

מתמטיקה בדידה

סמסטר קיץ, תש"ס

פרופי י. רודיטי

5/9/00

משך הבחינה: 3 שעות וחצי השעה.

להוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר, אסור.

בבחינה 4 שאלות. עליכם לענות על כל השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה (30%).
הציון הסופי יחשב לפי שלש התשובות שלהן ניתן הניקוד המירבי + ניקוד התשובה הרביעית מחולק ב-3.

רשמו תשובות מלאות ומנומקות.

תשובות לשאלות שונות יש להתחיל בעמוד חדש.

הסמלים R, Q, Z, N מייצגים את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונלים והממשיים, בהתאמה.

1. (א) הוכח או הפרד: (פרט את כל נימוקך).

$$\lambda x \in R. e^x \in \{g \in R \rightarrow R : \forall y \in \{x \in R : x > 0\}. y \in \{g(x) : x \in R\}\}$$

(ב) כיתבו את הפסוק הבא ללא סימני שלילה:

$$\neg(\exists \varepsilon > 0 (\forall \delta > 0 (\exists x > 0 (\exists y > 0 (|x-y| < \delta \wedge |x-y| > \varepsilon))))))$$

(ג) תהי a_1, a_2, \dots, a_n , תמורה כלשהי של המספרים $1, 2, \dots, n$. n הוא מספר טבעי אי-זוגי. הוכיחו כי המכפלה: $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ היא זוגית.

2. (א) (12%) על Z נגדיר שני יחסים: S, T כך ש- $k S m \Leftrightarrow k+m$ מתחלק ב-7. וכן $k T m \Leftrightarrow k+m$ מתחלק ב-7.

הוכח או הפרד: (I) S הוא יחס שקילות.

(II) T הוא יחס שקילות.

(III) $S \cup T$ הוא יחס שקילות.

(ב) (8%) בכל אחד מהמקרים בהם הייתה תשובתכם "נכון", מצאו את עוצמת קבוצת המנה.

(ג) (3%) מהי עוצמת הקבוצה: $Q \rightarrow (N \rightarrow \{0,1\})$: הסבירו!

AAAH-4

(ד) (7%) נגדיר: $A = \{ f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}. f(f(k)) = f(k) \}$. מהי העוצמה $|A|$? הסבירו!

3: (א) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים (זהים) ו- n כדורים צבעוניים (ב- n צבעים שונים, ללא לבן) ל- $2n$ תאים כך שבכל תא יהיה לכל היותר כדור צבעוני אחד (אך יתכנו מספר כדורים). (אם $n=1$)

(ב) בכמה דרכים ניתן לחלק 70 כדורים זהים לשלשה תאים כך שבתא הראשון יהיו פחות מ-10 בתא השני פחות מ-30 ובתא השלישי פחות מ-40?

(ג) נתונה נוסחת הנסיגה הבאה. רשום ביטוי מפורש של a_n

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 2^n + n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

4. (א) (10%) בכמה עצים ממוספרים על n צמתים יש בדיוק $n-3$ עלים?

(ב) (8%) יהי G גרף פשוט על $n \geq 3$ צמתים. הוכיחו כי אם $d(v) \geq (n+1)/2$, לכל צומת v , אזי יש ב- G משולש.

(ג) (6%) יהי T עץ אשר דרגות כל צמתיו אי-זוגיות. הוכיחו כי מספר הקשתות בו גם אי-זוגי.

(ד) (6%) יהי G גרף פשוט שלו n צמתים ו- $n+5$ קשתות. דרגתו המינימלית לפחות 3. הוכיחו כי $n \geq 10$.

בהצלחה!