ד. קומבינטוריקה סופית

ד.1 עקרונות בסיסיים

קומבינטוריקה סופית היא ענף של הקומבינטוריקה הכללית, שלמדנו בחלק הקודם. ענף זה מטפל בקבוצות סופיות ובעוצמות סופיות. בחלק זה נניח, אפוא (אלא אם נאמר במפורש אחרת), שהקבוצות A , B וכו', שאנו עוסקים בהן, הינן סופיות, ושהעוצמות שאנו עוסקים בהן הינן סופיות (אנו נשתמש לכן עבורן במשתנים כמו n , m , k וכו'). מובן שכל העקרונות הכלליים, שלמדנו בפרק הקודם לגבי קבוצות כלשהן, נכונים גם לגבי קבוצות סופיות (בפרט אלו של טבלה ג.7).

הייחוד של קבוצות סופיות הוא בנקודות הבאות:

(1) אם A ו- B סופיות ו- $|A| = |B|$, אז כל פונקציה ח.ח.ע. מ- A ל- B או פונקציה מ- A על B היא פונקצית שקילות. בפרט:

$$P(n, n) = E(n)$$

(נוסחה זו נכונה בעצם גם לעוצמות אינסופיות, אך ההוכחה חורגת מקורס זה.)

(2) אי-שוויונות חלשים אפשר להכליל לאי-שוויונות חזקים. למשל:

$$m < n \wedge k \leq \ell \Rightarrow m + k < n + \ell$$

(3) פעולת החיסור, $b - a$, מוגדרת בכל מקרה ש- $a \leq b$, בפרט מתקיים ש-

$$|B - A| = |B| - |A|$$

כאשר $B \subseteq A$.

(4) גם בחילוק אפשר להשתמש. מכל שוויון מהצורה $a = b \cdot c$ נובע ש-

$$b = \frac{a}{c}$$

(כאשר $c \neq 0$).

טבלה מס' ד.1 מסכמת את העקרונות הקומבינטוריים הבסיסיים, שהינם מיוחדים לקומבינטוריקה סופית. ביחד, טבלאות ג.7 ו- ד.1 מספקות את כל העקרונות הבסיסיים של הקומבינטוריקה הסופית. כדאי לשים לב, שכמעט כל העקרונות בטבלה ד.1 קשורים בחיסור ובחילוק!

טבלה ד.1:
עקרונות בסיסיים המיוחדים לקומבינטוריקה סופית

(1)	(i)	$\lvert A-B\rvert = \lvert A\rvert - \lvert A\cap B\rvert$
	(ii)	אם $B\subseteq A$ אז $\lvert A-B\rvert = \lvert A\rvert - \lvert B\rvert$
	(iii)	$\lvert A\cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A\cap B\rvert$
(2)		אם R יחס שקילות על A ו- $\lvert X\rvert = n$ לכל $X\in A/R$ אז $\lvert A/R\rvert = \frac{\lvert A\rvert}{n}$
(3)		$p(n,n)=E(n)=n!$
(4)		$P(n,k)=\begin{cases} 0 & n<k \\ \frac{n!}{(n-k)!} & n\geq k \end{cases}$
(5)		$C(n,k)=\begin{cases} 0 & n<k \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} & n\geq k \end{cases}$
(6)		$n>0 \Rightarrow S(n,k)=C(n+k-1,k)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
(7)		נניח: $\lvert B\rvert = \lvert A\rvert = n$, $\{A_1,\dots,A_\ell\}$ פירוק של A , $\lvert A_i\rvert = q_i$ לכל $1\leq i\leq \ell$, ו- $R=\{\langle f,g\rangle \in (\mathrm{Eq}(A,B))^2 \mid \forall x\in B \forall i\in\{1,\dots,\ell\}. f(x)\in A_i \Leftrightarrow g(x)\in A_i\}$ אז $\left\lvert \mathrm{Eq}(A,B)/R \right\rvert = \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_\ell!}$

לרוב העקרונות המופיעים בטבלאות ג.7 ו- ד.1 מקובל (ועוזר) לתת ניסוחים אינטואיטיביים במונחים של מספר האפשרויות "לעשות" משהו מסוים (בדרך-כלל "לבחור" משהו):

(א) העיקרון ש- $\left|\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ פירושו, שאם אפשר לפצל בעיית בחירה מסוימת למספר n של אפשרויות, ובאפשרות מס' i יש k_i בחירות אפשרויות, אז מספר הבחירות המבוקש הוא $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ (זאת בתנאי, שאין חפיפה בין שום שתיים מהאפשרויות, אליהן פוצלה הבעיה המקורית).

