20

1) א) $\forall x\in\mathbb{R}.\ e^x\in\{g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid\forall y\in\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}.\ y\in\{g(x)\mid x\in\mathbb{R}\}\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall y\in\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}.\ y\in\{e^x\mid x\in\mathbb{R}\}\Leftrightarrow\forall y\in\mathbb{R}^+.\ y\in Im(e^x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall y\in\mathbb{R}^+\ \exists x\in\mathbb{R}.\ y=e^x$

אבל הפונקציה $\ln x:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ מוגדרת מ-$\mathbb{R}^+$, ! הפעלה ל-e^x נותנת

ואם ניקח $x=\ln y$ אז $y=e^{\ln y}$

כיוון ש-$e^{\ln y}$ מוגדר לכל $y\in\mathbb{R}^+$ הטענה נכונה.

ב) $\Leftrightarrow\neg(\forall\varepsilon>0(\exists\delta>0(\forall x>0(\forall y>0(|x-y|<\delta\Rightarrow|x-y|<\varepsilon)))))\Leftrightarrow\neg(\exists\varepsilon>0(\forall\delta>0(\exists x>0(\exists y>0(|x-y|<\delta\wedge|x-y|>\varepsilon)))))$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0(\exists\delta>0(\forall x>0(\forall y>0.\ \neg(|x-y|<\delta\wedge|x-y|>\varepsilon))))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0(\exists\delta>0(\forall x>0(\forall y>0.\ (\neg(|x-y|<\delta)\vee|x-y|\le\varepsilon))))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0(\exists\delta>0(\forall x>0(\forall y>0.\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|x-y|\le\varepsilon))))$

ג) מתקיים i, $1\le i\le n$ כך ש- $2|(a_i-i)$

אז המכפלה $2\,\Big|\,\prod_{i=1}^{n}(a_i-i)$

נוכיח כי ק"מ i כזה: נניח כי n אי-זוגי לכן ניתן לרשום אותו בצורה $2k+1$. המס' $1,3,5,\dots,2k+1$ אי-זוגיים

והמס' $2,4,\dots,2k$ זוגיים

נ"ל שיש k מס' זוגיים בין 1 ל-n ולכן $2k+1-k=k+1$ מס' אי-זוגיים.

$k=\frac{(2k+1)-1}{2}=\frac{n-1}{2}$

$k+1=\frac{(2k+1)+1}{2}=\frac{n+1}{2}$

אם $2\nmid a_i$ (a_i לא מתחלק ב-2)

וגם $2\nmid i$ אז $2|(a_i-i)$

~~[illegible]~~

ואם נניח משלילה שסדרנו את $\frac{n+1}{2}$ המס' האי-זוגיים כך שיתקבלו a_i-i אי-זוגיים נ"ל אם a_i אי-זוגי אז i זוגי; אבל אין כמו לסדר $\frac{n+1}{2}$ ...

ב-$\frac{n+1}{2}$ תהיה כך, שבסה"כ יש לכל היותר אחת - סתירה לעיקרון שובך היונים.
ולכן יש $2|(a_i - i)$ ולכן $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i)$ הוא זוגי.

2) א) ± כן רפלקסיביות: $\forall k\in\mathbb{Z}:$ $k-k=0$ מתחלק ב-7.

סימטריות: $\forall k\in\mathbb{Z}\,\forall m\in\mathbb{Z}.$ אם $k-m\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$

$$\Updownarrow$$

$$m-k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$$

טרנזיטיביות: אם $m-n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

וגם $n-k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

אז $m-k\equiv((m-n)+(n-k))(\mathrm{mod}\ 7)\equiv$

$\equiv(m-n)(\mathrm{mod}\ 7)+(n-k)(\mathrm{mod}\ 7)\equiv 0+0(\mathrm{mod}\ 7)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

לכן S רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי ולכן יחס שקילות.

II) לא: $3+3=6$ לא מתחלק ב-7 ולכן אינו לא רפלקסיבי.

