7

מועד א׳ סמ׳ קיץ תשס״א
מועד ב׳ סמ׳ א׳ + ב׳ תשס״א
תאריך הבחינה : 13.9.2001

מס׳ סידורי: 47

ת״ז: _

94

מבחן במתמטיקה בדידה

מורים: פרופ׳ אברון, פרופ׳ אלון, ד״ר דר, פרופ׳ טרסי ,פרופ׳ רודיטי

סימונים : N, Q, R יסמנו את קבוצות המספרים הטבעיים, הרציונלים והממשיים בהתאמה.

כללי – הבחינה : 1. אסור להשתמש בכל חומר עזר, למעט הדפים המצורפים ומחשבון .

2. בבחינה 6 שאלות. תשובה נכונה מזכה את הכותב ב- 20% . למניית הנקודות הסופי תילקחנה 4 שאלות שלהן הניקוד המרבי. ניקוד שתי השאלות הנותרות יסוכם, יחולק ב-2-ויתווסף לסך הנקודות שנצברו ב- 4 השאלות הקודמות.

הנחיה מיוחדת: יש לענות על שאלות על גבי טופס המבחן.

ב ה צ ל ח ה !

12 ?

פרופסור חפצי

מסי סידורי: 47

ת"ז: ____

שאלה 1

יהיו $A=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$, $B=\bigcup_{x\in A}P(x)$.

תהי M קבוצת **כל** היחסים הסימטריים והאי-רפלקסיביים על הקבוצה B .

חשב את: $\left|\{f\in M\to M \mid \forall T\in M. f(T)\neq T\}\right|$

פתרון: (*) ראשית נמצא את B.

$P(\phi)=\{\phi\}$

$P(\{\phi\})=\{\phi,\{\phi\}\}$

6

$P(\{\phi,\{\phi\}\})=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

סופר !!

כאמור: $|B|=3$ (איחוד של 3 קב' חזקה)

(*) ננסה להבין מה יש ביחסים בקב' M:

אפשר להסתכל על זה כמטריצה בגודל 3x3 (שכן $|B|=3$):

	1	2	3
1	0	.	.
2		0	.
3			0

(סימון במשבצת (x,y) כשהי 1 אם (x,y) מקיימת ביחס אחרת (סימון 0. מאחר שיש

רק יחס שהם סימטריים ואי-רפלקסיביים ברור כי באלכסון יסומנו 0 כמובן

(אי-רפלקסיביות). מאחר שהדרישה היא שהיחס יהיה גם סימטרי אם יש 1 במשבצת

(x,y) יש גם 1 במשבצת (y,x) ולהפך. אם באחד מהשניים יש 0 גם בשני יהיה 0

6

לכן מספיק להסתכל במשבצות מעל האלכסון (3 משבצות) ולכל אחת יש 2

אפשרויות כלומר לכל משבצת (x,y) קיימות 2 אפשרויות: x מתייחס ל-y וגם

בהכרח y מתייחס ל-x (סימטריה) או x לא מתייחס ל-y וגם שוב עקב סימטריה בהכרח

y לא מתייחס ל-x כלומר סך האפשרויות: 2^3 לכן: $|M|=2^3$

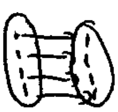
(*) נותר לחשב: $\left|\{f\in M\to M \mid \forall T\in M. f(T)\neq T\}\right|$.

כלומר יש לחשב כמה פו' קיימות

ל-M^M כך שלכל מקור בהכרח רק

לא הולך לתמונתו!

2^3 איברים



שפן רין

9
סימפסון
1כדור

מס' סידורי: 47
ת"ז: [illegible]64

~~[illegible]~~

~~תומר:~~

~~$|\bar{A}| = |\Omega| - |A|$~~

~~$|A| = 1$ וכאומר~~

~~$|\Omega| = 8^8$~~

~~מפני שמספר הפו' מקב' בת 8 איברים~~
~~נקב' בת 8 איברים (שהרי $8=|M|$ ללא פסיש~~
~~(עם חזרות אך סדר) הוא 8^8 - כל איבר מהמקור~~
~~וכל לזור לכל איבר מהטווח.~~

