

שאלה 1

נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{x \mid x = a + \sqrt{7}b, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$B = \{x \mid x = a + \sqrt{7}, a \in \mathbb{Q}\}$$

הוכיחו או הפריכו הטענות הבאות:

(א) $\mathbb{Q} \subset B$

(ב) $|A| = |N|$

(ג) $P(B)$ בת-מניה

שאלה 2

תהי a עוצמה המקיימת את התנאי:

לכל קבוצה A וקבוצה B אם $A \subset B$ ו- $|A| = a$ וכן $|B| > a$ אזי, $|B - A| > a$.

הוכיחו: (א) $a + a = a$.

(ב) אם $A \subset B$ ו- $|A| = a$ וכן $|B| > a$ אזי, $|B - A| = |B|$.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו הטענות הבאות:

(א) $\lambda x \in \mathbb{R}. \{x \in \{f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1\}\}$

(ב) $\lambda x \in \mathbb{R}. e^x \in \{g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall y \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}. y \in \{g(x) : x \in \mathbb{R}\}\}$

(ג) $P(\{\exists n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{k \mid k \in \mathbb{N}\}|\}$

שאלה 4

(א) (5%) - נתונות n ערים אשר ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר ע"י מערכת כבישים. הוכיחו כי קיימת לפחות עיר אחת שאם ננתקה מכל דרכי-הגישה אליה עדיין נוכל להגיע מכל עיר לכל עיר (מהערים הנותרות).

(ב) (7%) - יהי G גרף פשוט. הוכיחו כי אם: $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$ לכל $v \in V$ אזי G קשיר.

(ג) (8%) - יהי G גרף פשוט. הוכיחו כי אם $\deg(v) \geq \frac{n+1}{2}$ לכל $v \in V$ אזי קיימים ב- G לפחות 3 צמתים x, y, z אשר כל שניים מהם מחוברים ע"י קשת.

שאלה 5

(א) מה המספר התמורות של המספרים: $\{1, 2, \dots, 10\}$ שמקיימות שהצירוף (123) ו-(456) אינם מופיעים. (הכוונה שהמספרים 123 אינם מופיעים זה לצד זה בסדר הנ"ל זה).

(ב) בכמה תמורות של המספרים: $1, 2, \dots, 20$ כל הזוגות (2,3)(3,4)(7,8) מתפרקים?

הגדרה: נאמר שהזוג (x, y) מתפרק אם y לא מופיע מייד ליד x מימינו. למשל: בתמורות (1,3,2), (2,1,3), של (1,2,3) הזוג (2,3) התפרק.

(ג) כמה עצים על $n \geq 4$ צמתים הממוספרים במספרים $\{1, 2, \dots, n\}$ ישנם עם $n-3$ צמתי-קצה (עלים)?

שאלה 6

(א) (5%) - מהי הפונקציה היוצרת של הסדרה:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)^2}{k^4} ?$$

(ב) תהי $F(x)$ פונקציה יוצרת של הסדרה $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

(I) איזו סדרה נוצרת ע"י הפונקציה $\frac{F(x)}{1+x}$?

(II) איזו סדרה נוצרת ע"י הפונקציה $\frac{F(x)}{1-x^4}$?