מתמטיקה בדידה
סמסטר א׳ תשס״ו

א . אברון , ע . רגב , י . רודיטי
מועד ב׳ 2006/09/08

משך הבחינה שלוש שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

רשום תשובותיך הסופיות **רק** על טופס הבחינה, **ורק** במקום המיועד לכך. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

- בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות.
- **הקפידו לנמק כל תשובה בפרוט ובמדויק.**
- **ניקוד:** ניקוד מקסימלי לתשובה נכונה לשאלה הוא 20 (סעיפי בונוס עשויים להוסיף עד 3 נקודות נוספות). למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתיים והתוצאה תתווסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.
- כמקובל, האותיות $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים והממשיים.

בְּהַצְלָחָה!

1. תהי A קבוצה. נגדיר את $T(A)$ באופן הבא:

$$T(A) = \{ B \subseteq A \mid |B| \leq |A \setminus B| \}$$

א. מצאו ביטוי קצר ככל האפשר לעוצמת $T(\{1,\ldots,100\})$.

ב. מצאו את עוצמת $T(\mathbb{N})$.

ג. תהי a עוצמה. נגדיר: $f(a) = |A \cup T(A)|$ כאשר A היא קבוצה המקיימת $|A| = a$. הוכיחו ש- f **אינה** מוגדרת היטב (כלומר, היא תלויה בבחירת A).

ד. **בונוס**: תהא A קבוצה המקיימת $|A|+|A|=|A|$. הוכיחו כי $|T(A)|=|P(A)|$.

2. תהיינה A,B קבוצות של מספרים טבעיים (כלומר, תתי קבוצות של $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$). נגדיר:

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

א. חשבו את $\{0,8,9\}+\{2,3\},\mathbb{N}_{even}+\{3,5\},\mathbb{N}+\emptyset$

ב. נגדיר את היחס הבא:

$$R = \{ \langle A,B\rangle \in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N}) \mid \exists C \in P(\mathbb{N}) .\ B = A + C \}$$

האם R הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי? על איזו קבוצה?

ג. האם R הוא יחס טרנזיטיבי?

ד. האם R הוא יחס אנטי-סימטרי (חלש)?

ה. **בונוס:** מצאו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ A \in P(\mathbb{N}) \mid A+A=A \}$$

3. תהי P קבוצה של "נקודות" ותהי L קבוצה של "ישרים" בעולם דמיוני. כל ישר ב-L הוא קבוצה של נקודות, כלומר תת קבוצה של P. הקבוצות P ו- L מקיימות את התכונות הבאות:

א. דרך כל שתי נקודות שונות של P עובר ישר יחיד מ-L.

ב. כל ישר ב-L הוא קבוצה בעוצמה 3.

(דוגמא לקבוצות כאלה:

$P=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $L=\{\{1,2,3\},\{1,4,7\},\{3,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,5\},\{1,5,6\},\{2,4,6\}\}$)

תהא x נקודה כלשהי ב-P. נגדיר התאמה:

$$f = \lambda y \in (P \setminus \{x\}).(\iota z.z \in xy \setminus \{x, y\})$$

כאשר xy הוא הישר העובר דרך הנקודות x ו-y, ו-ιz מסמן את "ה-z היחיד כך ש-".

א. מצאו תחום וטווח ל-f והוכיחו כי f היא פונקציה מוגדרת היטב.

ב. הוכיחו כי f היא פונקצית שקילות ומצאו פונקציה הפוכה.

ג. בעזרת הסעיף הקודם (או בכל דרך אחרת), הראו שאם P קבוצה סופית, אז עוצמתה היא אי-זוגית.

נמקו את כל שלבי ההוכחות!

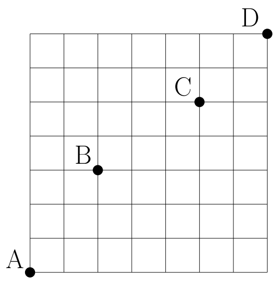
4. נגדיר: $F = \lambda g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{R}).\ \lambda n \in \mathbb{N}\ .\ g(n+1) + 3g(n)$

א. מצאו תחום וטווח של F וחשבו את $(F(\lambda n \in \mathbb{N}\ .\ n^2-3))(4)$

ב. פתרו את המשוואה $(F \circ F)(X) = (\lambda n \in \mathbb{N}.16)$ (כלומר מצאו את כל האברים X בתחום שמקיימים את תנאי זה).

5. א. כמה מסלולים באורך 14 ניתן ליצור מ-A ל-D?
ב. כמה מתוך מסלולים אלו אינם עוברים לא ב-B ולא ב-C?
ג. מצאו ביטוי קצר לנוסחה הבאה:

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} 7^i$$



6.
א. עבור גרף קשיר נתון, נגדיר את המרחק בין שני צמתים בתור אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם. עבור כל $n \geq 3$, מצאו את מספר העצים על קבוצת הצמתים $\{1,\ldots,n\}$ שמקיימים שהמרחק בין כל שני צמתים הוא לכל היותר 2.
ב. כמה עצים יש על $\{1,\ldots,n\}$ עם בדיוק שלושה עלים?