~~לכן התשובה המבוקשת היא:~~

~~$\boxed{8^8 - 1}$~~

__המשך לתשובה:__ נשתמש בהכלה והדחה שכן הדרישה היא __שאף__ מקור לא הלך לתמונתו. נגדיר

A_i - המקור ה-i עובר לתמונתו כאשר $f(i)=i$

צ"ל:

$|\cap \bar{A_i}|$

$i=1..8$ (כאשר סך הכל יש 8 מקורות)

$|\Omega| = 8^8$ שכן מספר הפו' מקב' בת 8 איברים לקב' בת 8 איברים ללא פרישה (ראינו חח"ע ועל) הוא 8^8 - לכל אחד מ-8 תמונות אפשריות.

$|A_i| = 8^7$

המקור ה-i עובר לתמונתו ויש נותרנו עם 7 מקורות ועם 8 תמונות

לכן:

$$|\cap \bar{A_i}| = 8^8 - \underbrace{\binom{8}{1}}_{\text{בחירת מקור ששלח לתמונתו.}} 8^7 + \underbrace{\binom{8}{2}}_{\text{2 מקורות ששולחו לתמונתם}} 8^6 - \binom{8}{3} 8^5 + \binom{8}{4} 8^4 - \binom{8}{5} 8^3 + \binom{8}{6} 8^2 - \binom{8}{7} 8 + 1$$

אם כל המקורות נשלחו לתמונותיהם מדובר בפו' הזהות (קיימת אחת כזו).

פרופסור 10
תגבר

20

מסי סידורי: 47

ת"ז: [illegible]

שאלה 2

תהי a עוצמה המקיימת את התנאי:

לכל קבוצה A וקבוצה B אם $A \subset B$ ו- $|A| = a$ וכן $|B| > a$ אזי, $|B - A| > a$.

הוכיחו: א) $a + a = a$.

ב) אם $A \subset B$ ו- $|A| = a$ וכן $|B| > a$ אזי, $|B - A| = |B|$.

ההגדרה אינה
גלויה בעוצמות
לכן נוכל לבחור
כל 2 קב'
והחיבור עדיין

סעיף א

הוכחה: נבחר $|A| = a$, $|D| = a$ רק ש: $A \cap D = \phi$.

אזי ש: A, D זרות $a + a = |A| + |D| = |A \cup D|$. [מהגדרה חיבור עוצמות]

כעת נותר להראות כי $a = |A \cup D|$ ואז אכן ינבע כי $a + a = a$

נניח בשלילה כי $|A \cup D| > a$

אזי $|D| = a$

וגם $D \subset A \cup D$

$|A \cup D| > a$ (לפי ההנחה)

אז לפי התנאים שבשאלה נובע כי מתקיים: $|A \cup D \setminus D| > a$

אבל! $|A \cup D \setminus D| = |A|$ -

וקיבלנו: $|A \cup D \setminus D| > \alpha$

$|A| > \alpha$ וזה בסתירה לנתון! $\Leftarrow$ $|A \cup D| \leq \alpha$

לכן: $|A \cup D| = \alpha + \alpha$ וגם $|A \cup D| = \alpha$

$\alpha + \alpha = \alpha$ כנדרש!

מ.ש.ל.

משום שקיבלנו:
$|A \cup D| \leq \alpha$
וגם
$\alpha = |A| \leq |A \cup D|$
אז לפי משפט קנטור
שרדר ברנשטיין:
$|A \cup D| = \alpha$

סעיף ב:

על פי סעיף א': $|B - A| > \alpha$

אז נבחר: $|D| = \alpha$ רק ש: $D \subset B - A$

ונראה כי אכן: $|B - A| = |B|$.

