

# מבחן במתמטיקה בדידה

מועד מיוחד סמסטר ב' תשס"ה, 2005/11/18

מרצה: עודד רגב

מתרגלת: טלי קאופמן

משך המבחן: שלוש שעות

אסור השימוש בכל חומר עזר

הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט

שתי התשובות הטובות תחשבנה כ-30 נקודות כל אחת

שאר שתי התשובות תחשבנה כ-20 נקודות כל אחת

1. (א) הוכח או הפרד: לכל קבוצות  $A, B, C$  כך ש- $B, C$  זרות, מתקיים

$$P(A \setminus B) \cup P(A \setminus C) = P(A)$$

(ב) הוכח או הפרד: לכל עוצמות  $a$  ו- $b$  אין סופיות כך ש- $a > b$ , קיימת עוצמה  $c$  כך ש- $a^c > (b+c)^c$ .

(ג) תהא  $a$  עוצמה שמקיימת  $a \cdot a = a$ . מצא באילו תנאים נוספים על  $a$  מתקיים  $(a+2)^a > 2^a$ .

(ד) ננסה להגדיר חיסור עוצמות בצורה הבאה: עבור עוצמות  $a, b$  כך ש- $a \geq b$  נגדיר את  $a - b$  בתור

העוצמה של  $A \setminus B$  כאשר  $A$  היא קבוצה מעוצמה  $a$ ,  $B$  היא קבוצה מעוצמה  $b$  ומתקיים  $B \subseteq A$ .

הראה שהגדרה זו אינה טובה. מה לפי דעתך יקרה אם נגדיר חיסור עוצמות רק לעוצמות  $a, b$

שמקיימות  $a > b$ ?

2. נגדיר פונקציה

$$H = \lambda A \in P(\mathbb{Q}). \{x \in A \mid |\{y \in A \mid y \leq x\}| < |\{y \in A \mid y \geq x\}|\}$$

(א) מצא תחום וטווח ל- $H$ .

(ב) הוכח או הפרד:  $H$  היא פונקציית שקילות.

(ג) הוכח או הפרד: לכל  $A$  אינסופית,  $H(A)$  אינה ריקה.

(ד) מצא את העוצמות

$$|\{A \in P(\mathbb{N}) \mid H(A) = \emptyset\}|$$

$$|\{A \in P(\mathbb{Z}) \mid H(A) = A\}|$$

3. (א) מצא את מספר הסדרות באורך  $n$  שמורכבות מהספרות 0, 1, 2 ושאינן מכילות שתי ספרות אי-זוגיות סמוכות.

(ב) יהי  $n \geq 0$  מספר טבעי. מצא את מספר הפתרונות של

$$a + b + c + 2 = n$$

כאשר  $a, b, c \geq 0$  הם מספר טבעיים שמקיימים  $a \neq b$ .

(ג) יהי  $n$  מספר טבעי. חשב את מספר התמורות  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  על  $n$  אברים

שמקיימות שלכל  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\pi(k) - k$  הוא מספר אי-זוגי (המספרים האי-זוגיים הם  $\pm 1, \pm 3, \dots$ ).

4. (א) מה מספר הפונקציות  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  שמקיימות שלכל  $k$  בתחום,  $f(k) \neq k + 1$ ?

(ב) מה מספר הפונקציות שמקיימות את הדרישה בסעיף הקודם ובנוסף ש- $f \circ f$  היא פונקציה הפיכה?

(ניתן להעזר בסימון  $D_n$  למספר האי סדרים על  $n$  אברים)

בהצלחה!!!