

## מבחן במתמטיקה בדידה

מורים: אברון, אלון, דר, טרסי, רודיטי

סימונים:  $N, Q, R$  יסמנו את קבוצות המספרים הטבעיים, הרציונלים והממשיים בהתאמה.

- כללי - הבחינה: 1. אסור להשתמש בכל חומר עזר, למעט הדפים המצורפים.  
 2. בבחינה 6 שאלות. תשובה נכונה מזכה את הכותב ב- 20% למניית הנקודות הסופי תילקחנה 4 שאלות שלהן הניקוד המרבי. ניקוד שתי השאלות הנותרות יסוכם, יחולק ב-2 ויתווסף לסך הנקודות שנצברו ב- 4 השאלות הקודמות.

1. (א) תהיינה  $A, B$  קבוצות כך ש-  $B \subseteq A \times P(A)$ . הוכיחו:

$$(\exists a \in A. \{S \subseteq A \mid (a, S) \in B\} \neq \emptyset) \quad \checkmark$$

$$(\exists S \subseteq A. \{a \in A \mid (a, S) \in B\} = \emptyset)$$

(ב) תהיינה  $A, B$  קבוצות. הוכיחו כי:

$$|P(B)^A| = |P(A)^B|$$

2. (א) הוכיחו או הפריכו: לכל  $f: A \rightarrow B$  הפונקציה

$$g: A \rightarrow A \times B$$

$$g(x) = (x, f(x))$$

המוגדרת ע"י:

היא חח"ע ועל.

(ב) תהי  $N$  קב' הטבעיים. נגדיר:

$$A = \{f: N \rightarrow \{0,1\} \mid \exists k \in N. f(k) = f(k+1) = 0\}$$

3. כמה מילים באורך  $k$  ניתן ליצור מהקבוצה:  $\{1, 2, \dots, k\}$  כאשר 1 מופיע מספר זוגי של פעמים?

4. תהי  $a$  עוצמהו-  $B$  ו-  $C$  קבוצות זרות רק-ש- :  
 $|B| = |C| = |B \cup C| = a$

(א) הוכיחו כי:  $X \in P(C) \cdot X \cup B$  היא פונקצי תח'יע-מ-  $P(C)$  אל  $Pa(B \cup C)$ .

[ תזכורת:  $Pa(A) = \{X \in P(A) \mid |X| = a\}$  ]

(ב) חשבו את  $C(2^X, 2^X)$ . [ רמז אפשרי: היעזרו בסעיף א' ]

5. (א) בכמה תמורות של המספרים  $\{1, 2, \dots, 19\}$  אף מס' זוגי אינו במקומו?

(ב) בכמה עצים ממוספרים על  $n$  צמתים מס' העלים הוא בדיוק 3 ?

6. (א) יהי  $G$  גרף פשוט על  $n$  צמתים. יהיו  $u, v$  שני צמתים שאין ביניהם

קשת. כמו כן:  $d(u), d(v) \geq \frac{n+k}{2}, k \geq 0$ .

הוכיחו כי יש ל-  $u, v$  לפחות  $k+2$  שכנים משותפים.

(ב) יהיו:  $d_1, d_2, \dots, d_n$  מספרים שלמים חיוביים. (לאו דווקא שונים).

הוכיחו: קיים עץ על  $n$  צמתים ש-  $d_1, d_2, \dots, d_n$  הם דרגותיו  $\iff$

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$$

בהצלחה!