הוכחה: $|B \setminus A| = |(B - A - D) \cup D|$

$|B \setminus A| = |B \setminus A \setminus D| + |D|$

11
פרופסור
רובינו

מס' סידורי: 47
ת"ז:

אם D אינסופית אז: $\alpha+\alpha=\alpha$

ולכן $|D|$ $=$ $\alpha+\alpha=|A|+|D|=\alpha$

כלומר:

$|B-A| = |B\setminus A\setminus D|+|D| = |B\setminus A\setminus D|+|D|+|A|$

שהרי $|D|=|A|+|D|$ ($\alpha+\alpha=\alpha$)

$= |B|$

כלומר קיבלנו $|B-A|=|B|$ כנדרש! מ.ש.ל

17

פרופסור רובינו

20

מסי סידורי: 47

ת"ז: 040289464

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו הטענות הבאות:

א) $\lambda x \in R.\{x\} \in \{f \in R \to R \mid \forall x \in R. |f(x)| = 1\}$

ב) $\lambda x \in R.3^x \in \{f \in R \to R \mid \exists y \in \{x \in R \mid x \le 0\}. y \in \{f(x) \mid x \in R\}\}$

ג) $P(\{3n \mid n \in N\}) \subset \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{3k \mid k \in N\}|\}$

פתרונות:

א) הטענה אינה נכונה משום שלפי הטענה ~~[illegible]~~ הפו' $\lambda x \in R.\{x\}$ היא פו' שמשתייכת לקבוצת הפו' מ-R ל-R רק שבה $x^{\in R}$, תוצאת התמונה (של הפו' על איבר x) היא 1.

~~[illegible]~~ וזה לא נכון משום שהפו' $\lambda x \in R.\{x\}$ מקבלת איבר ממשי ($x \in R$) ומחזירה קבוצה (ועשה סינגלטון) שמכילה את ה-x כמובן (ולא מספר שהוא 1) ולכן זה פו' מ: $R \to P(R)$ ומכאן שהטענה שגויה!
שהרי זה משתייך לקב' הפו' מ: $R \to P(R)$ ולא לקב' הפו' מ: $R \to R$

ב) לפי הטענה הפו' $\lambda x \in R.3^x$ שייכת לקב' הפו' R^R רק שקיים בתמונת הפו' מספר ממשי קטן (או שווה) מ-0.

הטענה כמובן שגויה משום ש: $3^x > 0$ $\forall x \in R$ ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ בתמונת הפו'
יש רק איברים שגדולים מ-0 ולכן לא קיים בתמונה אף ממשי (y) שקטן/שווה ל-0 עבורו יש מקור ממשי (x) כך ש: $3^x = y$ (במילים אחרות:)

$\forall y \in R, y \le 0, \forall x \in R \quad 3^x \ne y.$

[גם אם $x \to -\infty$ ונקבל $\frac{1}{\infty}$ שהוא נקבל ש: $3^x \to 0$ אבל אף פעם לא נשווה [illegible] לא יתקיים $3^x = 0$]

ג) נראה כי הטענה נכונה!

ראשית נסביר למה מתקיים: $P(\{3n \mid n \in N\}) \subseteq \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{3k \mid k \in N\}|\}$

ושם רק יש להסביר כי

$\forall X \quad X \in P(\{3n \mid n \in N\}) \to X \in \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{3k \mid k \in N\}|\}$ (מהגדרת הכלה)

המשך מאחורי הדף

13

מס' סידורי: 47

ת"ז: 239464

המשך Proof ל שאלה 3:

אז תהי $\aleph_0 \Rightarrow P(\{3n|n\in\mathbb{N}\})$ [מספר עצמה]

$$\aleph_0 \in \{A\in P(\mathbb{N}) \mid |A| = |A\cap\{3k|k\in\mathbb{N}\}|\}.$$

אז נשים B כי $\aleph_0 \in P(\mathbb{N})$ נשים לב: $\aleph_0 \in P(\{3n|n\in\mathbb{N}\})$

וכי $P(\{3n|n\in\mathbb{N}\}) \in P(\mathbb{N})$ רק זה נכון ש: $\aleph_0 \in P(\mathbb{N})$

כמו כן בהגדרה יתקיים: $|\aleph| = |\aleph_0 \cap \{3k|k\in\mathbb{N}\}|$

משום שהקס' שתיווצר על ידי חיתוך $\aleph_0$ עם $\{3k|k\in\mathbb{N}\}$

הוא בהגדרה $\aleph_0$ שכן $\aleph_0$ תיאור קס' של הקס'

$\{0,3,6,9,12..\}$ רק אם נבצע חיתוך שלה עם הקס'