(ב) בעיקרון ש- $\left|\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right| = n \cdot k$, אם $|A_i| = k$ לכל $1 \le i \le n$ (זהו עיקרון (2)(ב) מטבלה ג.7 בגרסתו למקרה הסופי), משתמשים בדרך-כלל באופן הבא: מפצלים בעיית בחירה מסוימת לבעיה של ביצוע שתי בחירות עוקבות, כאשר מה שנבחר בבחירה השנייה תלוי במה שנבחר בבחירה הראשונה. אם יש n אפשרויות לבחירה הראשונה, ועל כל אחת מהן יש k אפשרויות איך לבצע את הבחירה השנייה, אז סך-הכל מספר האפשרויות לביצוע שתי הבחירות הוא $n \cdot k$.

(ג) העקרונות ב- (3) של טבלה ג.7 הם עקרונות "שובך היונים", וכבר עמדנו על כך בפרק הקודם.

(ד) עיקרון (1)(ii) של טבלה ד.1 קובע אינטואיטיבית, שאם יש לנו מספר אפשרויות n לעשות דבר מסוים, ו- k מתוכן אינן "טובות" מבחינה מסוימת, אז מספר ה"טובות" הוא $n - k$.

(ה) לפונקציית שקילות מקבוצה סופית על עצמה קוראים, בדרך-כלל, "תמורה" של אותה קבוצה. $E(n)$ היא, אפוא, מספר התמורות של קבוצה בת n איברים. $E(n)$ הוא גם מספר הסידורים המלאים האפשריים של קבוצה A בת n איברים ("סידור" כזה, הקובע מי ראשון, מי שני, מי שלישי וכו', אינו אלא פונקציה מ- $\{1, \ldots, n\}$ על A).

(ו) ל- n^k, $P(n, k)$ ו- $C(n, k)$, אותם הגדרנו בפרק ג.6 לכל שתי עוצמות, יש מספר אינטרפרטציות אינטואיטיביות, המסוכמות בטבלה מס' ד.2. כך השאלה "כמה טורים אפשר למלא בטוטו?" היא דוגמה ל"בחירה" של 15 עצמים מתוך הקבוצה

$\{1, 2, X\}$ עם חשיבות לסדר ועם חזרות (ולכן מספר הטורים הוא 3^{15}. למעשה, כל טור הינו פונקציה מקבוצת המשחקים בה מדובר באותו שבוע אל הקבוצה $\{1, 2, X\}$). דירוג למצעד פזמונים בו יש לשלוח, נאמר, דירוג של חמישה פזמונים נבחרים מתוך 25 פזמונים אפשריים, הוא דוגמה לבעיה בה התשובה היא $p(25, 5)$, בעוד שהבעיה של בחירת חמישייה ראשונה למשחק כדורסל מתוך סגל של שנים-עשר שחקנים (ניתן לקרוא לה "בעיית מאמן הכדורסל") היא דוגמה לבעיה, שבה התשובה היא $C(12, 5)$ (או $\binom{12}{5}$, כמו שמקובל יותר לסמן במקרה הסופי).

