64

מרשכ'ים

מרצים: א.אברון, י.הירשפלד, א.פרחי

מתרגלות: ע.ברמלה, י.קמפנר

סמסטר א תשנ"ז

מועד א 29.1.97

מבחן במתימטיקה בדידה

משך המבחן: 3 שעות

הוראות כלליות: אסור שימוש בכל חומר עזר. מותר שימוש במחשבון.

הערה כללית: אפשר להוכיח סעיפים על סמך סעיפים קודמים גם אם לא הצלחת להוכיח סעיפים אלו.

חלק א' ענה על 3 מחמש השאלות הבאות:

1. קבע/י מי מהטענות הבאות היא נכונה ומי לא. נמק/י קביעותיך

(5 נק') א. $\lambda x \in R.\{x\} \in \{f \in R \to R \mid \forall x \in R. |f(x)| = 1\}$

(5 נק') ב. $P(\{2n \mid n \in N\}) \subseteq \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{2k \mid k \in N\}|\}$

(5 נק') ג. $P(\{2n \mid n \in N\}) \subset \{A \in P(N) \mid |A| = |A \cap \{2k \mid k \in N\}|\}$

(5 נק') ד. $\lambda x \in R.2^x \in \{f \in R \to R \mid \exists y \in \{x \in R \mid x \leq 0\}. y \in \{f(x) \mid x \in R\}\}$

2.

(5 נק') א. הוכח/י ש $|N \to (N \to R)| = |N \to R|$

ב. נגדיר

$$F:(N \to (N \to R)) \to (N \to R)$$

$$G:(N \to R) \to (N \to (N \to R))$$

בצורה הבא

$$F = \lambda f \in N \to (N \to R).\lambda x \in N.(f(x))(x)$$

$$G = \lambda g \in N \to R.\lambda x \in N.\lambda y \in N.g(x)$$

(10 נק') (i) הוכח/י ש $F \circ G = I_{N \to R}$

(5 נק') (ii) איזו מסקנה אפשר להסיק על F ו- G מהעובדה שהוכחה בסעיף (i) ?

XX 29

ע נ"ו

7

סמסטר א' תשנ"ז
29.1.97

65 60

.3

10 נק' א. תהי a עוצמה ו- C,B קבוצות כך ש:

1. $|B|=|C|=|B\cup C|=a$

2. $B\cap C=\phi$

הוכח/י כי $\lambda X\in P(B).X\cup C$ היא פונקציה ח.ח.ע. מ- $P(B)$ אל $P_a(B\cup C)$.

תזכורת: $P_a(A)=\{X\in P(A)\,|\,|X|=a\}$.

10 נק' ב. חשב/י את $C(2^{\aleph},2^{\aleph})$ (רמז: כדאי להיעזר בחלק א!).

4. תהי α עוצמה המקיימת את התנאי הבא: לכל A ו- C, אם $A\subset C$ ו- $|A|=\alpha$ ו- $|C|>\alpha$ אז $|C-A|>\alpha$. הוכח/י:

10 נק' א. $\alpha+\alpha=\alpha$ (רמז: הוכחה בדרך השלילה עשויה להועיל!).

10 נק' ב. אם $A\subset C$ ו- $|A|=\alpha$ ו- $|C|>\alpha$ אז $|C-A|=|C|$

5. יהי $>$ יחס סדר חלקי חזק (כלומר אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי) על קבוצה סופית V.
אומרים ש- x הוא העוקב של y לפי $>$ אם $y>x$ ולא קיים z כך ש $x>z>y$.
נניח של $>$ התכונה הבאה: כל איבר x של V הוא עוקב של לכל היותר איבר אחד של V.
נגדיר אוסף E של קשתות על V באופן הבא: יש קשת בין x ל- y אס"ם x העוקב של y או y עוקב של x. ((V,E) הינו גרף).
תהי $a_1,a_2,\dots,a_n$ מסילה ב- (V,E) ונניח כי a_1 מקשרת את x_0 ו- x_1, a_2 מקשרת את x_1 ו- x_2, ..., a_n מקשרת את x_{n-1} ו- x_n.

נק' א. הוכח/י כי אם x_1 הוא עוקב של x_0 אז לכל $1\le i\le n$, x_i הוא עוקב של x_{i-1}.

נק' ב. הוכח/י כי אם $a_1,a_2,\dots,a_n$ מסילה כנ"ל אז או שלכל $1\le i\le n$, x_i הוא עוקב של x_{i-1}, או שלכל $1\le i\le n$, x_{i-1} הוא עוקב של x_i או שקיים $0<k<n$ כך שלכל $1\le i\le k$, x_{i-1} הוא עוקב של x_i ולכל $k+1\le i\le n$, x_i הוא עוקב של x_{i-1}.

נק' ג. הוכח/י ש- (V,E) הוא יער.

נק' ד. נניח שקיים ב- V איבר קטן ביותר m (כלומר: איבר m כך ש: $x>m$ לכל $x\ne m$)
הוכח/י ש (V,E) עץ (רמז הוכח תחילה שאם $x>y$ אז יש מסילה בין x ל- y).

סה"ן

מועד א' 29.1.97

חלק ב': ענה/י על שתיים מארבע השאלות הבאות.

(20 נקי) 6. הוכח/י שאם $X_1,\dots,X_k$ הם k פתרונות של משוואת נסיגה הומוגנית מסדר k עם מקדמים קבועים, ומתקיים שהוקטורים הבאים הם בלתי תלויים:

$$\begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ \vdots \\ X_1(k-1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ \vdots \\ X_2(k-1) \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} X_k(0) \\ X_k(1) \\ \vdots \\ X_k(k-1) \end{bmatrix}$$

אז $X_1,\dots,X_k$ בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

הערה: אין להסתמך על כך שמימד מרחב הפתרונות הוא k אלא אם כן הוכחת זאת תחילה.

(20 נקי) 7. נתונה משוואת הנסיגה:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3^n(n+1)$$

עם תנאי התחלה: $a_1 = 1$ $a_0 = 1$

מצא/י נוסחה סגורה (לא רקורסיבית) ל- $\lambda n.a_n$.

8.

(10 נקי) א. מהו מספר החלוקות של k כדורים שונים ב- m תאים שונים, אם בכל תא צריך להיות כדור אחד לפחות.

(5 נקי) ב. מהו מספר החלוקות של מספר כלשהו של כדורים זהים ב- m תאים שונים, אם מספר הכדורים בכל תא (פרט לראשון) צריך להיות גדול ממספר הכדורים בתא שלפניו, ובכל תא אפשר לשים לכל היותר k כדורים.

(5 נקי) ג. נסח/י את הבעיה בסעיף (א) במונחים מתמטיים מדויקים של תורת הקבוצות.

(20 נקי) 9. מהו מספר המחרוזות באורך 178 של אפסים ואחדים בהם אין אפס או אחד בודד (כלומר כל אפס רואה מימינו או משמאלו משהו השווה לו באפסותו וכל אחד רואה מימינו או משמאלו משהו השווה לו באחדות!).

הערה: אין צורך לתת את התשובה בצורה של הצגה עשרונית.

ב ה צ ל ח ה !

9