III) רפלקסיבי שכן רפלקסיביות S

סימטרי: אם $(a,b)\in(S\cup T)$

$$\Updownarrow$$

$$(a,b)\in S\ \vee\ (a,b)\in T$$

אם $(a,b)\in S$ הוכחנו ב-I.

אם $(a,b)\in T$ אז $7\,|\,a+b$

ו $a+b=b+a$ ולכן $7\,|\,b+a$

ולכן $(b,a)\in T$.

טרנזיטיביות: יהיו $(a,b)\in S\cup T$

$(b,c)\in S\cup T$

צ"ל $(a,c)\in S\cup T$.

אם $(a,b)\in S\cup T$ אז $(a,b)\in S\vee(a,b)\in T$

אם $(b,c)\in S\cup T$ אז $(b,c)\in S\vee(a,b)\in T$

i) $(a,b)\in S\wedge(b,c)\in S$ הוכחנו בסעיף I. ולכן $(a,c)\in S\cup T$

ii) $(a,b)\in S\wedge(b,c)\in T$ אז $a-b\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

$b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

2b ... : $\underbrace{(a-b)}_{\equiv 0 (mod 7)}+\underbrace{(b+c)}_{\equiv 0 (mod 7)} \equiv a+c \equiv 0 (mod\ 7)$

ולכן $(a,c)\in S\cup T$

iii) $(a,b)\in T \wedge (b,c)\in S$

$(a+b)+(b-c) = a-c \equiv 0 (mod\ 7)$

ולכן $(a,c)\in S\cup T$

iv) $(a,b)\in T \wedge (b,c)\in T$ אז $a-c \equiv (a+b)-(b+c) \equiv 0(mod\ 7) - 0(mod\ 7) \equiv$
$\equiv 0 (mod\ 7)$

ולכן $(a,c)\in S\cup T$

וכיוון ש $(a,c)\in S\cup T$ לכל $(a,b)\in S\cup T$ ו $(b,c)\in S\cup T$, $S\cup T$ טרנזיטיבי.

וכיוון ש $S\cup T$ רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי הוא יחס שקילות.

ב) $|\mathbb{Z}/S| = 7$

כיוון ש ~~$[0]_S = \{0,7,$~~

$[0]_S = \{0,7,-7,14,-14,...\} = \{7k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]_S = \{1,6,-8,14,-15,...\} = \{7k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$[6]_S = \{7k+6 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

אלה מחלקות של $\mathbb{Z}_S$.

II) אם $(a,b)\in S\cup T$ אז $a\equiv b (mod\ 7) \Leftarrow a-b \equiv 0 (mod\ 7)$ או $a+b\equiv 0 (mod\ 7)$

$[0]_{S\cup T} = [0]_S$ כי:

$b \equiv 0+b$

$[1]_{S\cup T} = [1]_S \cup [6]_S$

$[2]_{S\cup T} = [2]_S \cup [5]_S$

$[3]_{S\cup T} = [3]_S \cup [4]_S$

ולכן $|\mathbb{Z}/S\cup T| = 3$

$|\mathbb{Q} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})| = |\mathbb{Q} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}| =$

$= |(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$|A^B| = |A|^{|B|}$ $\quad (a^b)^c = a^{bc}$ $\quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

(3

$A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\Downarrow$

$|A| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$
$= 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
וקשור - ברנשטיין

~~A~~ ~~[illegible]~~ ~~הקבוצה~~

$A \supseteq \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}.\ (\underbrace{f(2k)=2k \wedge f(2k+1)=2k}_{p''}) \vee (\underbrace{f(2k)=2k+1 \wedge f(2k+1)=2k+1}_{q''}) \} = B$

כיוון ש p אז $f(f(2k))=2k$

אז $f(f(2k+1))=$
$= f(2k) = 2k$

אם q אז $f(f(2k+1))=2k+1$

$f(f(2k)) = f(2k+1) = 2k+1$!

לכן צריך

$|B| = \aleph$! כי $B \sim P(N_{even})$ ע"י G.

