1.ב. I. הקבוצה שאת עוצמתה אנחנו מחפשים היא קבוצת הפונקציות החח"ע מ-$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
ל-$\mathbb{Q}$. אבל הוכחנו בכיתה ש- $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=\aleph$, $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ וגם
$\aleph>\aleph_0$ (משפט קנטור). לכן לא קיימת פונקציה חח"ע מ-$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
ל-$\mathbb{Q}$ ולכן העוצמה המתקבלת היא 0 (כי הקבוצה ריקה).

II. נסמן $A=\{f\in\mathbb{R}\to\{0,1\} \mid \forall x\in\mathbb{R}. f(x)=f(x+1)\}$

$B=[0,1)\to\{0,1\}$ (קבוצת הפונקציות מ-$[0,1)$ ל-$\{0,1\}$)

לפי חשבון עוצמות $|B|=|\{0,1\}^{[0,1)}|=|\{0,1\}|^{|[0,1)|}=2^{\aleph}$. בהמשך נראה ש- $|A|=|B|$
ומכך ינבע שהתשובה היא ש- $|A|=2^{\aleph}$.

נגדיר פונקציה h מ-A ל-B:

$$h=\lambda f\in A. f|_{[0,1)}=\lambda f\in A.\lambda x\in[0,1).f(x)$$

כלומר, h מתאימה לכל $f\in A$ את הצמצום שלו ל-$[0,1)$.

נוכיח ש-h היא פונקצית שקילות מ-A ל-B ע"י הוכחת חח"ע ועל.

<u>חח"ע:</u> נניח שעבור $f_1,f_2\in A$ מתקיים $h(f_1)=h(f_2)$. כלומר, $f_1|_{[0,1)}=f_2|_{[0,1)}$.
נראה שמכך נובע ש-$f_1=f_2$. עבור $x\in\mathbb{R}$, נסמן ב-$frc(x)=x-\lfloor x\rfloor$
את החלק השברי של x (למשל $frc(3.2)=0.2$, $frc(-1.3)=0.7$).
אז, מכיוון שלכל x מתקיים $frc(x)\in[0,1)$ וגם $x-frc(x)\in\mathbb{Z}$,

$$f_1(x)=f_1(frc(x))=f_1|_{[0,1)}(frc(x))=f_2|_{[0,1)}(frc(x))=f_2(frc(x))=f_2(x)$$

(כאן השתמשנו בעובדה שלכל $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, $f\in A$ מתקיים $f(x+k)=f(x)$)

לכן $f_1=f_2$, והפונקציה h חח"ע.

על: יהא g פונקציה כלשהי ב-B. נגדיר:

$$f=\lambda x\in\mathbb{R}.\ g(frc(x))$$

זו הגדרה תקינה כי $frc(x)\in[0,1)$ נמצא בתחום של g.

כעת נשים לב ש:

$$h(f)=f|_{[0,1)}=\lambda x\in[0,1).\ g(frc(x)) \underset{\uparrow}{=} \lambda x\in[0,1).\ g(x)=g$$

כי עבור $x\in[0,1)$, $frc(x)=x$

לכן h היא על B.

1.ב. דרך שקולה לנסח את השאלה היא:

מה מספר הסדרות באורך n של אפסים ואחדים כך שלכל i בין 1 ל-n, לפחות חצי מהסדרה עד מקום i הן 1 ובנוסף, בדיוק חצי מכל הסדרה הן 1.

זו בדיוק השאלה שעליה עונים מספרי קטלן. כמו שראינו בכיתה, מספר הסדרות האלה הוא $\frac{1}{\frac{n}{2}+1}\binom{n}{n/2}$.

1.ג. נוכיח שלכל קבוצה אינסופית A קיימת תת קבוצה אינסופית B כך ש- $|A\setminus B|=|A|$. ממשפט קנטור נובע ש- $|P(A\setminus B)|>|A\setminus B|$

ולכן נקבל ש- $|P(A\setminus B)|>|A|$ כנדרש.

יהא A קבוצה אינסופית כלשהי. לפי משפט שהוכחנו בכיתה, קיימת $C\subseteq A$ כך ש- $|C|=\aleph_0$. מכיוון ש- $|C|=\aleph_0$, קיימת פונקציית שקילות f מ-$\mathbb{N}$ ל-C. נסמן את התמונה של $\mathbb{N}_{even}$ תחת f ב- $B=f[\mathbb{N}_{even}]$.

אז $|A|=|(A\setminus C)\cup C|=|A\setminus C|+|C|$

$$|A\setminus B| = |(A\setminus C)\cup(C\setminus B)| = |A\setminus C| + |C\setminus B|$$

לכן מספיק להוכיח ש- $|C\setminus B|=|C|$. ואמנם, $C\setminus B = f[\mathbb{N}_{odd}]$
ומכיון ש- $f|_{\mathbb{N}_{odd}}$ היא פונקציה שקילות מ- $\mathbb{N}_{odd}$ ל- $C\setminus B$ נקבל
ש- $|C\setminus B| = |\mathbb{N}_{odd}| = \aleph_0$. כמו כן, ידוע ש- $|C|=\aleph_0$ ולכן הראינו
ש- $|C\setminus B|=|C|$ כנדרש.

