

מתמטיקה בדידה, 1999, סמסטר 2 מועד א עמוד 1 מתוך 1

סמסטר ב' תשנ"ט
מועד א' 29.6.1999

מתמטיקה בדידה
מ טרסי

משך הבחינה שלוש שעות. השמוש בחומר עזר כלשהו אסור. יש להשיב על כל השאלות הנקוד: 14% לסעיף א' ולסעיף ב' בכל שאלה, 6% לסעיף ג'. הוכח במדויק כל תשובה שלך!

האותיות V, Z, R מציינות, כמקובל, את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים והממשיים.

1. א. נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ק הוא מספר ראשוני) $f(x) = \lambda x + V(p|x)$ מהי הקבוצה (שאיננה בתמונת הפונקציה) המתקבלת, במקרה זה, מההוכחה למשפט קנטור?

ב. הסבר את הטעות ביהוכחה הבאה:

בהינתן מטריצה אינסופית שכל שורה שלה היא מיתוח עשרוני אינסופי (פיתוח סופי יושלם בסדרת אפסים) של מספר רציונלי בקטע $(0, 1)$, נבנת מספר רציונלי, שכל ספרה שלו שונה מהספרה המתאימה באלכסון של המטריצה. מתקבל מספר שונה מכל אחת משורות המטריצה. מכאן עקבוצת המספרים הרציונליים בקטע $(0, 1)$ אינה בת מניה.

ג. הוכח במישור על פי ההגדרות, מבלי להשתמש במשפט קנטור, או בכל כלי אחר מידוך האורתומיטקה של העוצמות, את המשפט:
"עוצמת קבוצת הפונקציות הממשיות $R \rightarrow R$ גדולה מעוצמת קבוצת המספרים הממשיים R ".

2. נגדיר: $T = \{(f, g) \mid \forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}\}$

(א) האם T הוא יחס שקילות ב- $R \rightarrow R$?

(ב) מהי קבוצת כל הפונקציות המקיימות את היחס T עם הפונקציה $g(x) = 0$ ומהי עוצמתה של קבוצה זו?

(ג) יהיה S יחס שקילות ב- $R \rightarrow R$, המקיים $S \subseteq T$. מהי עוצמת קבוצת המנה $(R \rightarrow R)/S$?

3. סדרה a_n , $A = \lambda k$. סוגדרת על ידי: $a_{n+1} = -a_{n-1} + 6a_n + 3$ $a_0 = a_1 = 0$

(א) חשב את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה A (אורך מתבקש לחשב את a_4).

(ב) תהיה b_n , λk סדרת ההפרשים של הסדרה A . הסוגדרת על ידי: $b_0 = a_1 - a_0$, $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. מצא ביטוי סגור ל- b_n .

(ג) A קבוצה בת 10 אברים. חשב את $|\{(f: A \rightarrow A \mid \bigwedge (x \in A) (f(x) - x) = 2)\}|$ (הפיכה) f .

התשובה