$G: B \to P(N_{even})$

$G(f) = \{ 2k \mid f(2k)=2k \wedge k \in \mathbb{N} \}$

G חח"ע כי אם $f \ne g$ אז $f(2k) \ne g(2k)$
$\Downarrow$
$G(f) \ne G(g)$

יג

ונגם קבל: $\aleph$ $P(N_{even})$: נית משולם בכיוונל פונקציה [illegible] (ב"ב) ש

כאשר $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

$$\begin{cases} \chi_A(2k) = 0 \Rightarrow f(2k) = 2k+1 \\ \chi_A(2k) = 1 \Rightarrow f(2k) = 2k \end{cases}$$

לכן $|B| = |P(N_{even})| = 2^{|N_{even}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

ולכן $\aleph = |B| \le |A| \le \aleph$

ולפי קנטור-שרדר-ברנשטיין $|A| = \aleph$

26

3) א.

29 $\binom{2n}{n} \cdot n! \binom{2n+n-1}{2n-1}$

$\binom{2n}{n}$: לבחור n תאים לכדורים הגדולים

$n!$: לסדר את הכדורים הגדולים בתאים

$\binom{2n+n-1}{2n-1}$: $S(2n,n)$ כ"א לסדר n כדורים קטנים עם n תאים

ב) על-פי עקרון ההכלה וההפרדה.

$$\underbrace{\binom{70+3-1}{3-1}}_{\text{כל הסידורים}} - \underbrace{\binom{60+3-1}{3-1}}_{\text{מתא 2 יותר מ-10}} - \underbrace{\binom{40+3-1}{3-1}}_{\text{מתא ה-III יותר מ-30}} -$$

$$- \underbrace{\binom{30+3-1}{3-1}}_{\text{מתא ה-III יותר מ-40}} + \underbrace{\binom{30+3-1}{3-1}}_{\text{מתא ה-I והתא ה-II יותר מ-10 ויותר מ-30 בהתאמה}} + \underbrace{\binom{20+3-1}{3-1}}_{\text{מתא ה-I יותר מ-10 ומתא ה-III יותר מ-40}} + \underbrace{\binom{3-1}{3-1}}_{\text{מתא ה-II יותר מ-30 ומתא ה-III יותר מ-40}} - 0 =$$

0: לא יכולים להיות יותר מ-80 כדורים ב-3 התאים כי יש 70.

$$= \binom{72}{2} - \binom{62}{2} - \binom{42}{2} - \binom{22}{2} + 1$$

ג)

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 + 2^0 + 0 \quad / x^0$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 + 2^1 + 1 \quad / x^1$$

$$\text{— — — —}$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 2^n + n \quad / x^n$$

$$+ \overline{}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

נסמן $F(x)$ הפונקציה היוצרת של a_n .ול

$$\frac{F(x) - a_0 - a_1}{x^2} = 3\,\frac{F(x) - a_0}{x} - 2F(x) + \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$F(x) - a_0 - a_1 = 3xF(x) - 3a_0 x - 2x^2 F(x) + \frac{x^2}{1-2x} + \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$(1 - 3x + 2x^2) F(x) = 3 - 3x + \frac{x^2}{1-2x} + \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

3.

$$F(x)=\frac{3-3x+\frac{x^2}{(1-2x)}+\frac{x^3}{(1-x)^2}}{(1-2x)(1-x)}=\frac{3}{(1-2x)(1-x)}-\frac{3x}{(1-2x)(1-x)}+\frac{x^2}{(1-2x)^2(1-x)}+$$

$$+\frac{x^3}{(1-2x)(1-x)^3}=$$

$$=\underbrace{\frac{6}{1-2x}}-\underbrace{\frac{3}{1-x}}-\underbrace{\frac{3}{1-2x}}+\cancel{\frac{3}{1-x}}+\underbrace{\frac{1}{1-x}}-\underbrace{\frac{3}{2}\frac{1}{1-2x}}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-2x)^2}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{1-2x}}-\underbrace{\frac{1}{1-x}}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}=$$

$$\cancel{=8.5\frac{1}{1-2x}-5\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-2x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}}$$

