הצעת פתרון למבחן במתמטיקה בדידה 4.12.2001

תשובה לשאלה מס׳ 1

נתונות הקבוצות: $A=\{x|x=a+\sqrt{7}b, a,b\in Q\}$

$B=\{x|x=a+\sqrt{7}, a\in Q\}$

א. <u>הטענה אינה נכונה</u>

הקבוצה B היא קבוצה של מספרים שניתנים להצגה כסכום של מספר רציונלי עם המספר האי-רציונלי $\sqrt{7}$. סכום של מספר רציונלי עם מספר אי-רציונלי הוא תמיד אי-רציונלי. לכן שתי הקבוצות זרות, ובפרט Q אינה מוכלת ב- B (למשל: $0\in Q$ אך $0\notin B$).

ב. <u>הטענה נכונה</u>

לפי הגדרה מתקיים: $|N|=\aleph_0$.

כמו כן קיימת העתקה חח״ע ועל כזו: $f:Q\times Q\to A$ לפי הכלל: $(x,y)\mapsto x+\sqrt{7}y$.

ההעתקה היא על לפי אופן הגדרת הקבוצה B.

ההעתקה חח״ע, כי נניח: $a+\sqrt{7}b=c+\sqrt{7}d$ אזי: $a-c=\sqrt{7}(d-b)$. באגף ימין מספר אי-רציונלי או אפס ובאגף שמאל מספר רציונלי או אפס. מאחר ששני האגפים שווים, נקבל שבשני האגפים ישנו אפס. לכן: $a=c, b=d$ ומכאן שההעתקה חח״ע.

קיבלנו ש- $|A|=|Q\times Q|=|Q|\cdot|Q|=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

מאחר ששתי הקבוצות הנדונות, עוצמתן היא $\aleph_0$ נסיק שהעוצמות שוות. **מ.ש.ל.**

ג. <u>הטענה אינה נכונה</u>

לפי ההעתקה ההפיכה (חח״ע ועל) הבאה: $g:Q\to B$ המוגדרת ע״י הכלל: $x\mapsto x+\sqrt{7}$.

הוכחת הפיכותה של הפונקציה באופן דומה לסעיף הקודם !

נסיק ש- $|B|=|Q|=\aleph_0$.

לכן: $|P(B)|=2^{|B|}=2^{\aleph_0}=\aleph$. עוצמת הקבוצה היא $\aleph$ ולכן הקבוצה אינה בת מנייה.

תשובה לשאלה מס' 2

א. צ.ל: $\alpha+\alpha=\alpha$

הוכחה: נבחר A,B שתי קבוצות כלשהן **זרות** המקיימות: $|A|=|B|=\alpha$.

על כן: $|A\cup B|=\alpha+\alpha$ (מאחר שזהו איחוד זר).

נרצה להראות ש- $|A\cup B|=\alpha$. לשם כך נניח **בשלילה** כי- $\alpha+\alpha>\alpha$.

אזי לפי ההנחות מתקיים: $|A|=\alpha$; $|A\cup B|>\alpha$. נסמן $C=A\cup B$ כלומר $|C|>\alpha$.

לפי הנתון לכל קבוצה A וקבוצה C אם $A\subset C$ ו- $|A|=\alpha$ וכן $|C|>\alpha$ אזי $|C-A|>\alpha$.

ולכן עבור הקבוצה שהגדרנו C מתקיים: $\alpha<|C-A|=|(A\cup B)-A|=|B|=\alpha$.

וכך הגענו לסתירה ולפיכך מתקיים $\alpha+\alpha=\alpha$.   **מ.ש.ל.**

ב. צ.ל: אם $A\subset C$ $|A|=\alpha$ $|C|>\alpha$ אזי $|C-A|=|C|$.

הוכחה:

ברור שמתקיים: $|C-A|\le|C|$.

נבחר $C-A\supset D$ כך ש- $|D|=\alpha$ (D קיימת כי היא התמונה של העתקה חח"ע מקבוצה בעוצמה α ל- $C-A$).

נחשב:

$$|C-A|=|(C-A)-D|+|D|\underset{\text{לפי סעיף א'}}{=}|(C-A)-D|+|D|+|A|=|C|$$

הוכחנו את הטענה, ולכן **מ.ש.ל.**

תשובה לשאלה מס' 3

א. הטענה אינה נכונה

הפונקציה $\lambda x\in R.\{x\}$ היא פונקציה שמקבלת מספר ממשי ומחזירה קבוצה שבה איבר אחד בלבד והוא x, כלומר זוהי פונקציה ששייכת לקבוצה $R\to P(R)$.