$\{3k|k\in\mathbb{N}\}$ הגדרת קס' אותה כאמור $\aleph_0 \in \{A\in P(\mathbb{N}) \mid |A| = |A\cap\{3k|k\in\mathbb{N}\}|\}$

ו-$\aleph_0$ היותה קס' כשהיא אין ולא מתקיימת חסר: [נסביר] שאר מתקיים

הפרה מאמץ: שכן רק יש להראות כי $\exists Y_0 \in \{A\in P(\mathbb{N}) \mid |A| = A\cap\{3k|k\in\mathbb{N}\}|\}$

רק ש: $Y_0 \notin \{3k|k\in\mathbb{N}\}$ (שהרי $A\subset B \iff \exists y\in B\ y\notin A$)

(רק במקרה שלא...)

אז נבחר: $Y_0 = 1\cup\{0,3,6,9,12..\}$

רק: $Y_0 \in P(\mathbb{N})$ [ובנוסף]

$$Y_0 \in \{A\in P(\mathbb{N}) \mid |A| = |A\cap\{3k|k\in\mathbb{N}\}|\}$$

שהרי $|Y_0| = \aleph_0$

כי ניתן להתאים $n\to 3n$ ...

ואכן: $|Y_0\cap\{3k|k\in\mathbb{N}\}| = \{0,3,6,9,12..\} = \aleph_0$

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

ואם $Y_0 \notin \{3k|k\in\mathbb{N}\}$ שהרי היות מהות ה-1 אין מתקיימת הכלה

$n\to 3n$

מש"ל (הטענה נכונה)

14

פרופסור רובין

15

מס' סידורי: 47

ת"ז: [illegible]

שאלה 4

א) יהי $T=\langle V,E\rangle$ עץ על $n\ge 2$ צמתים. נגדיר: $L=\{x|x\in V\wedge \deg(x)=1\}$.
הוכיחו כי $\forall y\in V |L|\ge \deg(y)$.

ב) יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף פשוט שבו $n>1$ צמתים. הוכיחו כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$
אזי G קשיר.

סעיף א: $\frac{\text{פתרון:}}{T \text{ הוא}}$ עץ $\Leftarrow$ $(E=n-1)\ \wedge\ (\sum \deg = 2n-2)$

ו-L הוא קב' שמכילה את כל הצמתים מדרגה 1. נוכיח כי

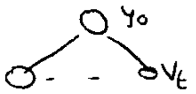
$\forall y\in V . |L|\ge \deg(y)$

אז יהי $y_0\in V$ קודקוד כלשהו. נוכיח כי $(|L|\ge \deg(y_0))$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\deg(y_0)=t$. אז אם נצייר את העץ בצורת עץ מושרש:

ל-y_0 יש t שכנים $\Leftarrow$ יוצאות ממנו t קשתות

ואין קשר בין אף אחד מהקודקודים $v_1..v_t$

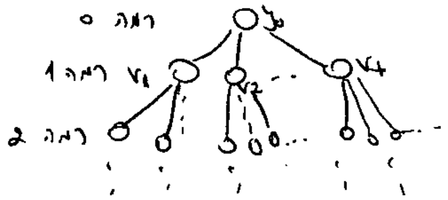


שאחרת נוצר מעגל. בסתירה להגדרת עץ (גרף פשוט קשיר חסר מעגלים)

אם $t=n-1$ אז אין עוד קשתות בעץ ולכן סיימנו ומתקיים $|L|\ge \deg(y_0)$

אחרי אם $\deg(y_0)=t$ אז $v_1..v_t$ הם עלים שדרגתם 1 ומתקיים שוויון.

