19.2.93
מועד א' פתרונות

-3-

1) א) חשב את הפונקציה היוצרת המתאימה לסדרה $a_k$ המוגדרת ע"י

$a_0=1$

$a_1=3$

$$a_{k+2}=a_{k+1}+2a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}x^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k+2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\frac{A(x)-a_0-a_1x}{x^2}=\frac{A(x)-a_0}{x}+2A(x)$$

$$A(x)-a_0-a_1x=xA(x)-a_0x+2x^2A(x)$$

$$A(x)-1-3x=xA(x)-x+2x^2A(x)$$

$$A(x)(1-x-2x^2)=1+3x-x$$

$$\boxed{A(x)=\frac{1+2x}{(1-x-2x^2)}}$$

ב) בכמה אופנים ניתן לצבוע לוח מלבני משובץ, הבנוי במקום
באורך n, כל משבצת בשחור או לבן, כאשר כל המשבצות
הסמוכות למשבצת שחורה הן לבנות.

משל:

$n=1$ 3

$n=2$ 5

$3^2-4=5$

$$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$$

$$x^2=x+2$$

$$x^2-x-2=0$$

85

$$\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot-2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=-1,2$$

$$\boxed{a_n=-\tfrac{1}{3}(-1)^n+\tfrac{4}{3}2^n}$$

$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ $\qquad a_0=1=A+B \qquad A=1-B$

$a_n=A(-1)^n+B2^n \qquad a_1=3=A(-1)+2B \qquad A=-\tfrac{1}{3}$

-4-

ג) נסמן כי T(n) את החזקה הגדולה ביותר של 2 המחלקת את n.

19.2.93

מעך 7 % ממוצע

$T(24)=3 \quad T(\ldots)=\ldots \quad T(7)=1$

הקבי שהמספרים טבעיים.

כל n מתוך זה מוצג כסכום של T(n) מחוברים שווים, כאשר n/T(n) כל אחד.

$T(6)=2 \quad T(12)=4$

$6/2=3 \quad 12/4=3$

פעמיים 3 4 פעמים 3

ד) וכו.

$A=\{12,6,10,3,4\}$

$(3,3,3,3,3,3,3,5,5,1,1,1,1)$

נאחד ונצא קבוצה כזו ניתן לחלק את המספרים הגדולים (7 שלושות למשל) לקבוצה שיחולקו במכפלה של 2 ונקבל שונות כך שבכל קבוצה 2 מספרים בקבוצה.

ונסה לגלות ידע הגודל של כל המספרים במחברת.

3 מופיע 7 פעמים $7=4+2+1$

$2^2+2^1+2^0$

ולכן נוכל כי נחלק את הקבוצה של ה-3-ים לקבוצה של 4 לקבוצה של 2 ולקבוצה של 1

$\leftarrow 4\times3=12 \quad 2\times3=6 \quad 1\times3=3$

5 מופיע פעמיים $2=2^1$ $10=5\times2$

86

וכן הלאה

מס החלוקות של שלם למחוברים אי זוגיים = לחלוק למספרים שונים מעורבים על עצמם

142

-5-

19/2/93
מועד א' סמסטר א'

שאלה 2.
-----

סעיף א.
התשובה המתבקשת: על פי עקרון ההכלה וההפרדה 48=1-3+5+7+15-21-35-105.
על טעות בסיכום הורדה בדרך כלל נקודה אחת, על שבושים אריתמטיים חמורים
יותר - שתיים עד חמש נקודות. כאשר מעמידים 104 במקום 105 בבסיס החישוב,
האריתמטיקה נעשית מעט יותר מסובכת. כאן הורדו בדרך כלל חמש נקודות על טעות
בחישוב. פתרון חליפי (לא נלמד בכיתה, אך מופיע בספר ומזכה במירב הנקודות)-
על פי נוסחת אוילר: 48=(3-1)(5-1)(7-1) .

סעיף ב.
הפתרון המלא המדויק נחלק לשניים:
1. נניח שבגרף אין מעגלים. כי אז הוא קשיר וחסר מעגלים ולפיכך עץ,
ידוע בעץ 1-|V|=|E| בסתירה לנתון ולכן יש בגרף לפחות מעגל אחד. (3 נק')

2. נניח לפחות שני מעגלים שונים. מהיותם שונים קיימת באחד מהם קשת
... בשני. נסיר קשת כזו מן הגרף. הקשירות לא נפגעה כי הקשת הוסרה ממעגל,
... השני נותר כשהיה. קיבלנו גרף קשיר ובו 1-|V|=|E|, כלומר עץ - המכיל
... סתירה ולפיכך אין יותר ממעגל אחד.
... פין ונסיר קשת של מעגל, הקשירות לא נפגעה ועל פי מספר הקשתות והקדקדים
גרף הנותר הוא עץ. נחזיר את הקשת שהוסרה. בעץ קיימת מסילה יחידה בין כל
קדקדים. בפרט בין קדקדי הקצה של הקשת הנ"ל. לכן הוספת הקשת יצרה מעגל
בלבד. (4 נק')