טבלה ד.2:
הגדרות אינטואיטיביות

n^k	(1)	מספר האפשרויות "לבחור" k עצמים מתוך n, *עם* חזרות ו*עם* חשיבות לסדר.
	(2)	מספר האפשרויות לפזר k כדורים *שונים* ב- n תאים.
$P(n, k)$	(1)	מספר האפשרויות "לבחור" k עצמים מתוך n, *בלי* חזרות ו*עם* חשיבות לסדר.
	(2)	מספר האפשרויות לפזר k כדורים *שונים* ב- n תאים, לכל היותר כדור אחד בתא.
$C(n, k)$	(1)	מספר האפשרויות "לבחור" k עצמים מתוך n, *בלי* חזרות ו*בלי* חשיבות לסדר.
	(2)	מספר האפשרויות לפזר k כדורים *זהים* ב- n תאים, לכל היותר כדור אחד בתא.
$S(n, k)$	(1)	מספר האפשרויות "לבחור" k עצמים מתוך n, *עם* חזרות ו*בלי* חשיבות לסדר.
	(2)	מספר האפשרויות לפזר k כדורים *זהים* ב- n תאים (בלי הגבלות).
	(3)	מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$
$E(n)$	(1)	מספר התמורות של קבוצה בת n איברים.
	(2)	מספר הסידורים המלאים של קבוצה בת n איברים.

(ז) בטבלה מס' ד.1 מופיעה פעולה נוספת, S, אותה טרם הגדרנו. אינטואיטיבית היא משלימה את המשבצת החסרה במיון הבעיות של בחירת k עצמים מתוך n, לפי הקריטריונים של עם/בלי חזרות ועם/בלי חשיבות לסדר:

	בלי חזרות	עם חזרות
הסדר חשוב	$P(n, k)$	n^k
הסדר לא חשוב	$C(n, k)$	$S(n, k)$

דוגמה לבעיה כזו היא הבעיה הבאה: בכמה אופנים ניתן לחלק שמונה-עשרה משרות של סגן ראש-ממשלה בין ארבע מפלגות א', ב', ג', ד' (כולל האפשרות שמפלגה אחת תקבל את כל המשרות)? כאן צריך "לבחור" שמונה-עשר עצמים מתוך הקבוצה {"ד", "ג", "ב", "א"}, והתשובה לכן $S(4, 18)$.

הבה נגדיר את $S(n, k)$ באופן פורמלי:

הגדרה:

$$S(n,k) = \left|\left\{ f \in A \to \mathbf{N} \,\middle|\, \sum_{x \in A} f(x) = k \right\}\right|$$

כאשר A היא קבוצה שעוצמתה n.

הסבר:
הגדרנו כאן באופן מדויק מה פירוש "לבחור" k עצמים מתוך הקבוצה A עם אפשרות לחזרה ובלי חשיבות לסדר. לכל $x \in A$, $f(x)$ היא מספר הפעמים שהעצם x "נבחר", והדרישה $\sum_{x \in A} f(x) = k$ פירושה, שאכן סך-הכל "נבחרו" k איברים מ- A. $S(n, k)$ הוא מספר הפונקציות האלה.

הערות:

(1) לפונקציות $f: A \to \mathbf{N}$ קוראים *מולטי תת-קבוצות* של A (השם "bag" מקובל אף הוא במדעי המחשב). פונקציות כאלה הן הכללה של הפונקציות האופייניות χ_B^A של תת-קבוצות של A (השייכות, כזכור, ל- $A \to \{0, 1\}$).

(2) אם ניקח $A = \{1, \ldots, n\}$ ונסמן את $f(i)$ ב- x_i, נקבל ש- $S(n, k)$ הוא מספר הפתרונות *במספרים טבעיים* של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

הבחנה זו יכולה לשמש לצורך הגדרה אלטרנטיבית של $S(n, k)$.

(3) כמו שקורה תמיד בעקבות (או לפני) הגדרה כמו זו של $S(n, k)$, עלינו להוכיח כאן:

משפט:

הפעולה S על עוצמות סופיות מוגדרת היטב. כלומר, אם $|A| = |A'|$ אז:

$$\left|\left\{ f \in A \to \mathbf{N} \,\middle|\, \sum_{x \in A} f(x) = k \right\}\right| = \left|\left\{ f \in A' \to \mathbf{N} \,\middle|\, \sum_{x \in A} f(x) = k \right\}\right|$$

את ההוכחה נשאיר לקורא.

נעבור להוכחת העקרונות של טבלה ד.1.

(1) (i) לכל A, B:
$$A = (A - B) \uplus (A \cap B)$$
$$\Rightarrow \quad |A| = |A - B| + |A \cap B|$$
$$\Rightarrow \quad |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

(המעבר מהשורה השנייה לשלישית אפשרי רק בקבוצות סופיות!).

