטי

משך הבחינה שלוש שעות. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**. יש להשיב על **כל חמש** השאלות. חישוב הציון: 25 נקודות לשאלה. ציון שתי השאלות שיקבלו את הניקוד הנמוך ביותר יחולק בשתיים. כל תוצאה שהוצגה בכיתה או בתרגול אפשר לצטט בלי הוכחה, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

1 א. חשבו את העוצמות הבאות והוכיחו תוצאת כל חישוב. לצורך ההוכחה מותר השימוש בכל כללי האריתמטיקה (לא כולל, כמובן, את תוצאת החישוב עצמה).

$$, \mathcal{A} + \mathcal{A} \quad , \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \quad , \mathcal{A}^{\mathcal{A}}$$

ב. תהא A קבוצה בעלת עוצמה $|A| \geq \aleph$. הוכיחו כי קיימת תת קבוצה B של A , כך ש
 $|B| \geq \aleph$ ו- $|A-B| = \aleph$.

2 בקבוצת הפונקציות הממשיות $R \rightarrow R$ נגדיר יחס שקילות " \sim " כלהלן:

$$f \sim g \Leftrightarrow (\forall x, y \in R (f(x)=f(y) \Leftrightarrow g(x)=g(y)))$$

א. חשבו את עוצמתה של מחלקת השקילות $[\lambda x \in R. 1]_{\sim}$

ב. חשבו את עוצמתה של מחלקת השקילות $[\lambda x \in R. x]_{\sim}$

ג. הוכיחו או הפריכו: שתי פונקציות ממשיות f ו- g מקיימות $f \sim g$ אם ורק אם קיימת פונקציה ממשית הפיכה h כך ש $g = f \circ h$

3 א. מהי הפונקציה היוצרת הרגילה של הסידרה $\sum_{k=0}^n k(k-1)$ $\lambda n \in \mathbb{N}$. הציגו ביטוי סגור.

ב. הוכיחו או הפריכו: בכל קבוצה בת עשרים ושישה מספרים טבעיים קטנים מ-50 יש שניים שסכומם 49.

ג. בכמה אופנים ניתן לבנות מקוביות אדומות, ירוקות, צהובות וכחולות (אין הכרח להשתמש בכל הצבעים) מגדל בגובה חמש קוביות, כך שלפחות אחת מכל שתי קוביות סמוכות היא כחולה או ירוקה? הציגו תוצאה מספרית סופית.

4 נגדיר: $A_n = \{k/n \mid k \in \mathbb{N}^+ \wedge k \leq n\}$ עבור $n \in \mathbb{N}^+$.
חשבו:

א. $|A_n \rightarrow A_{2n}|$

ב. $| \{f: A_n \rightarrow A_{2n} \mid \forall x \in A_n, f(x) \neq 1-x\} |$

ג. $| \{f: A_n \rightarrow A_{2n} \mid \forall x \in A_n, f(x) \neq 1-x \wedge \text{חד ערכית}\} |$

5 תזכורת: $P_2(A)$ היא קבוצת כל תת הקבוצות בעוצמה 2 של הקבוצה A .

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט לא מכוון (כלומר קשת היא קבוצה בת שני קודקודים)
המוגדר על ידי: $V=P_2(\{1,2,\dots,n\})$
 $E=\{ \{A,B\} \in P_2(V) \mid |A \cap B| = \emptyset \}$

א. חשבו את $|V|$

ב. מהי הדרגה של כל קודקוד ב- V ?

ג. הוכיחו כי אם $n \geq 5$ אזי G קשיר.

בהצלחה!