לעומת זאת הקבוצה $\{f\in R\to R|\forall x\in R.|f(x)|=1\}$ היא קבוצה חלקית של $R\to R$ שהיא קבוצה זרה לקבוצה $R\to P(R)$, ולכן הפונקציה $\lambda x\in R.\{x\}$ אינה שייכת לקבוצה הנ"ל (הרי לכל איבר ב- R מותאמת קבוצה ולא איבר ב- R).

ב. <u>הטענה נכונה</u>

הפונקציה $\lambda x \in R.e^x$ היא פונקציה מ- R ל- R, שמקיימת את התנאי הבא:

$\forall y \in \{x \in R | x > 0\}.y \in \{g(x) | x \in R\}$.

משמעותו של התנאי היא: כל מספר y חיובי ממש - שייך לתמונה של הפונקציה (כלומר קיים מקור ש- y הוא תמונתו).

תנאי זה אכן מתקיים עבור הפונקציה הנדונה, שכן לכל y כזה ניתן למצוא מקור x באופן הבא:

נגדיר $x = \ln y$ ואז יתקיים $e^x = e^{\ln y} = y$. ביטוי זה מוגדר כיוון שידוע ש- y חיובי. **מ.ש.ל.**

ג. <u>הטענה נכונה</u>

עלינו להוכיח הכלה ממש, לכן ראשית נוכיח הכלה, ואחר-כך נראה שלא מתקיים שוויון.

תהי: $B \in P(\{3n | n \in N\})$ אזי: $B \subseteq \{3n | n \in N\}$.

עלינו להראות: $B \in \{A \in P(N) \| A| = |A \cap \{3k | k \in N\}|\}$. ואכן קל לראות שמתקיימים התנאים:

$B \in P(N)$ ואף מכך ש- $B \subseteq \{3n | n \in N\}$ נסיק: $B = B \cap \{3k | k \in N\}$ ומכאן $|B| = |B \cap \{3k | k \in N\}|$.

כעת נראה שאין שוויון בין הקבוצות. ניקח למשל את קבוצת המספרים הטבעיים N:

$N \notin P(\{3n | n \in N\})$ אולם: $N \in \{A \in P(N) \| A| = |A \cap \{3k | k \in N\}|\}$

כי: $N \cap \{3k | k \in N\} = \{3k | k \in N\}$ ו- $|N| = |N \cap \{3k | k \in N\}| = |\{3k | k \in N\}| = \aleph_0$ לפי ההעתקה החח"ע ועל- $n \mapsto 3n$.

תשובה לשאלה מס' 4

א. <u>צ.ל</u>: קיימת לפחות עיר אחת שאם ננתקה מכל דרכי הגישה אליה עדיין נוכל להגיע מכל עיר לכל עיר.

<u>הוכחה</u>: ידוע, שלכל גרף קשיר קיים עץ פורש (עץ שקשתותיו מחברות את כל הקודקודים).

בכל עץ יש לפחות קודקוד אחד שדרגתו 1 (עלה). ננתק קודקוד זה מהעץ (נסמן אותו ב- y).

מובן, שהגרף עדיין קשיר, כי הקודקוד שניתקנו מחובר רק לעיר אחת.

נניח בשלילה שאחרי שהורדנו את הקשת, קיימת עיר x שמנותקת מהעיר הזאת (שהייתה מחוברת לקודקוד שהורדנו- y). אזי גם לפני שהורדנו את הקשת שתי הערים היו מנותקות, דהיינו לא היה קיים ביניהן מסלול. עובדה זו באה בסתירה לכך שהעץ פורש !!! **מ.ש.ל.**

ב. צ.ל: $\forall \vartheta \in V.\deg(\vartheta) \geq \frac{n-1}{2} \Leftarrow$ G קשיר.

הוכחה: נבחר שני צמתים כלשהם x ו- y. עלינו להוכיח כי קיים ביניהם מסלול.

אם צמתים אלו מחוברים בקשת הוכחנו.

לכן נניח כי הם אינם מחוברים בקשת.

נגדיר: A- קבוצת כל הקודקודים שמחוברים ל- x.

B- קבוצת כל הקודקודים שמחוברים ל- y.

לפי הנתון ידוע: $|A| \geq \frac{n-1}{2}$ $|B| \geq \frac{n-1}{2}$

מלבד הקודקודים x ו- y ישנם עוד $n-2$ קודקודים. ולכן: $|A \cup B| \leq n-2$

נניח בשלילה שהקבוצות A, B זרות. אזי: $|A \cup B| \geq \frac{n-1}{2} \cdot 2 = n-1$

הגענו לסתירה, לכן נסיק שהקבוצות A, B אינן זרות וקיים קודקוד שנמצא בשתיהן. אזי קיים צומת שמחובר בקשת גם ל- x וגם ל- y, ולכן קיים מסלול בין x ל- y.

