

סמסטר ב', תשנ"ח

מתמטיקה בדידה

19/6/98

פרופ' י. רודיטי

משך הבחינה: 3 שעות.

להוציא דפי נוסחאות המצורפים לבחינה, השימוש בחומר עזר, או מחשבון,

אסור.

בבחינה 4 שאלות. עלק לענות על כל השאלות. שלש התשובות הטובות ביותר תזכינה את הכותב ב- 90% של הציון. על תשובה לשאלה הנספת ינתנו לכל היותר 10%.

לשאלות ניקוד שווה. רשום תשובה מלאה ומנומקת. תשובות לשאלות שונות יש להתחיל בעמוד חדש.

הסמלים R, Z, N מייצגים את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים והרציונלים, בהתאמה.

1. (א) הוכח או הפרד: (פרט את כל נימוקך).

(i) $P(\{4n \mid n \in N\}) \subset \{B \in P(N) : |B| = |B \Delta \{4k \mid k \in N\}|\}$

(ii) $\lambda x \in R e^x \in \{g \in R \rightarrow R : \forall y \in \{x \in R : x > 0\}, y \in \{g(x) : x \in R\}\}$

(ב) (I) נתונים m מספרים טבעיים חיוביים. הוכח כי תמיד ניתן לבחור שני מספרים כך שסכומם או הפרשם מתחלק ב- m .

(II) הוכח כי בכל קבוצה של חמישה מספרים טבעיים יש לפחות שלשה שסכומם מתחלק ב- 3.

(ג) על Z נגדיר שני יחסים: S, T כך ש- $k S m \Leftrightarrow k-m$ מתחלק ב- 3.

וכן $k T m \Leftrightarrow k + m$ מתחלק ב- 3.

הוכח או הפרד: (I) S הוא יחס שקילות.

(II) T הוא יחס שקילות.

(III) $S \cup T$ הוא יחס שקילות.

XX-35

2. (א) תהי A קבוצה אינסופית. הוכח כי יש לה תת-קבוצה בת-מניה.
(ב) חשב:

$$(i) C(\aleph_0, \aleph_0) \quad , \quad (ii) C(\aleph, \aleph)$$

(ג) הוכח ישירות ע"י בניית פונקציה שקילות כי אם $A \cap B = \emptyset$ אזי הקבוצות $R^{A \cup B}$ ו- $R^A \times R^B$ הן שוות עוצמה.

3. (א) בכמה אופנים ניתן לשבץ 10 עובדים ל-5 משמרות (שונות) זוג עובדים בכל משמרת?

(ב) מה מספר התמורות של הספרות 1, 2, ..., 9 שמקיימות:

(I) לא מופיעים הצרופים 123 ו-456.

(II) לא מופיעים הצרופים 123, 456 ו-678.

הערה: הצרוף 123 פרושו שמספרים אילו מופיעים זה ליד זה.

(ג) נתונה נוסחת הנסיגה הבאה. רשום ביטוי מפורש של a_n

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 2^n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

4. (א) הוכח שאם $G(V,E)$ גרף קשיר כך ש- $|E| = |V|$ אזי ב-G יש מעגל יחיד. ענה רק על שניים מבין שלשת הסעיפים הבאים:

(ב) הוכח כי אם צובעים את קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים בצביעה כלשהי אזי מתקבל מעגל (מגודל כלשהו) חד-צבעי.

(ג) הוכח כי אם ניצבע את קשתות הגרף השלם K_{17} ב-3 צבעים בצביעה כלשהי אזי תמיד יהיה לפחות משולש אחד חד-צבעי.

(ג) בקבוצה של 9 אנשים מתקיים המצב הבא:

אדם אחד מכיר שני אנשים אחרים.

שני אנשים מכירים, כל אחד, ארבעה אנשים.

ארבעה אנשים מכירים, כל אחד, חמשה אנשים.

שני אנשים מכירים, כל אחד, ששה אנשים.

הוכח: ישנם שלשה אנשים אשר מכירים זה את זה.

בהצלחה!!