שגיאות נפוצות
---------------------

"כיון ש |E|=|V| וקשיר, זהו עץ שנוספה לו קשת" או - "נסיר קשת ונקבל עץ" ...
נכון, אבל דורש הוכחה - כיצד תישמר הקשירות כאשר תוסר קשת. לשם כך צריך ...
מעגל, אבל זה מה שיש להוכיח. (ה"קנס": שתיים או שלוש נק', על פי ניסוח ...
המדויק)

"נוסיף לעץ קשת ונקבל מעגל יחיד" נקבל כמובן מעגל אבל מדוע הוא יחיד? ...
... זה כשלעצמו לא זיכה בשום נקוד. הוא מיותר לאחר שקיום מעגל כבר הוכח, ...
... אינו תורם באמת להוכחת יחידות המעגל. את העובדה שזהו אכן עץ בתוספת ...
... יש להוכיח ואם הדבר נעשה ניתן על כך נקוד (2 נקודות אם זוהי כל ...
שובה).

כאשר כבר ידוע שיש מעגל - "נסיר קשת, הגרף הנותר הוא עץ-ללא מעגלים
... יש מעגל אחד בלבד." או- "אם יש שני מעגלים צריך להוריד שתי קשתות בדי
... אותם." דורש הוכחה. האם לא יתכן שלמספר מעגלים קשת משותפת אשר הסרתה
... כולם? באופן קיצוני יותר: "כדי לבטל x מעגלים צריך להסיר לפחות x
... - לא נכון! מספר המעגלים בגרף יכול להיות גדול (בהרבה) ממספר
... (הקנס: שתיים או שלוש נק')

"הוכחות" באינדוקציה: בדומה להוכחה שנתנה בכיתה על עצים "הוספת עלה
... בשלב האינדוקציה. לא טוב! האם הגרף מכיל תמיד גרף קטן יותר בעל
... תכונות? (לא!) האם תמיד קיים עלה? (שוב לא!) על "פתרון" כזה נתנו אפס
שלוש נקודות, על פי פרטי ה"הוכחה".

"נפנופי ידיים" למניהם המבוססים על שרטוטים כאלה ואחרים, על "רואים
..." ועל נתוחי מבנה הגרף ומעגליו. הנקוד בין אפס לשלוש נקודות, על פי
...טים.

87

19.2.93 -6-

מועד א'

מסמך ג'

שאלה 2 המשך

סעיף ג.

הפתרון באינדוקציה על מספר הקודקודים: נכון באופן ריק לגרף בעל קודקוד יחיד. בהנתן חלוקה כמבוקש עבור הגרף המתקבל מהסרת קדקד, נוסיף את הקדקד אל הקבוצה המכילה קצוות של לכל היותר מחצית הקשתות החלות בו. כך, גם בין הקשתות הנוספות, למחציתן לפחות קצה אחד בכל קבוצה.

שגיאות נפוצות (נקוד חלקי ניתן כאן רק לעיתים נדירות)

---

"עקרון שובך היונים" לא רלונטי! ודאי שבאחת הקבוצות לפחות מחצית הקדקדים, אך מדובר במחצית מספר <u>הקשתות</u>.

אינדוקציה על מספר <u>הקשתות</u>. אפשר לצאת מזה בכבוד, אך הדבר קשה ומחייב זהירות. נסיונות כאלה שנעשו היו בדרך כלל כושלים.

"הליכה על גבי הגרף" וחלוקת הקדקדים לסרוגין בין שתי הקבוצות. לעיתים תוך תוספת כללים כגון "הקדקד בדרגה הגבוהה ביותר בקבוצה אחת וכל שכניו בקבוצה השניה". לא עובד! נסה למשל בגרף שיש בו קדקד בדרגה 10 ולכל אחד מעשרת שכניו דרגה 9.

"הסרת קשת אחת מכל מעגל אי-זוגי" (עם או בלי שלוב הטכניקה הקודמת). כמה קשתות צריך להסיר ואיך לבחור אותן? כמה מעגלים אי-זוגיים יתכנו? (הרבה יותר ממספר הקשתות בגרף כולו!!)

הוכחה לעץ ומכאן מסקנה "כללית" כלשהי. לא יהולך! מספר הקשתות בעץ יכול להיות הרבה פחות ממחצית מספר הקשתות הכולל.