הדבר נכון לכל שני צמתים ולכן הגרף G קשיר.   **מ.ש.ל.**

ג. צ.ל: $\forall \vartheta \in V.\deg(\vartheta) \geq \frac{n+1}{2} \Leftarrow$ קיימים שלושה צמתים x,y,z אשר כל שניים מחוברים ע"י קשת (כלומר יש משולש בגרף).

הוכחה: נבחר שני צמתים x,y שיש ביניהם קשת (בהכרח קיימים !!!).

נראה, שקיים קודקוד z מתוך $n-2$ הקודקודים האחרים שמחובר גם ל- x וגם ל- y.

נגדיר: A- כל הקודקודים שמחוברים ל- x, פרט ל- y.

B- כל הקודקודים שמחוברים ל- y, פרט ל- x.

אזי תוך שימוש בנתון נסיק: $|A| \geq \frac{n+1}{2} - 1$ $|B| \geq \frac{n+1}{2} - 1$

נניח בשלילה ש- B,A זרות אזי: $|A \cup B| \geq n+1-2 = n-1$ אולם לפי ההנחה האיחוד אינו מכיל יותר מ- $n-2$ קודקודים. לכן קיבלנו סתירה, B,A אינן זרות וקיים קודקוד שמחובר גם ל- x וגם ל- y.   **מ.ש.ל.**

תשובה לשאלה מס' 5

א. לפתרון השאלה נגדיר A_1 - הצירוף 1,2,3 מופיע ; A_2 - הצירוף 4,5,6 מופיע.

כעת נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה ונקבל:

$$|U|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|=10!-2\cdot 8!+6!$$

ב. גם כאן נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

מספר האפשרויות של הזוגות 2,3 ו- 3,4 הוא !18 כי אנו מתייחסים לרצף 2,3,4 כאל איבר אחד.
מספר האפשרויות של כל הזוגות יחד הוא !17 כי אז 2,3,4 הם איבר אחד ו- 7,8 הוא איבר אחד ונותרו 15 מספרים נוספים. באופן זה נקבל:

$$20!-3\cdot 19!+18!+2\cdot 18!-17!$$

ג. ניעזר בשקילות של כל עץ למחרוזת באורך $n-2$ תווים. עלים אינם מופיעים במחרוזת, ולכן במחרוזת יופיעו ארבעה תווים בלבד. לבחירת תווים אלו לרשותינו $\binom{n}{3}$ אפשרויות.

כעת נבחר תו לכל מקום במחרוזת, אולם יש לשים לב שכל התווים שנבחרו חייבים להופיע. לכן (בפעם השלישית לשאלה זו !!!) נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. התשובה היא:

$$\binom{n}{3}\cdot\left[3^{n-2}-3\cdot 2^{n-2}+3\right]$$

תשובה לשאלה מס' 6

א. נגדיר את הפונקציות הבאות:

תהא $F(x)$ יוצרת את הסדרה n^2.

תהא $G(x)$ יוצרת את הסדרה $\frac{1}{n^4}$.

לפי נוסחה 6 מכפלתן תיתן את הפונקציה היוצרת המבוקשת.

הפונקציה $h(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ יוצרת את $a_n=n$ ולכן הפונקציה היוצרת את n^2 היא $x\cdot h'(x)$

לפי סעיף 9 בטבלת הפונקציות היוצרות. מחישוב זה מקבלים: $F(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

מהנוסחאות ניתן לקבל גם: $G(x)=\int\frac{\int\frac{\int\frac{-\ln(1-x)dx}{x}dx}{x}}{x}dx$.

מכפלת שתי הפונקציות תיתן את התשובה.

ב.

(I) $F(x)$ יוצרת את הסדרה a_n.

$G(x)=\frac{1}{1+x}$ יוצרת את הסדרה $\lambda n.(-1)^n$.

לפי נוסחה 6 המכפלה $F(x)G(x)$ יוצרת את הסדרה: $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k(-1)^{n-k}$.

(II) $\frac{1-x^4}{1+x}F(x)=(1-x)(1+x^2)F(x)=(-x^3+x^2-x+1)F(x)$

נסמן את הסדרה הנוצרת ב- d_n.

נקבל: $d_0=a_0$, $d_1=a_1-a_0$, $d_2=a_2-a_1+a_0$, $d_3=a_3-a_2+a_1-a_0$.

ועבור כל $n\geq 4$: $d_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}$.