2.א. מההגדרה רואים ש-S מורכב מזוגות של אברים מ- $P(\mathbb{Q})$ ולכן הוא יחס על $P(\mathbb{Q})$.
נראה שהוא יחס שקילות, כלומר, רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

<u>רפלקסיבי:</u> לכל $A\subseteq\mathbb{Q}$, פונקציית הזהות i_A היא פונקציה שקילות מ-A ל-A (כלומר חח"ע ועל). לכן ASA.

<u>סימטרי:</u> נניח שמתקיים ASB עבור $A,B\subseteq\mathbb{Q}$ כלשהם. מכך נובע שקיימת f חח"ע ועל מ-A ל-B. לכן f היא הפיכה, והפונקציה ההפוכה לה, f^{-1}, היא פונקציה שקילות מ-B ל-A. לכן, BSA.

<u>טרנזיטיבי:</u> נניח שמתקיים ASB וגם BSC עבור $A,B,C\subseteq\mathbb{Q}$ כלשהם.
לכן קיימת פונ' שקילות f מ-A ל-B וגם פונ' שקילות g מ-B ל-C.
לכן $g\circ f$ היא פונ' שקילות מ-A ל-C (כמו שהוכח בכיתה)

2.ב. מההגדרה רואים ש ASB אם"ם A שווה עוצמה ל-B. לכן מחלקת השקילות של $\{1,4,9\}$ היא קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{Q}$ מעוצמה 3:

$$[\{1,4,9\}]_S = \{A\subseteq\mathbb{Q} \mid |A|=3\}$$

נסמן את קבוצה זו ב- B. אז מצד אחד, $|B|\geq\aleph_0$ כי הפונקציה $\lambda x\in\mathbb{Q}.\{x,x+1,x+2\}$ היא פונ' חח"ע מ- $\mathbb{Q}$ ל- B. (אמנם, אם $\{y,y+1,y+2\} = \{x,x+1,x+2\}$ אז בהכרח $x=y$ כי האיבר הקטן ביותר בקבוצה השמאלית הוא x ובימנית הוא y). נראה עכשיו ש- $|B|\leq\aleph_0$.
נגדיר פונקציה f מ- B ל- $\mathbb{Q}^3=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ע"י: בהנתן $A\in B$,
$f(A)$ הוא השלשה היחידה (a_1,a_2,a_3) כך ש- $a_1<a_2<a_3$
וגם $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. כלומר, $f(A)$ הוא השלשה המורכבת מאיברי

A ממוינים בסדר עולה. אז נראה ש-f חח"ע: אם $f(A_1)=f(A_2)$

אז $(a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3})=(a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3})$ כאשר $A_1=\{a_{1,1},a_{1,2},a_{1,3}\}$, $A_2=\{a_{2,1},a_{2,2},a_{2,3}\}$

ולכן $A_1=A_2$. קיבלנו ש-f חח"ע ולכן $|B|\le|\mathbb{Q}^3|=\aleph_0$.

לסיכום, $|B|=\aleph_0$ (לפי משפט קנטור ברנשטיין).

2.ג. בקבוצת המנה קיימת מחלקת שקילות אחת לכל עוצמה אפשרית
לתת קבוצה של $\mathbb{Q}$. בפרט לכל מספר טבעי $0,1,2,\dots$ קיימת
מחלקת שקילות שמורכבת מכל תתי הקבוצות של $\mathbb{Q}$ בעוצמה זו
(ואכן יש תתי קבוצות כאלה). בנוסף, לכל עוצמה אינסופית אפשרית
לתת-קבוצה של $\mathbb{Q}$ קיימת מחלקת שקילות. אבל הראינו בשיעור שכל עוצמה
אינסופית גדולה שווה מ-$\aleph_0$ ולכן העוצמה האינסופית היחידה שיכולה
להופיע היא $\aleph_0$ (כי $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$).

לסיכום: לכל $i\in\mathbb{N}$ נסמן ב- B_i את כל תתי הקבוצות של $\mathbb{Q}$ מעוצמה i
ונסמן ב- $B_{\aleph_0}$ את כל תתי הקבוצות של $\mathbb{Q}$ מעוצמה $\aleph_0$.

אז $P(\mathbb{Q})/_S=\{B_0,B_1,B_2,\dots\}\cup\{B_{\aleph_0}\}$

עוצמתה של קבוצת המנה היא לכן

$$|P(\mathbb{Q})/_S|=\aleph_0+1=\aleph_0$$

2.3. אם נחליף את $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$ אז תהיה בקבוצת המנה גם קבוצת כל התתי
קבוצות מעוצמה $\aleph$. אבל, איננו יכולים להוכיח אם אין עוצמות בין
$\aleph_0$ ל- $\aleph$ ולכן לא ניתן לקבוע את קבוצת המנה או את עוצמתה
(דבר זה תלוי בהשערת הרצף).