בבחינה לפני כמה שנים ניתן תרגיל דומה, קשה יותר: להוכיח שקיימת חלוקה כזו שבה לפחות מחצית מבין הקשתות החלות <u>בכל קדקד</u>, קצותיהן בקבוצות שונות. היו שמוש בתוצאה זו, או העתקה פתרונה, לגיטימיים, אך על העתקה משובשת, ואפילו שבוש קטן, ממנו משתמעת אי-הבנה יסודית, נתנה לכל היותר נקודה אחת.

19.2.93
מועד ב'
סמסטר א'

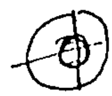


3 א. נשתמש בנוסחת polya's.

1. החבורה היא $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$.

2. תהי $\varphi : C_4 \to \mathbb{N}$ פונקציה הסופרת את מספרי נקודות השבת.

$\varphi(e) = \lambda^8$

$\varphi(a) = \lambda^2 \Rightarrow$ כי הריבוע הפנים באותו צבע וכל הריבועים החיצוניים בצבע זה 

$\varphi(a^2) = \lambda^2 \cdot \lambda^2$

$\varphi(a^3) = \lambda^2$

לכן לפי משפט פוליה מספר הצביעות הוא

$$\frac{\lambda^8 + \lambda^4 + 2\lambda^2}{4} = \frac{\sum_{g \in G} \varphi(g)}{|G|}$$

145

19.2.93

מועד א'

סמסטר א'



שוב לפי משפט Polya's

החבורה הגורמת היא $\{e,a,a^2,a^3\}\times\{e,b,b^2,b^3\} = C_4\times C_4$

$$\varphi(a^k\cdot b^m) = \varphi(a^k)\cdot\varphi(b^m)$$

$$\varphi(e) = 4\,x^4$$

$$\varphi(b) = \varphi(a) = x$$

$$\varphi(b^2) = \varphi(a^2) = x^2$$

$$\varphi(b^3) = \varphi(a^3) = x^{?}$$

לכן $$\sum_{g\in G}\frac{\varphi(g)}{|G|} = \frac{(x^4+2x+x^2)^2}{16}$$

(90)

19.2.93
מועד א'
סמסטר א'



## מתמטיקה בדידה - שאלה 4

להלן המרכיבים שצריכים להופיע בפתרון השאלה:

סעיף א:

1) היחס $\bar{R}$ מתאים לכל איבר a ששייך ל-A את קבוצת האיברים ש-a מתיחס אליהם ביחס R, ולכן זו פונקציה.
2) לא יתכן שזו תהיה פונקציה על מפני שלפי משפט קנטור מתקיים $|A|<|P(A)|$.

סעיף ב:

1) R יחס שקילות, ולכן הפונקציה $\bar{R}$ מתאימה לכל איבר a ששייך ל-A את מחלקת השקילות שלו.
2) כדי שהפונקציה $\bar{R}$ תהיה חד-חד-ערכיה צריך ששני איברים שונים לא יהיו שייכים לאותה מחלקה שקילות.
3) מכאן שהתנאי הנוסף הדרוש הוא: R צריך להיות יחס הזהות.

סעיף ג:

נסמן ב-G את קבוצת כל הפונקציות ההפיכות מ-N ל-N, וב-B את קבוצת כל הפונקציות מ-N ל-N.
1) ידוע ש- $|B|=c$. הקבוצה G היא תת-קבוצה של B ולכן $|G|\le c$.
2) צריך למצוא קבוצה D שעוצמתה c ( למשל $P(N)$ ), ולבנות בצורה מפורשת פונקציה חד-חד-ערכיה מ-D ל-G, וזה יוכיח ש- $|G|\ge c$. $f: P(N) \to N^N$ הפיכה
3) מכאן שעוצמתה של G היא c.

### הערות לגבי הניקוד:

סעיף א:

פתרון מלא של אחד החלקים של סעיף זה מזכה ב-8 מתוך 15 נקודות, או ב-4 מתוך 7 נקודות.

סעיף ב:

מי שכתב תשובה נכונה, אך לא הסביר איך הגיע אליה, קיבל ניקוד חלקי.

סעיף ג:

סעיף זה נבדק בקפדנות. תשובה נכונה בלי הסבר לא קיבלה ניקוד. מי שהראה פונקציה בלי שהסביר איך בונים אותה בצורה מפורשת קיבל ניקוד חלקי.
מי שהשתמש בשיטת האלכסון של קנטור כדי להוכיח שהקבוצה G אינה בת-מניה, ומתוך זה ש- $|G|\le c$ הסיק כי $|G|=c$ קיבל ניקוד חלקי, מאחר והוא הסתמך על השערת הרצף ( אסור להסתמך על השערה זו ).