אחרת, יש קשתות נוספות בעץ ולכן נוכל להמשיך בעץ:



כאשר אין קשר בין אף קודקודים באותה הרמה (כדי לא ליצור מעגל): מאחר שבעץ n צמתים ו- n-1 קשתות המהלך של הבאת העץ הוא סופי ובאופן זה בסופו של דבר נתחיל עם עלים
ואת העץ ולכן אכן יתקיים $|L|\ge \deg(y_0)$ שהרי עם הירידה ברמה לא היו עלים
בעץ רק כאשר הכל את העץ מאשר אף הינו עובר ברמה הראשונה דרגה מקסימלית
רק t עלים, אם נעבור ברמה השנייה נקבל לא קטנה מ-t עלים שהרי [illegible] כמות הקודקודים ...
[illegible] שמינה יוצאות לפחות שתי קשתות אחת ולא את יוצאות רק עוד קשת
לא העלים. שמר t יוצאות ואם יוצאות ממנה m קשתות לא העלים
יוגדלו: $m+t-1 \ge t$ (בהנחה שרק מצומת אחת מעסיקים)

12

פרופ׳
רביב

מס׳ סידורי: 2

ת״ז: 040289464

לפי עיקרון זה אין לו׳ הדרס ישר ונקבל:

$|L| \ge \deg(y_0) = t$

כלומר

$\forall y \in V \quad |L| \ge \deg(y)$ (כי y_0 היה בעל דרגה מקסימלית, ולכן נכון עבור כל הצמתים)

מ.ש.ל.

פתרון לסעיף ב:

G גרף פשוט ⇐ חסר לולאות וקשתות מקבילות.

לפי ההנחה ב-G קשור יש להראות כי $\forall u,v$ קיים מסלול המקשר בין u ל-v.

אז יהיו v_0, u_0 קודקודים כלשהם. נראה כי קיים ביניהם מסלול.

לפי הנתון: $E > \binom{n-1}{2} \Leftarrow E > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

ידוע כי לכל גרף: $\sum_{v \in V} d(v) = 2E$

$\sum_{v \in V} d(v) > (n-1)(n-2)$

לא בהכרח

לכן קיימים (n-1) קודקודים שדרגתם לפחות n-2 והקודקוד הנוסף - בדרגה 1.

נפריד למקרים: ① אם u_0, v_0 סמוכים (הרי שסיימנו: קיים ביניהם מסלול)

② אחד - לא u_0, v_0 [illegible] קיימים: $d(v_0), d(u_0) \ge n-2$ אז נראה כי קיים שכן משותף W שאותו

$n > 2(n-2) + 2$, בסתירה לכך שבגרף יש n קודקודים

הצמתים v_0, u_0 (שכן הם לא מחוברים ביניהם לפי ההנחה)

בגרף (ולכן יש שני קודקודים מחוברים ל-n-2 קודקודים ואין להם שכן משותף)

אז המסלול המתאים הוא $v_0 w u_0$

③ והמקרה האחרון שאחד v_0, u_0 - הוא בעל דרגה 1 (ומניין מניחים שאין ביניהם קשר)

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $d(u_0)=1$, $d(v_0) \ge n-2$

מקרה אידיוטי

אז עדיין חייב להיות להם שכן משותף שאחרת נקבל כי

$n > 1 + n-2 + 2 = n+1$

הצמתים u_0, v_0 (אין מחוברים)

$n > n+1$ בסתירה! ⇐ ל-v_0, u_0 חייב להיות שכן משותף

כלומר בכל מקרה קיים מסלול בין u_0 ל-v_0 ולכן קשור בין כל 2 קודקודים ...

טו

פרופסור
גולומביק

20

מס' סידורי: 47

ת"ז: 04022946

שאלה 5

א) בכמה תמורות של המספרים $1,2,\dots,2n$ המספר n נמצא לשמאלו (לאו דווקא צמוד) של המספר $2n$? 5

ב) בכמה תמורות של המספרים: $1,2,\dots,20$ כל הזוגות $(2,3)(3,4)(7,8)$ **מתפרקים** ? 7

הגדרה: נאמר שהזוג (x,y) **מתפרק** אם y **לא** מופיע **מייד** ליד x מימינו.
למשל: בתמורות $(1,3,2)$, $(2,1,3)$ של $(1,2,3)$ הזוג $(2,3)$ התפרק.

ג) כמה עצים על $n \geq 4$ צמתים הממוספרים במספרים $\{1,2,\dots,n\}$ ישנם עם $n-4$ צמתי-קצה (עלים) ? 8

פתרון: סעיף א:

(א) נסתכל את האפשרויות לסדר את $2n$ איברים (תמורה) רק ש-n נמצא משמאלו של המספר $2n$ לאו דווקא בצמוד. (נניח בחר את המקום במקום k.)
ולכן, אם כל בחירה של מקום שבו "יבחר" המספר $2n$ את המקום, יהיה למספר n $2n-k$ אפשרויות להתמקם שכן הוא חייב להתמקם משמאלו.