(ii) אם $B \subseteq A$ אז $A \cap B = B$, ולכן זהו מקרה פרטי של (i).

(iii) לכל A, B:
$$A \cup B = (A - B) \uplus B$$
$$\Rightarrow \quad |A \cup B| = |A - B| + |B|$$
$$= (|A| - |A \cap B|) + |B| \quad \text{(i) לפי}$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$

(2) כזכור, אם R יחס שקילות על A, אז A/R היא *פירוק* של A, כלומר: אם $A/R = \{X_1, \ldots, X_\ell\}$, אז $A = \biguplus_{i=1}^{\ell} X_i$. עתה, אם ידוע ש- $|X_i| = n$ לכל $1 \le i \le \ell$,

אז לפי עיקרון הכפל ((2)(ב) של טבלה ג.7) $|A| = n \cdot \ell = n \cdot |A/R|$, לכן $|A/R| = \frac{|A|}{n}$.

הערה:

שוב, גם כאן כל הצעדים, *פרט לאחרון* (החילוק), נכונים גם במקרה ש- n ו- ℓ עוצמות אינסופיות.

(3) נוכיח ש- $E(n) = n!$ באינדוקציה על n. נזכיר שפעולת העצרת מוגדרת באופן הבא: $0! = 1$ ו- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, כש- $n \geq 1$. התכונה היסודית של פעולת העצרת היא ש-

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{ל-} \quad n \geq 1 \quad (\text{או} \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1))$$

שלב הבסיס: יש בדיוק פונקציית שקילות אחת מ- $\varnothing$ ל- $\varnothing$: $\varnothing$. לכן:

$$E(0) = |\mathrm{Eq}(\varnothing,\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 0!$$

שלב המעבר: נניח $E(n) = n!$. נוכיח $E(n+1) = (n+1)!$.
ההנחה ש- $E(n) = n!$ פירושה, שלכל שתי קבוצות, A ו- B, כך ש- $|A| = |B| = n$ מתקיים ש- $|\mathrm{Eq}(A,B)| = n!$.

עתה, לפי הגדרה:

$$E(n+1) = |\mathrm{Eq}(\{0, 1, \ldots, n\}, \{0, 1, \ldots, n\})|$$

נגדיר עתה ל- $0 \leq i \leq n$:

$$E_i = \{f \in \mathrm{Eq}(\{0, 1, \ldots, n\}, \{0, 1, \ldots, n\}) \mid f(n) = i\}$$

קל לראות שלכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$E_i \sim \mathrm{Eq}(\{0, 1, \ldots, i-1, \; i+1, \ldots, n\}, \{0, 1, \ldots, n-1\}) \quad (\text{למה?})$$

(כלומר: $E_i \sim \mathrm{Eq}(\{0, 1, \ldots, n\} - \{i\}, \{0, 1, \ldots, n-1\})$).
לכן, לפי הנחת האינדוקציה, $|E_i| = n!$.

מזה ש- $|E_i| = n!$ לכל $0 \le i \le n$ וש- $A = \biguplus_{i=0}^{n} E_i$, נובע ש-

$$|A| = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$$

הערה:

מה שכתבנו אינו אלא כתיבה בצורה מדויקת של השיקול הלא פורמלי הבא: כדי לבנות פונקציית שקילות f מ- $\{0, 1, ..., n\}$ על $\{0, 1, ..., n\}$, עלינו לבחור תחילה את הערך של $f(n)$, וזאת נוכל לעשות ב- $(n + 1)$ אפשרויות. אחר-כך עלינו ליצור פונקציית שקילות בין $\{0, 1, ..., n - 1\}$ לבין קבוצת הערכים שטרם נבחרו (שמספר איבריה n). זאת נוכל לעשות (לפי הנחת האינדוקציה) ב- $n!$ אפשרויות. סך-הכל יש לנו $(n + 1) \cdot n!$ פונקציות שקילות מ- $\{0, 1, ..., n\}$ על עצמה.