~~הסדרה הנוצרת~~ ~~: a_n~~

$$\cancel{a_n=8.5\cdot 2^n-5+\frac{(1+n)}{2}2^n+(1+n)-\frac{(n+1)(n+2)}{2}=}$$

$$\cancel{=\left(8.5+\left(\frac{1+n}{2}\right)\right)2^n-\frac{n(n+1)}{2}-5}$$

$$=0.5\cdot\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-2x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}$$

$a_n=0.5\cdot 2^n+\left(\frac{n+1}{2}\right)2^n+(1+n)-\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ הסדרה הנוצרת

$$=\left(0.5+\frac{n+1}{2}\right)2^n-\frac{n(n+1)}{2}$$

10

סה״כ 31 28

4) א) $\binom{n}{n-3}\Big[3^{n-2} - \binom{n}{n-2}2^{n-2} + \binom{n}{1}1^{n-2} - 0\Big]$

צבעים ממקסימום n-3 דע לבחור n-3 צבעים — 2 צבעים — 1 צבע — אין צבע רק שמצבעים

על-פי עקרון ההכלה וההפרדה. 8

3) $$3n = 3|V| \underset{d(v)\ge 3}{\le} \sum_{v\in V} d(v) \underset{\text{משפט}}{=} 2|E| = 2(n+5) = 2n+10$$

$$\Downarrow$$

$$3n \le 2n+10$$

$$\Downarrow$$

$$n \le 10$$

6

5) נבחר צומת u כלשהו, ונסתכל על הגרף כשהוא ללא הצומת u. נספור את כמות הקשתות ע״י ספירת הדרגות של צמתיו כך נספור את כל הקשתות פעמיים $d(u)=$ לא כלשהו, על-פי הנתון ~~...~~ דרגות כל הצמתים אי-זוגיות לכן לכל צומת חוץ מ-u יש מספר זוגי של בנים (משפט 1).
נ״מ שמספר הקשתות הוא
$d(u) + \sum_{v\in V\setminus\{u\}} (d(v)-1)$ ~~...~~
וזה הוא מספר אי-זוגי! מש״ל.

לא נכון להסביר למה קשת נספרת פעמיים!

4

~~6) נניח בשלילה שלא, אזי יש מסלול, אחרת קיימים 2 צמתים $v_1, v_2 \in V$ שאין ביניהם קשת, כיוון ש $(v_1,v_2)\notin E$ ו- $d(v_1)\ge \frac{n+1}{2}$, $d(v_2)\ge \frac{n+1}{2}$ $n-2-2\left(\frac{n+1}{2}\right)=3$ שאין ביניהם קשת יש להם לפחות קשתות משותפות על-פי עקרון כדיכלה.~~

למה? אפשר, בקשה.

ב) אם $G=K_n$ אז יש משולש.

נבחר זוג v_1,v_2 שמחוברים בקשת.

אז לשניהם יש לפחות $2\left(\frac{n+1}{2}\right)+2-n=3$ שכנים משותפים

נסתכל על שכן משותף, צריכים להיות לפחות $\frac{n+1}{2}$ שכנים

~~[illegible]~~

נניח בשלילה שאין משולש אז עבור כל שכן של v_1 ו-v_2 יהיה שכן של x כי אחרת (x,y), (v_1,x), (v_2,x)

והיה משולש. אבל אז יש $n+1=\underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\text{שכנים של } v_1}+\underbrace{\left(\frac{n+1}{2}\right)}_{\text{שכנים של } x}$

קודקודים. סתירה!

ב) הוכחה קלה יותר: נניח בשלילה, נבחר v_1,v_2 שכנים, אז עבור שום שכן של v_1 יהיה גם שכן של v_2 כי אחרת השכן x יצור משולש עם (v_1,v_2)

אבל אז יש $|V| \geq n+1=\underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\text{שכנים של } v_2}+\underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\text{שכנים של } v_1} \geq |V|$

(ספרנו כל קודקוד פעם אחת כי ספרנו את v_1 רק כשכן של v_2 ואת v_2 כשכן של v_1, ואין שום שכנים משותפים).

סתירה! לכן יש משולש.