3.א. קודם כל, נפתור את נוסחת הנסיגה ההומוגנית:

$$a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$$

נחפש פתרון מהצורה $a_n=x^n$:

$$x^n=3x^{n-1}+4x^{n-2}$$

נחלק ב-x^{n-2}:

$$x^2=3x+4$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

לכן $x=4$ או $x=-1$. לכן פתרון כללי למשוואה ההומוגנית הוא:

$$a_n=A\cdot 4^n+B\cdot(-1)^n$$

נמצא עכשיו פתרון אחד למשוואה הלא הומוגנית: $a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}+6$.
קל לראות ש- $a_n=-1$ הוא כזה פתרון. לכן, פתרון כללי למשוואה הלא הומוגנית הוא

$$a_n=A\cdot 4^n+B\cdot(-1)^n-1.$$

לסיום, נציב תנאי התחלה.

$$2=a_0=A+B-1$$
$$1=a_1=4A-B-1$$

נפתור ונקבל $A=1, B=2$. לכן הפתרון הוא:

$$a_n=4^n+2\cdot(-1)^n-1$$

3.ב. להגיד ש- $\pi(k)-k$ זוגי זה כמו להגיד שגם k וגם $\pi(k)$ זוגיים
או שגם k וגם $\pi(k)$ אי זוגיים. לכן, תמורה שמקיימת ש-
$\pi(k)-k$ זוגי לכל k זו תמורה ששולחת כל איבר זוגי לאיבר זוגי
וכל איבר אי זוגי לאיבר אי זוגי. במילים אחרות, תמורה כזאת
מורכבת משתי תמורות: אחת על הזוגיים ואחת על האי זוגיים.
במקרה ש-n זוגי, יש $\frac{n}{2}$ מספרים זוגיים בין 1 ל-n
וגם $\frac{n}{2}$ אי זוגיים בין 1 ל-n. לכן מספר התמורות במקרה
זה הוא $\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!$. במקרה ש-$n$ אי זוגי, אז יש
$\left(\frac{n-1}{2}\right)$ זוגיים בין 1 ל-n ויש $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ אי זוגיים. לכן מספר
התמורות הוא $\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!$.

(הערה: בשני המקרים, התשובה היא $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor!\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil!$)

4.א. נגדיר את הקבוצות הבאות:
S - כל הפתרונות של $a+b+c=n$ במספרים אי שליליים.
A_1 - פתרונות שבהם $a=b$
A_2 - פתרונות שבהם $b=c$
A_3 - פתרונות שבהם $a=c$
אנחנו מחפשים את: $|S-(A_1\cup A_2\cup A_3)|$. לפי נוסחת ההכלה וההדחה, זה שווה ל-

$$|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

נחשב את מספר האיברים בכל קבוצה:
S - לפי מה שראינו בשיעור, זה בדיוק מספר הדרכים לבחור n
איברים מתוך שלושה איברים עם חזרות וללא חשיבות לסדר.
לכן: $|S|=\binom{n+3-1}{3-1}=\binom{n+2}{2}$
A_1 - אם $a=b$ אז ברגע שקבענו את a, נקבעים גם b וגם c.
לכן מספר הפתרונות הוא כמספר הדרכים לבחור את a שהוא
כמספר השלמים בין 0 ל- $\frac{n}{2}$. מספר זה הוא $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$.

לכן $|A_1| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

A_2, A_3 - קל לראות ש- $|A_1|=|A_2|=|A_3|$.

$A_1\cap A_2$ - אלה הפתרונות שבהם $a=b$ וגם $b=c$. כלומר, $a=b=c$.
פתרונות כאלה יש בדיוק אחד במקרה ש- n מתחלק ב-3
ו- אפס אחרת.

$A_2\cap A_3$, $A_1\cap A_3$ - קל לראות שזו בדיוק אותה קבוצה כמו $A_1\cap A_2$.

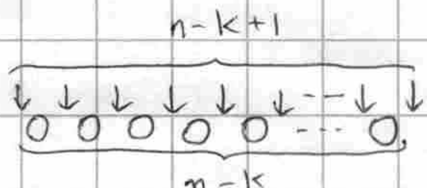
$A_1\cap A_2\cap A_3$ - אלה הפתרונות שבהם $a=b$, $b=c$, $a=c$. כלומר, פתרונות שבהם $a=b=c$. זו עוד הפעם אותה קבוצה כמו $A_1\cap A_2$.

לסיכום, קיבלנו ש:

אם n מתחלק ב-3, התשובה היא $\binom{n+2}{2}-3(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)+2$

אחרת, התשובה היא $\binom{n+2}{2}-3(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)$

4.ב.



כל סדרה כזאת ניתן לייצג כבחירה של k מקומות שבהם נכניס אחדים מבין $n-k+1$ מקומות אפשריים. מספר זה הוא בדיוק $\binom{n-k+1}{k}$.
(התנאי שאין שני אחדים רצופים מקביל לעובדה שאיננו מרשים חזרות בבחירה)