

סנסטר בי תשמיז

מתמטיקה בדידה
מ. טרסי
13.6.97

משך הבחינה שלוש שעות. מותר השימוש בכל חומר עזר.
יש לענות על כל השאלות.
הנקוד המרבי בכל שאלה: 20 נקי לסעיף אחד, 29 לשני סעיפים ו- 33 נקי לתשובה מלאה על כל שלוש הסעיפים. כעקרון, סעיף א' בכל שאלה הקל ביותר סעיף ב' ברמה בינונית וסעיף ג' הקשה ביותר.
יש לנמק פתרון כל שאלה.

הסמלים R, N ו- Q מיצגים את קבוצות המספרים הממשיים הטבעיים והרציונלים בהתאמה.

- 1. א. חשב את העוצמות של שתי הקבוצות הבאות:
 i. $\{0,1\} \rightarrow (N \rightarrow \{0,1\})$
 ii. קבוצת כל היחסים מ- N ל- R

ב. הצג פונקציה הפיכה מ- $(0,1)^I$ ל- R^2 (כאן $(0,1)$ הוא הקטע הפתוח על ציר הממשיים)

ג. פונקציה ממשיית $f: R \rightarrow R$ המקיימת: $f(x) - f(y) \leq x - y$ $\forall x, y \in R$.
תקרא מכווצת. חשב את עוצמת קבוצת הפונקציות הממשייות המכווצות.

2. א. סידרה a_k , $k \in N$ מוגדרת על ידי $a_0=1, a_1=2, a_2=0, a_{k-1} = a_k - 2a_{k-1} - a_k$,
חשב את הפונקציה היוצרת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$; אין צורך למצוא בטוי סגור ל- a_k .

ב. סידרה b_k , $k \in N$ מוגדרת על ידי $b_0=1, b_{k-1} = b_k - a_{k-1} - 1$, $b_k = a_k$ מהסעיף הקודם).
חשב את הפונקציה היוצרת $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

ג. חשב את מספר התנוורות של המספרים הטבעיים מ- 1 עד k , שכל מספר נמצא בהן לכל היותר מרחק צעד אחד ממקומו הטבעי (בנוסח פורמלי, כאשר תמורה מוגדרת כפונקציה הפיכה f , מדובר בתמורות המקימות, לכל z מ- 1 עד k , $|f(z) - z| \leq 1$).

3. א. בקבוצת המספרים הממשיים R , הצג יחס רפלקסיבי ואנטי סימטרי שאיננו יחס סדר.

ב. בכמה גרפים פשוטים שאינם עצים (לפי הגדרת גרף פשוט כיחס סימטרי אנטי רפלקסיבי), על קבוצת הקדקדים $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, הקודקדים 1 ו- 2 סמוכים: (הצג תוצאה סופית - מספר)

ג. בכמה גרפים פשוטים על קבוצת הקדקדים $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ יש לפחות מעגל אחד: (נס כאן יש להציג תוצאת חישוב סופית).

~~XX~~ 30 התלמיד