

הצעת פתרון למבחן במתמטיקה בדידה 5.9.2000

שאלה 1

א. נוכיח טענה זו:

$$\begin{aligned} (\lambda x \in R. e^x) \in \{g \in R \rightarrow R : \forall y \in \{x \in R : x > 0\}. y \in \{g(x) : x \in R\}\} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall y \in \{x \in R : x > 0\}. y \in \{e^x : x \in R\} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall y \in R^+. y \in \text{Im}(e^x) \Leftrightarrow \forall y \in R^+. \exists x \in R. y = e^x & \end{aligned}$$

הפונקציה: $\ln: R^+ \rightarrow R$ מוגדרת לכל ממשי חיובי, ולכן קיים x כנדרש. ניתן לקחת $x = \ln y$,
ועבורו בבירור מתקיים: $e^x = e^{\ln y} = y$. על כן הטענה נכונה.

ב. נכתוב את הביטוי הבא ללא סימני שלילה:

$$\begin{aligned} \neg(\exists \varepsilon > 0 (\forall \delta > 0 (\exists x > 0 (\exists y > 0 (|x - y| < \delta \wedge |x - y| > \varepsilon)))))) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\exists \delta > 0 (\forall x > 0 (\forall y > 0 (|x - y| \geq \delta \vee |x - y| \leq \varepsilon)))) & \end{aligned}$$

ג. צ.ל: המכפלה $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ היא זוגית.

הוכחה: נניח בשלילה כי המכפלה אי-זוגית, אזי כל אחד מגורמי המכפלה אי-זוגי, שכן די אם יש
באחד הגורמים את הגורם הזוגי 2 אזי המכפלה כולה זוגית.

כל גורם הוא אי-זוגי, כלומר לכל i מתקיים ש- $a_i - i$ אינו מתחלק ב-2. אזי: אם i זוגי אז a_i
אי-זוגי, ואם i אי-זוגי אז a_i זוגי.

ידוע ש- n אי-זוגי, לכן ישנם $(n+1)/2$ ימים אי-זוגיים, לכן $(n+1)/2$ ימים זוגיים.

באופן דומה ישנם $(n-1)/2$ ימים זוגיים, לכן $(n-1)/2$ ימים אי-זוגיים.

אבל נתון ש- a_i הם תמורה של 1 עד n ו- n אי-זוגי אזי יש $(n+1)/2$ ימים זוגיים ו- $(n-1)/2$

a_i ימים אי-זוגיים. קיבלנו סתירה. לכן מ.ש.ל.

שאלה 2

א. טענות I + III נכונות ואילו II אינה נכונה. נראה זאת:

S הוא יחס שקילות. כדי להראות זאת יש להראות שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי - בבירור מתקיים $\forall x. xSx$, כי $x-x=0 \mid 7$. מתחלק בכל מספר.
- סימטרי - נניח xSy , אזי $(x-y) \mid 7$. אם מספר מתחלק ב-7 אז גם הנגדי לו מתחלק ב-7, לכן $(y-x) \mid 7$ ומכאן: ySx .
- טרנזיטיבי - נניח $xSy \wedge ySz$, אזי $(x-y) \mid 7$ וגם $(y-z) \mid 7$. סכום של מספרים שמתחלקים ב-7 גם הוא מתחלק ב-7, לכן $(x-z) \mid 7$ ומכאן xRz .

T אינו יחס שקילות.

דוגמה נגדית - בבירור לא מתקיים $1T1$ כי 2 אינו מתחלק ב-7, וזוהי סתירה לרפלקסיביות.

SUT יחס שקילות.

ניתן להראות כי היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי בדומה ליחס S. אולם ניתן גם לטעון כי איחוד של יחס שקילות עם כל יחס אחר נותן יחס שקילות, כי:

$$x(S \cup T)y \iff xSy$$

ב. S הוא יחס שקילות, ועוצמת קבוצת המנה של היחס S היא 7. זאת מאחר שכל המספרים שמתחלקים ב-7 מהווים מחלקת שקילות. כל המספרים שנותנים שארית 1 מחלוקה ב-7, גם הם מהווים מחלקת שקילות... וכך הלאה עד 6.

SUT הוא גם יחס שקילות, כאמור, ועוצמת קבוצת המנה של יחס זה היא 4. זאת מאחר שכל המספרים שמתחלקים ב-7 מהווים מחלקת שקילות. כל המספרים שנותנים שארית 6 או שארית 1 מהווים מחלקת שקילות. כך גם אלו שנותנים שארית 5 או 2 ואלו שנותנים שארית 4 או 3.

ג. נשתמש באריתמטיקה של עוצמות:

ידוע שעוצמת הרציונליים ועוצמת הטבעיים הן \aleph_0 .