בבית-ספר תיכון לא מנסחים זאת, בדרך-כלל, אפילו כך, וכביכול לא משתמשים כלל באינדוקציה. אומרים שם משהו כזה: "כדי לסדר קבוצה A בת n איברים, נבחר תחילה מי יהיה במקום הראשון: לכך יש n אפשרויות. אחר-כך מי יהיה במקום השני – לכך נותרו $n - 1$ אפשרויות. אחר-כך מי יהיה במקום השלישי – $n - 2$ אפשרויות, וכן הלאה, עד שנגיע למקום ה- n-י, שעבורו תישאר אפשרות אחת בלבד. סך-הכל נקבל $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$ אפשרויות, כלומר: $n!$.

יש להבין, אבל, שהן השימוש בצירוף המלים "וכן הלאה" והן בשלוש הנקודות "...", משמעותם האמיתית היא אחת: הוכחה ***באינדוקציה*** (וכמובן "סידור" הוא פונקציה מ- $\{1, ..., n\}$ ל- A, "המקום הראשון" פירושו $f(1)$, וכדומה). תרגום השיקול האינטואיטיבי מבית-הספר התיכון להוכחה במונחים מדויקים נותן בדיוק את מה שעשינו כאן (או דבר דומה מאוד).

(4) את הנוסחה עבור $P(n, k)$ אפשר להוכיח בצורה דומה לזו שבה הוכחנו את הנוסחה עבור E: באינדוקציה על n (למעשה, זה מה שעושים, אם כי לא אומרים זאת, בבית-ספר תיכון). יש, אבל, לשים לב, שהאינדוקציה כאן הינה מסובכת יותר מאשר במקרה של E: מה שאנו מוכיחים באינדוקציה על n הוא, שהנוסחה עבור $P(n, k)$ נכונה עבור *כל* k .

בשלב הבסיס אנו מוכיחים ש:

$$P(0, 0) = 1 \ \wedge \ \forall k \in \mathbf{N}^+ .\ P(0, k) = 0$$

בשלב המעבר אנו מוכיחים ש:

אם $\forall k \in \mathbf{N}.\ (k > n \ \Rightarrow \ P(n, k) = 0) \ \wedge \ (k \le n \ \Rightarrow \ P(n, k) = n!/(n - k)!)$

אז

$$\forall k \in \mathbf{N}.\ (k > n+1 \ \Rightarrow\ P(n+1, k) = 0) \ \wedge$$
$$(k \le n+1 \ \Rightarrow\ P(n+1, k) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!})$$

כדי לגוון וכדי להדגים עקרונות אחרים, נוכיח כאן את (4) בדרך אחרת. נסתמך על כך ש- $P(n, k) = |\mathrm{In}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, k\})|$.

ברור לכן, שאם $n < k$, אז קבוצה זו היא ריקה ולכן $P(n, k) = 0$.

נניח אפוא, ש- $k \le n$. נסמן $A = \{1, \ldots, k\}$, $B = \{1, \ldots, n\}$. אז $A \subseteq B$, ומתקיים:

$$(*) \qquad \mathrm{Eq}(B, B) = \biguplus_{f \in \mathrm{In}(B, A)} \{F \in \mathrm{Eq}(B, B) \,|\, F/A = f\}$$

(זאת, כיוון שאם $F \in \mathrm{Eq}(B,B)$ אז $F/A \in \mathrm{In}(B,A)$, וברור שהאיחוד זר, כי אם $F_1/A = f_1$, $F_2/A = f_2$ ו- $f_1 \neq f_2$, אז גם $F_1 \neq F_2$).

עתה, כמה איברים יש, בהינתן $f \in \mathrm{In}(B, A)$, בקבוצה $\{F \in \mathrm{Eq}(B,B) \mid F/A = f\}$? הערכים של כל פונקציה F בקבוצה זו עבור $1, 2, \ldots, k$ ניתנים על-ידי f.
אינטואיטיבית, מה שנשאר עוד לעשות כדי להגדיר F כזאת, הוא להחליט על ערכיה עבור $k+1, k+2, \ldots, n$, ואת אלה צריכים לבחור מתוך $B - \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$ (כלומר, מתוך $B - f(A)$). ברור לכן, שלכל $f \in \mathrm{In}(B, A)$ מתקיים ש:

$$\{F \in \mathrm{Eq}(B,B) \mid F/A = f\} \sim \mathrm{Eq}(B - f(A), B - A)$$

(פורמלית, פונקציית השקילות כאן היא:

$$\lambda G \in \{F \in \mathrm{Eq}(B,B) \mid F/A = f\}.\ G/(B - A)$$

ויש להשלים את הפרטים הנחוצים כדי להראות, שאכן זו פונקציית שקילות בין שתי הקבוצות הנ"ל).

