① א. I. לא נכון,

ניקח:

$$C=\{\{4n \mid n\in\mathbb{N}\}\setminus\{4\}\}$$

$$C\in P(\{4n \mid n\in\mathbb{N}\})$$

$$C\,\triangle\,\{4k \mid k\in\mathbb{N}\}=\emptyset\cup\{4\}=\{4\}$$

כי $|C|=\aleph_0$ $\Downarrow$

$$C\notin\{B\in P(\mathbb{N}) : |B|=|B\,\triangle\,\{4k \mid k\in\mathbb{N}\}|\}$$

II.

$$\lambda x\in\mathbb{R}.e^x\in\{g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \forall y\in\{x\in\mathbb{R}:x>0\}.\, y\in\{g(x):x\in\mathbb{R}\}\}$$

לפי כלל β $\Updownarrow$

$$\lambda x\in\mathbb{R}.e^x\in\{g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \forall y>0.\, y\in\{g(x) : x\in\mathbb{R}\}\}$$

β $\Updownarrow$

$$\lambda x\in\mathbb{R}.e^x\in\{g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \forall y>0.\exists x\in\mathbb{R}.\ y=g(x)\}$$

β $\Updownarrow$

$$\forall y>0.\exists x\in\mathbb{R}.\ y=\lambda x\in\mathbb{R}.e^x(x)$$

β $\Updownarrow$

$$\forall y>0.\exists x\in\mathbb{R}.\ y=e^x$$

והטענה הנכונה נכונה (אינפי 1).

$$\lambda x\in\mathbb{R}.e^x$$

היא מ ל-$\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}^+$.

ב. I. נגדיר:

A_k - אוסף כל המספרים שהשארית שלהם בחלוקה ב-n היא k או n-k.

$k=0,1,2,\dots\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$

יש לנו $\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ קבוצות ו-n איברים, לפי שובך יונים, חייבים להיות שני איברים באותה קבוצה, נסמן אותה ב-A_k, ואותם ב-x ו-y.

$x \bmod n = k$ או $n-k$
$y \bmod n = k$ או $n-k$

אם שניהם נותנים k או שניהם נותנים n-k, ההפרש שלהם נותן 0. ואם אחד מהם נותן k והשני n-k הסכום ישאיר

II. נסמן: A_0 - המספרים שהשארית שלהם היא 0 בחלוקה ב-3.
A_1 - " " " " 1 " " .
A_2 - " " " " 2 " " .

אם כל הקבוצות לא ריקות, ניקח איבר אחד מכל קבוצה, והסכום שלהם יתחלק ב-3. אחרת 5 המספרים מחולקים ל-2 קבוצות $\Leftarrow$ (לפי שובך יונים) קיימת קבוצה שבה לפחות 3 איברים, נבחר 3 איברים משם, וסכומם יתחלק ב-3.

ג. I. סימטריות: אם $k-m$ מתחלק ב-3, אזי $m-k$ מתחלק ב-3.

רפלקסיביות: $\forall k\ kSk$ כי $k-k=0$ מתחלק ב-3.

טרנזיטיביות: אם kSm ו- mSp צ.ל. kSp:

$$k-p=(k-m)-(m-p)$$

סכום איברים שמתחלקים ב-3, גם מתחלק ב-3.

לכן S יחס שקילות.

II. T לא יחס שקילות, כי T לא רפלקסיבי, $\langle 1,1\rangle \notin T$, כי $1+1=2$ לא מתחלק ב-3.

III. רפלקסיביות:

$$\forall k\ k(S\cup T)k \Leftarrow \forall k\ kSk$$
לפי סעיף I

סימטריות: $m-k$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $k-m$ מתחלק ב-3
$m+k$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $k+m$ מתחלק ב-3

לכן:

$m+k/m-k$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $k+m/k-m$ מתחלק ב-3

טרנזיטיביות: צ.ל. לכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$

$$a(S\cup T)c \Leftarrow b(S\cup T)c \text{ וגם } a(S\cup T)b$$

ישנם ארבעה מקרים:

$a-b$ מתחלק ב-3 וגם $b-c$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $a-c$ מתחלק ב-3 (סכום שלהם)

$a-b$ מתחלק ב-3 וגם $b+c$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $a+c$ מתחלק ב-3 (סכום שלהם)

$a+b$ מתחלק ב-3 וגם $b \cdot c$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $a+c$ מתחלק ב-3 (הסכום ;

$a+b$ מתחלק ב-3 וגם $b+c$ מתחלק ב-3 $\Leftarrow$ $a-c$ מתחלק ב-3 (הפרש .

לכן SUT הוא יחס שקילות

2) א. A קבוצה אינסופית, צ.ל. יש לה תת-קבוצה בת-מניה.