אזי:

$$|Q \rightarrow (N \rightarrow \{0,1\})| = |N \rightarrow \{0,1\}|^{|Q|} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph_1$$

ד. ראשית, ברור כי מתקיים: $A \subseteq N^N$, לכן: $|A| \leq |N^N| = \aleph$. נתבונן בקבוצה הבאה:

$$B = \{f: N \rightarrow N \mid \forall k. f(2k) = (2k+1) = 2k \vee f(2k) = f(2k+1) = 2k+1\}$$

קל לראות כי $B \subseteq A$, וכמו כן נתבונן בהעתקה הבאה:

$$H: P(\text{Neven}) \rightarrow B$$

$$H(X) = \lambda n. \begin{cases} 2n & (n \in \text{Neven} \wedge n \in X) \vee (n \in \text{Nodd} \wedge n+1 \in X) \\ 2n+1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

העתקה זו היא חח"ע ועל, לכן: $|A| \geq |B| = |P(\text{Neven})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

לפי משפט קנטור-ברנשטיין: $|A| = \aleph$.

שאלה 3

א. ראשית נבחר את n התאים מתוך $2n$ התאים בהם יהיו כדורים צבעוניים.

לאחר מכן נסדר את הכדורים הצבעוניים בתאים שנבחרו.

ואז נסדר n כדורים זהים ב- $2n$ התאים בסדר כלשהוא. על כן:

$$\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot S(2n, n) = \binom{2n}{n} n! \binom{3n-1}{2n-1}$$

ב. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה, ונקבל:

$$\binom{70+3-1}{3-1} - \binom{60+3-1}{3-1} - \binom{40+3-1}{3-1} - \binom{30+3-1}{3-1} + \binom{30+3-1}{3-1} + \binom{20+3-1}{3-1} + \binom{3-1}{3-1} - 0 =$$

$$= \binom{72}{2} - \binom{62}{2} - \binom{42}{2} + \binom{22}{2} + 1$$

ג. נמצא את נוסחת הנסיגה:

הפולינום האופייני הוא: $x^2 - 3x + 2 = 0$, ושורשיו הם 1 ו-2.

לפי צורת כלל הנסיגה נסיק כי צורת האיבר הכללי היא: $a_n = (an+b)2^n + (cn^2 + dn + e)$

נציב את החלק שקשור ל- 2^n ונקבל:

$$[a(n+2)+b]2^{n+2} = 3[a(n+1)+b]2^{n+1} - 2(an+b)2^n + 2^n$$

$$(an+2a+b)4 = 6(an+a+b) - 2(an+b) + 1$$

$$2an+4a+2b = 3an+3a+3b - an - b + \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

כעת נציב את החלק האחר מכלל הנסיגה, ונקבל:

$$[c(n+2)^2 + d(n+2) + e] = 3[c(n+1)^2 + d(n+1) + e] - 2[cn^2 + dn + e] + n$$

$$cn^2 + 4cn + 4c + dn + 2d + e = 3cn^2 + 6cn + 3c + 3dn + 3d + 3e - 2cn^2 - 2dn - 2e + n$$

$$c = 2cn + d + n$$

$$\Rightarrow c = d$$

$$\Rightarrow 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

נותר למצוא את b ואת e וזאת נעשה ע"י שני האיברים הראשונים:

$$a_0 = b + e = 1$$

$$a_1 = 2a + 2b + c + d + e = 2b + e + 1 - 1 = 2 \Rightarrow 2b + e = 2$$

$$b = 1 \quad \text{משתי משוואות אלה, נקבל:}$$

$$e = 0$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}n+1\right)2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}{2} \quad \text{ולכן:}$$

שאלה 4

א. מספר העצים הממוספרים על Π צמתים ומספר העלים בהם הוא $\Pi-3$ הוא

$$\frac{\binom{n}{3} [3^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-2} + 3]}{2}$$

ראשית נבחר 3 עלים מבין Π הצמתים.

לאחר מכן יש למצוא כמה אפשרויות יש למתרוזות באורך $\Pi-2$ מעל 3 העלים שנבחרו. נעשה כאן שימוש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

ג. נניח בשלילה כי אין משולש. אזי ניקח v_1, v_2 שמחוברים בקשת. בהכרח לא קיים צומת שהוא

שכן של שניהם כי אז נסגר מעגל. וקיבלנו: $\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1$. כלומר יש לפחות $n+1$ צמתים

בגרף, וזוהי כמובן סתירה. מ.ש.ל.

ג. T הוא עץ אשר דרגות כל צמתיו אי-זוגיות.

נסמן ב- d_i את דרגות הצמתים. אזי לפי הנוסחה הבאה: $2|E| = \sum_{1 \leq i \leq n} d_i$ עולה, שסכום הדרגות

הוא $\sum_{1 \leq i \leq n} d_i$ זוגי, הרי הוא כפולה של 2 במספר הקשתות, שהוא מספר טבעי.

ידוע, שאם מחברים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים מקבלים מספר זוגי, ואילו אם מחברים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים, מקבלים מספר אי-זוגי.

על כן, על מנת שנחבר את ה- d_i - ים האי-זוגיים, ונקבל מספר זוגי, צריך להיות מספר זוגי של מחוברים, כלומר n זוגי.

בעץ בעל n קודקודים יש בדיוק $n-1$ קשתות, וזהו כמובן מספר אי-זוגי. מ.ש.ל.

ד. קל להוכיח טענה זאת ע"י החישוב הבא:

$$3n = 3|V| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} d_i = 2|E| = 2(n+5) = 2n+10$$

$$3n \leq 2n+10$$

$$n \leq 10$$

מ.ש.ל.