ולכן הפתרון:

$$\sum_{k=1}^{2n} (2n-k)\cdot(2n-2)! =$$

k עובר את המקום שבו המספר $2n$ "יבחר"
ולכן ירוץ להתמקם במקום $1,2,\dots 2n$
מס' המקומות שבהם יכול להתיישב המספר n
ונותרו עוד $2n-2$ מספרים שיש לסדר (עצמם n ו-$2n$)
(עיקרון הכפל)

$$= (2n-2)!\cdot\sum_{k=1}^{2n}(2n-k) = (2n-2)!\,(2n-1+2n-2+\dots 2n-2n)$$

$$= (2n-2)!\,[2n\cdot 2n + (-1-2-\dots-2n)] = (2n-2)!\,[4n^2 - (1+2n)n] =$$

לפי נוסחה של סדרה חשבונית

$$= (2n-2)!\,(2n^2-n)$$

17

פולפולי
תזכי

מס' סידורי: 47
ת"ז: [illegible]

סעיף ב:

(x,y) מתפרק אם y מופיע ~~מיד~~ אחרי ימינו של x

הדרישה - את התמורות של 1..20 בהן הזוגות (7,8)(3,4), (2,3) מתפרקים

נשתמש בהכלה והפרדה:

נגדיר: A_1 - הזוג (2,3) לא מתפרק
A_2 - הזוג (3,4) לא מתפרק
A_3 - הזוג (7,8) לא מתפרק.

ואנו דורשים: $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$
(שכן נדרש שכל הזוגות יתפרקו)

$\boxed{|A_1|}$ - הזוג (2,3) לא מתפרק ⇐ 3 מופיע מיד ימינו של x

אם נסתכל על זוג זה כאיבר אחד אז נותר לסדר 19 איברים ולכן:

$|A_1| = 19!$

אין צורך ב משום שבחרנו
3 מימין ל-2. (המשמעות והחשיבות)

$\boxed{A_2}$ - הזוג (3,4) לא מתפרק ⇐ בדיוק באותו האופן נקבל $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 19!$

$\boxed{|A_1 \cap A_3|}$ - (7,8), (2,3) לא מתפרקים ⇐ יש לנו 2 יחידות ולכן רק $20-4+2$ איברים לסדר כלומר: $18!$

$\boxed{|A_2 \cap A_3|}$ - (3,4), (7,8) באותו האופן: $|A_2 \cap A_3| = 18!$

$\boxed{|A_1 \cap A_2|}$ - (2,3), (3,4) לא מתפרקים. לכן היחידה היחידה שאפשר לסדר היא יחידה אחת: (2 3 4) אז זה תמורה של: $20-3+1 = 18!$

$\boxed{|A_3 \cap A_1 \cap A_2|}$ - ~~האפשרויות~~ היחידה היא 2 יחידות מורכבות: (7,8), (2 3 4) כאשר מספר האיברים $20-5+2$ יחידות $= 17!$

לכן סה"כ לפי הכלה והפרדה התשובה היא:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |U| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= \underbrace{20!}_{\text{תמורות של 20 איברים ללא הגבלה}} - 3 \cdot 19! + 3 \cdot 18! - 17!$$

תשובה סופית

תשובה לסעיף ב:

הערה: ברמה [illegible] n צמתים יש 4 [illegible]

לפי משפט קיילי סך העצים על n צמתים: n^{n-2}. מכיון שיש n

[illegible] הבעיה למספר סדרות פרופר: ברמה מופיע [illegible] יותר $\overline{\text{באורך } n-2}$ ע"פ פרופר

אזי $d-1$ ≤ q ש: n-4 אחרות לא מופיעות לכן הפתרון:

נבחר את n-4 העלים שלא יופיעו: $\binom{n}{n-4}$ (וכך נשארו 4 האחרות שיופיעו)

אז נשארנו עם 4 אותיות שחייבות להופיע כל אחת באורך n-2.