נבחר $a_0 \in A$, מכיוון ש-A אינסופית $|A|=|A\setminus\{a_0\}|$

ולכן נוכל לבחור באופן אינדוקטיבי איברים, כל פעם מהקבוצה A

בלי כל האיברים שבחרנו קודם לכן.

קיבלנו קבוצה בת-מניה: $S=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

מ.ש.ל.

ב. I. $C(\aleph_0,\aleph_0)=|P_{\aleph_0}(\mathbb{N})|$

$P_{\aleph_0}(\mathbb{N}) \subseteq P(\mathbb{N})$

$C(\aleph_0,\aleph_0) \le |P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}=\aleph$

ניקח: $Y=\{\mathbb{N}_{even} \cup w \mid w \subseteq \mathbb{N}_{odd}\}$

לכל $x \in Y$, $|x|=\aleph_0$, כי $\mathbb{N}_{even} \subseteq x \subseteq \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$Y \subseteq P_{\aleph_0}(\mathbb{N})$

$\Downarrow$

$|Y| \le C(\aleph_0,\aleph_0)$

אבל $|Y| = 2^{|\mathbb{N}_{odd}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$\Downarrow$

$C(\aleph_0,\aleph_0)=\aleph$

II. $C(\aleph,\aleph)=|P_{\aleph}(\mathbb{R})|$

$P_{\aleph}(\mathbb{R}) \subseteq P(\mathbb{R})$

$C(\aleph,\aleph) \le P(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}$

נגדיר: $Y=\{\mathbb{R}^+ \cup w \mid w \subseteq \mathbb{R}^-\}$

לכל $x \in Y$, $|x|=\aleph$, כי $\mathbb{R}^+ \subseteq x \subseteq \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$Y \subseteq P_{\aleph}(\mathbb{R})$

$\Downarrow$

$|Y| \le C(\aleph,\aleph)$

אבל $|Y| = |P(\mathbb{R}^-)| = 2^{\aleph}$

$\Downarrow$

6. נבנה פונקציה $H: R^A \times R^B \to R^{A\cup B}$ חח"ע ועל
על-מנת להוכיח שקילות.

$$H = \lambda \langle f,g\rangle \in (A\to R)\times(B\to R) . \lambda h: A\cup B \to R . \begin{cases} f(x) & x\in A \\ g(x) & x\in B\end{cases}$$

נוכיח כי H חח"ע:

$$H(\langle f_2,g_2\rangle) = H(\langle f_1,g_1\rangle)$$

לכל $x\in A\cup B$

אם x ב-A $f_2(x) = h(x) = f_1(x)$

אם x ב-B $g_2(x) = h(x) = g_2(x)$

כי x לא יכול להיות ב-A גם ב-B (לפי הנתון $A\cap B=\emptyset$)

$$\Downarrow$$

$$\langle f_1,g_1\rangle = \langle f_2,g_2\rangle$$

נוכיח ש-H על:

בהינתן $T(x): A\cup B\to R$

קיימים f,g כך ש: $H(\langle f,g\rangle)\equiv T$

מכיוון ש-$A\cap B=\emptyset$, ניתן לפרק את $T(x)$:

$$T(x)=\begin{cases}T_1(x) & x\in A\\ T_2(x) & x\in B\end{cases}$$

לכן: $H(\langle T_1,T_2\rangle)=T$, ולכן H על.

③ א. יש לסדר 10 עובדים ל-5 קבוצות, כך שלכל קבוצה יש שם (כל משמרת היא שונה) לכן הפתרון הוא:

$$\frac{10!}{(2!)^5}$$

ב. I. V - כל התמורות של המספרים

A_1 - התמורות שבהן 123 מופיע

A_2 " " 456 " "

אנחנו מחפשים את: $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|$, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מתקיים: $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|V|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|$

$|A_1|=7!$, כי נסתכל על 123 כעל מספר אחד

$|V|=9!$

$|A_2|=7!$, מאותה סיבה

$|A_1\cap A_2|=5!$, כי נסתכל על 123 כמספר אחד, וגם 456 כמספר אחד.

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=9!-7!-7!+5!$$

II. נוסיף הגדרה: A_3 - התמורות שבהן 678 מופיע

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|V|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$|A_3|=7!$, בדיוק כמו A_1 ו-A_2.

$|A_1\cap A_3|=5!$, כי נסתכל על 123 כמספר אחד, וגם 678 כמספר אחד

$|A_2\cap A_3|=3!$, כי נסתכל על 45678 כעל מספר אחד

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!$, " " " " " " ", וגם על 123.