עתה, ב- $B - A$ ו- $B - f(A)$ יש $n - k$ איברים. לכן:

$$|\mathrm{Eq}(B - f(A), B - A)| = E(n - k) = (n - k)!$$

ומכאן שלכל $f \in \mathrm{In}(B, A)$, $\quad |\{F \in \mathrm{Eq}(B,B) \mid F/A = f\}| = (n - k)!$

מ- (*) למעלה נובע אפוא:

$$|E(B,B)| = |\mathrm{In}(B, A)| \cdot (n-k)!$$

כלומר:

$$n! = P(n, k) \cdot (n-k)!$$

ולכן

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(5) בפרק הקודם (טבלה ג.7 (5)(ג)) הוכחנו ש:

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot E(k)$$

כיוון ש- $E(k) \geq 1$ לכל k, נובע מזה:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{E(k)}$$

ולכן (5) היא מסקנה מיידית מ- (3) ומ- (4).

לכל העקרונות עד כה ניתנו הוכחות מדויקות מאוד, כולם במונחים שלמדנו בתורת הקבוצות. מאחורי כל הוכחה כזו עומד, למעשה, רעיון אינטואיטיבי פשוט. לאחר שמתרגלים ומבינים כיצד מתרגמים רעיונות אינטואיטיביים כאלה להוכחות מלאות ומדויקות, מקובל, כדי למנוע סרבול יתר, להסתפק בהצגת ההסברים האינטואיטיביים (בלי לתרגמם להוכחות מן הסוג שהבאנו עד עתה). גם אנו נתחיל אפוא לנסח לעתים קרובות שיקולים קומבינטוריים באופן פחות פורמלי ונוקשה מכפי שעשינו עד עתה. אולם, יש לזכור תמיד, שהוכחות מלאות ומדויקות הן רק כאלה, המסתמכות במפורש על מושגי תורת הקבוצות ועל העקרונות המדויקים שלמדנו.

---

(6) במקרים רבים מוכיחים זהויות קומבינטוריות על-ידי שפותרים בעיה מסוימת בשתי דרכים שונות ומקבלים כך נוסחאות שונות לפתרונה. העובדה שמדובר ב*אותה* בעיה, גוררת את זהות שתי הנוסחאות. נדגים צורת הוכחה זו במקרה של הנוסחה עבור $S(n, k)$. הבעיה שנפתור בשתי דרכים תהיה: "בכמה אופנים ניתן להגיע במישור מהנקודה $(1,0)$ לנקודה (n, k) (כאשר $n \geq 1$, $k \geq 0$) במסלול שמורכב מצעדים באורך 1 כלפי מעלה או בכיוון ימינה?".

פתרון ראשון:

נייצג כל מסלול על-ידי n-יה $<x_1, \ldots, x_n> \in \mathbf{N}^n$, שמשמעותה: המסלול מתחיל ב- x_1 צעדים כלפי מעלה $(0 \le x_1 \le k)$, אחר-כך צעד ימינה, אחר- כך x_2 צעדים כלפי מעלה $(0 \le x_2 \le k)$, אחר-כך צעד ימינה, וכן הלאה. סך-הכל יש לנו $n - 1$ צעדים ימינה ו- $\sum_{i=1}^{n} x_i$ צעדים כלפי מעלה. ה- n-יה מתארת אפוא מסלול מותר אם"ם $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$. ברור אפוא, שמספר המסלולים המותרים שווה למספר ה-n-יות מסוג זה, ומספר זה הינו $S(n, k)$, לפי אחת ההגדרות של $S(n, k)$.