נמשיך הפתרון עם הכלה והדחה: (לשם כך נגדיר A_i שבה i האותיות חסרות) --

נגדיר ~~U~~ מילים באורך n-2 מעל אלפבית של 4 אותיות $\Leftarrow$ $|U| = 4^{n-2}$

שאחרי בחירה של אותיות שלא מופיעות מה הסדר יכול

A_1 - אות אחת אינה מופיעה

A_2 - 2 אותיות אינן מופיעות

A_3 - 3 " "

A_4 - אף אות לא מופיעה (0 אפשרויות)

לכן:

$$|A_1| = \binom{4}{1}\cdot \underbrace{3^{n-2}}$$

בחירת האות שלא מופיעה

אפשרויות לכל n-2 מקום 3 אותיות

$$|A_2| = \underbrace{\binom{4}{2}}\cdot \underbrace{2^{n-2}}$$

בחירת 2 אותיות שלא מופיעות

אפשרויות לכל n-2 מקום 2 אותיות

$$|A_3| = \underbrace{\binom{4}{3}}\cdot \underbrace{1^{n-2}}$$

בחירת 3 אותיות שלא מופיעות

מילוי באורך n-2 את המילה [illegible]

ומכאן סה"כ התשובה:

$$\boxed{\binom{n}{n-4}\left[4^{n-2} - \binom{4}{1}3^{n-2} + \binom{4}{2}\cdot 2^{n-2} - \binom{4}{3}\right]}$$

19

20

מס׳ סידורי: 47

ת״ז: 0310238464

שאלה 6

הסדרה $\lambda n.a_n$ מקיימת את כלל הנסיגה: $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$, $(n \ge 1)$

והסדרה: $\lambda n.b_n$ מקיימת את כלל הנסיגה: $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$, $(n \ge 2)$

מצאו ערכי התחלה: a_0, b_0, b_1 המבטיחים כי: $\forall n \ge 0.\ a_n = b_n$

פתרון: (פותר את המשוואה $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ (נמצא נוסחה סגורה ל-a_n)

נמצא את הפולינום האופייני: $x - 1 = 0$

$\Downarrow$ $x = 1$ הוא שורש

ולכן: הפתרון ההומוגני יהיה: $a_n^{(h)} = A_1 \cdot 1^n$

עבור הפתרון הפרטי: $a_n^{(p)} = 2^n \cdot B$

נציב ונקבל: $2^n \cdot B = 2^{n-1} \cdot B + 2^{n-1}$

נצמצם ב- 2^{n-1}: $2B = B + 1$

$\Downarrow$

$\boxed{B = 1}$

סה״כ $\boxed{a_n = A_1 + 2^n}$

עבור b_n: $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$

הפולינום האופייני: $x^2 - 4x + 4$

$\Downarrow$

שורשים: $(x-2)^2$

לכן: $\boxed{b_n = A_2 \cdot 2^n + A_3 \cdot 2^n \cdot n}$

2 הוא שורש כפול ולכן לפי המשפט הפתרון הוא מצורה 2^n וגם מצורה $n \cdot 2^n$ (ריבוי 2 וקיבוע כזה)

הדרישה: $\forall n \ge 0\ \ b_n = a_n$

לכן $b_0 = a_0$ כלומר נקבל:

(1) $\boxed{\underbrace{1 + A_1}_{a_0} = \underbrace{A_2}_{b_0}}$

כמו כן, $b_1 = a_1 \Leftarrow A_1 + 2 = 2A_2 + 2A_3$

$\Downarrow$

(2) $\boxed{1 - 2A_3 = A_2}$

$\downarrow$

20

מס' סידורי: [illegible]

ת"ז: [illegible]

$$b_2 = a_2$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 + 4 = A_2 \cdot 4 + 8A_3$$

$$\Downarrow$$

$$A_3 = \frac{\cancel{3} - 3A_2}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$A_3 = 0 \;,\; A_2 = 1 \;,\; A_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} b_0 = a_0 = 1 \\ b_1 = 2 \end{matrix}}$$

כלומר עבור תנאי התחלה נתון ואז נקבל

$$\boxed{a_n = b_n = 2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \geq 0 \quad a_n = b_n$$

מ.ש.ל