

מבחן במתמטיקה בדידה

מועד א' סמסטר ב' תשס"ד, 2004/6/18

מרצה: עודד רגב

משך המבחן: שלוש שעות

אסור השימוש בכל חומר עזר

הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט

שתי התשובות הטובות תחשבנה כ-30 נקודות כל אחת

שאר שתי התשובות תחשבנה כ-20 נקודות כל אחת

1. (א) מצא את העוצמות

$$|\{f \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. f(a) \neq f(b) \vee a = b\}|$$

$$|\{f \in \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) = f(x+1)\}|$$

(ב) יהי n מספר זוגי. מצא את העוצמה

$$\left| \left\{ f \in \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \sum_{j=1}^i f(j) \geq \frac{i}{2} \wedge \sum_{j=1}^n f(j) = \frac{n}{2} \right\} \right|$$

(ג) הראה שלכל קבוצה אינסופית A קיימת תת-קבוצה אינסופית B כך ש- $|P(A \setminus B)| > |A|$.

2. נגדיר

$$S = \{(A, B) \in P(\mathbb{Q}) \times P(\mathbb{Q}) \mid \exists f \in A \rightarrow B\}$$

(א) הראה ש- S הוא יחס שקילות. על איזו קבוצה?

(ב) מצא את מחלקת השקילות $[[1, 4, 9]]_S$ ואת עוצמתה.

(ג) מהי קבוצת המנה? מה עוצמתה? הקפד להסביר בפירוט.

(ד) מה ניתן היה להגיד על קבוצת המנה אם היינו מחליפים את \mathbb{Q} ב- \mathbb{R} בהגדרה של S ?

3. (א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_0 = 2, a_1 = 1, \forall n \geq 2. a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 6$$

(ב) יהי n מספר טבעי. חשב את מספר התמורות $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ על n אברים שמקיימות שלכל $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ הוא מספר זוגי (המספרים הזוגיים הם $0, \pm 2, \pm 4, \dots$).

4. (א) יהי n מספר טבעי. מצא את מספר הפתרונות של

$$a + b + c = n$$

כאשר $a, b, c \geq 0$ הם מספר טבעיים שונים זה מזה.

(ב) הראה שמספר הסדרות באורך n שמכילות k אחדים ו- $n-k$ אפסים שאין בהן שני אחדים רצופים הוא

$$\binom{n-k+1}{k}$$

בהצלחה!!!