

מועד <sup>מ</sup> חשני"ב 20.10.1992  
 מתמטיקה בדידה  
 פרופ' מ. טרסי

משך הבחינה שלוש שעות. מותר השמוש בכל חומר עזר. יש להשיב על כל השאלות.  
 הנקודות לסעיף בודד 15 נקודות, לשני סעיפים 22 ולשלושה 25. סדר הסעיפים  
 אינו מחייב, אך הם ערוכים בכל שאלה מן הקל אל הכבד ומומלץ לנסות  
 לפתור אותם לפי הסדר.

1. דיסקית עגולה, החופשית להסתובב במישור, מחולקת ל-N גזרות שוות, כאשר  
 $N=PQ$  הוא מכפלה של שני מספרים ראשוניים  $P$  ו- $Q$ .

- א. בכמה אופנים ניתן לצבוע את N הגזרות ב-N צבעים שונים, גזרה אחת  
 בדיוק בכל צבע?
- ב. בכמה אופנים ניתן לצבוע את הגזרות דלעיל חוץ שמוש באחד או יותר  
 מ-A צבעים? (החשיבה המבוקשת היא פולינום ב-A עם  $P$  ו- $Q$  כפרמטרים).
- ג. כמו ב' כאשר הדיסקית יכולה גם להחפז מצד לצד. שני צידי כל גזרה  
 נצבעים באותו צבע.

א. מצא בטוי סגור לאבר הכללי של הסדרה  $\{a_k\}$  המוגדרת על ידי:  
 $a_0 = a_1 = 0, a_{k+2} = a_{k+1} + a_k + 1$

ב. חשב את הפונקציה היוצרת המעריכית של הסדרה  $\{b_k\}$ ,  
 (הצג הפונקציה המבוקשת בטוי סגור).

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

ג. חשב את הפונקציה היוצרת הרגילה

כאשר  $b_k$  הוא מספר החלוקות השונות של  $k$  כדורים זהים לתוך  $N$  תאים  
 שונים, כאשר מספר הכדורים בתא הוא לכל היותר  $M$ . (אל  $M$  ו- $N$  המייחס  
 כאל קבועים).

3. הוכח או הפרך כל אחד מהטענות הבאים:

- א. כל עץ הוא גרף דו צדדי.
- ב. אחד של כל יוני עצים הוא גרף משורי. (אחד גרפים מתכצע על ידי אחד  
 קבוצות הקדקדים ואחד קבוצות הקשתות. הקבוצות אינן בהכרח זרות).
- ג. כל גרף משורי הוא אחד (ראה ההגדרה בסעיף ב') של שני גרפים  
 דו צדדיים.

4. זיווג הוא גרף שכל רכיב קשירות שלו הוא קשת יחידה. אחד גרפים  
 מוגדר בשאלה הקודמת.

א. מה מוכל לומר על רכיב קשירות בגרף שהוא איחוד של שני זיווגים,  
 שקבוצות הקשתות שלהן זרות?

ב. הראה שגרף כמותאר בסעיף א' ניתן להצגה כאיחוד של שני זיווגים,  
 שקבוצות הקשתות שלהן זרות ושעונת בגודלו (או הפרש של קשת אחת, כאשר  
 מספר הקשתות הכולל אינו זוגי).

הוכח כי גרף שדרגת כל קדקדיו קטנה מ-A הוא בעל צביעת קשתות תקינה  
 ב-A צבעים. בעלת מספר שווה של קשתות בכל צבע (או הפרש של קשת אחת, כאשר  
 מספר הקשתות אינו מתחלק ב-A).

613  
 0  
 (92)