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=9!-3\cdot7!+3\cdot5!-3!$$

ג.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 2^n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

הפולינום האופייני $P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

השורשים הם $x_1 = x_2 = 2$.

לכן הפתרון למשוואה ההומוגנית:

$$a_n^{(h)} = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n$$

נניח שהפתרון הפרטי הוא מהצורה: $2^n\cdot n^2\cdot c$

נציב אותו בנוסחת הנסיגה:

$$2^{n+2}(n+2)^2\cdot c = 4\cdot 2^{n+1}(n+1)^2\cdot c - 4\cdot 2^n\cdot n^2\cdot c + 2^n$$

$$4\,(n+2)^2\cdot c = 4\cdot 2\cdot (n+1)^2\cdot c - 4\cdot n^2\cdot c + 1$$

$$4n^2c + 16n\cdot c + 16\cdot c = 8n^2c + 16\cdot n\cdot c + 8c - 4n^2\cdot c + 1$$

ולאחר צמצום, נקבל:

$$8c = 1$$

$$c = \frac{1}{8}$$

לכן: $a_n^{(p)} = 2^n\cdot n^2\cdot \frac{1}{8}$

הכללי המלא a_n: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n + \frac{2^n\cdot n^2}{8}$

נציב את a_0 ו-a_1 כדי למצוא את A ו-B:

$$a_0 = A + 0 + 0 = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$a_1 = \underset{1}{A}\cdot 2 + B\cdot 2 + \frac{2}{8} = 2 + 2B + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow B = -\frac{1}{8}$$

$$a_n = 2^n - \frac{1}{8}n\cdot 2^n + \frac{2^n n^2}{8} = 2^n - n\cdot 2^{n-3} + n^2\cdot 2^{n-3}$$

(4) א. נוכיח באינדוקציה על $|V|=n$.

עבור $n=1$:

יש מעגל יחיד.

נניח עבור $n-1$, ונוכיח עבור n:

אם יש קודקוד שדרגתו 1, נוריד אותו ונקבל $n-1$ קודקודים ו-$n-1$ קשתות, ולפי הנחת האינדוקציה יש מעגל יחיד (הקשת שהסרנו לא סוגרת מעגל, כי היא מחוברת לקודקוד בודד).

אחרת, מכיוון שהגרף קשיר ויש בו n קשתות דרגת כל קודקוד היא 2; נבחר קודקוד כלשהו ונתחיל "ללכת" על הקשתות, בכל צומת "נבקר" רק פעם אחת, כי בגלל שדרגתה 2, נכנס אליה על קשת אחת, ונצא ממנה על קשת אחרת, ונגיע לכולן בגלל שהגרף קשיר. בסוף נחזור לקודקוד ממנו התחלנו (כי בכל שלב קטן מספר הקשתות שעוד לא "הלכנו" עליהן), ונשלים מעגל.

ב. מקרה פרטי של משפט שהוכח במבחן אחר.

ג. נסתכל על קודקוד כלשהו, יוצאות ממנו 16 קשתות, לפי שובך יונים, חייבות להיות לפחות 6 מהן באותו צבע, נניח אדום, נסתכל על ששת הקודקודים שאליהם מובילות הקשתות:
אם שניים מהם מחוברים בקשת אדומה, השלמנו משולש.
אחרת יש לנו גרף שלם עם 6 קודקודים, שצבוע בשני צבעים נסתכל בו על קודקוד מסויים, יוצאות ממנו 5 קשתות, לפי שובך יונים, 3 מהן באותו צבע, נניח ירוק, נסתכל על שלושת הקודקודים שאליהם מובילות הקשתות הנ"ל, אם שניים מהם מחוברים בקשת ירוקה, קיבלנו משולש ירוק, אחרת יש לנו משולש שכל הקשתות בו בצבע הנותר, וקיבלנו כאן נוסף משולש.

[illegible], כלו קודקודים, $|V|=9$

בין שני קודקודים יש קשת אם הם מכירים אחד את השני

דרגה של קודקוד לכן, היא מספר האנשים שהוא מכיר

$$\sum d(v) = 2\cdot 6 + 45 + 2\cdot 4 + 2 = 42$$

לכן יש $\frac{42}{2} = 21$ קשתות

לפי נוסחת טורן:

$$T(n, K_T) \le \frac{(T-2)n^2}{2(T-1)}$$

$$T(9, K_3) \le \frac{1\cdot 9^2}{2\cdot 2} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$$

כלומר, בגרף בן 9 קודקודים וניתן "לדחוס" לכל היותר 20 קשתות מבלי שיהיה משולש, אבל מכיוון שיש 21 קשתות חייב להיות משולש, כלומר שלושה אנשים שמכירים אחד את השני.