פתרון שני:

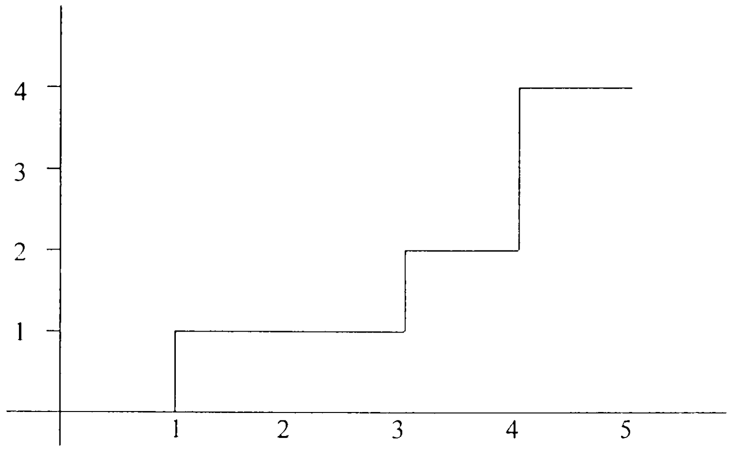
נייצג כל מסלול על-ידי סדרה באורך $k + n - 1$ של האותיות "U" ו- "R", שבה "U" מופיע k פעמים ו- "R" מופיע $n - 1$ פעמים. הופעת "U" פירושה: "עשה צעד אחד כלפי מעלה" (Up), והופעת "R" פירושה: "עשה צעד אחד ימינה" (Right). סך-הכל אנו עושים $n - 1$ צעדים ימינה (מ- 1 ועד n) ו- k צעדים כלפי מעלה (מ- 0 עד k).

עתה, כדי ליצור סדרה כזו עלינו לבחור את k המקומות בהם נכתוב "U" (בשאר ייכתב "R"). זאת נוכל לעשות ב- $C(k + n - 1, k)$ דרכים. לכן, מספר המסלולים הוא $C(n + k - 1, k)$.

מהעובדה, ששני הפתרונות נכונים, אנו מקבלים: $S(n, k) = C(n + k - 1, k)$.

ציור 3 מדגים שני תיאורים קונקרטיים של אותו מסלול במקרה בו $k = 4$, $n = 5$.

ציור 3: דוגמה להוכחת הנוסחה $S(n, k)$



תיאור מסלול, שיטה א': $<1, 0, 1, 2, 0>$

תיאור מסלול, שיטה ב': $<U, R, R, U, R, U, U, R>$

הנה דוגמה נוספת לשיטת ההוכחה של זהויות קומבינטוריות, שהפעלנו בהוכחת $S(n, k)$:

בעיה:

מקבוצה של n סטודנטים יש לבחור משלחת לראש החוג, שתכלול שני יושבי-ראש. כמה אפשרויות יש להרכיב את המשלחת?

פתרון א':

את יושבי הראש אפשר לבחור ב- $\binom{n}{2}$ דרכים.* על כל אחת מהן אפשר לבחור את שאר חברי המשלחת ב- 2^{n-2} דרכים (כי כל קבוצה חלקית של $n-2$ הסטודנטים הנותרים אפשרית). סך-הכל יש לכן $\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}$.

פתרון ב':

נסמן ב- A_k את מספר המשלחות שיש בהן בדיוק k סטודנטים $(2 \le k \le n)$. כדי להרכיב משלחת כזו, עלינו לבחור תחילה את k חבריה. זאת נוכל לעשות ב- $\binom{n}{k}$ דרכים. אחר-כך עלינו לבחור את שני יושבי-הראש שלה, ונעשה זאת ב- $\binom{k}{2}$ דרכים. מכאן ש- $|A_k| = \binom{n}{k}\cdot\binom{k}{2}$. קבוצת המשלחות האפשריות היא $\biguplus_{k=2}^{n} A_k$,

לכן מספרן הוא $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{2}$.

כיוון ששני הפתרונות נכונים, אנו מקבלים את הזהות:

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{2}=\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}$$

או:

$$\sum_{k=2}^{n}k\cdot(k-1)\cdot\binom{n}{k}=n(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

---

* מעתה נשתמש, בדרך-כלל, בסימן $\binom{n}{k}$ במקום $C(n, k)$. סימון זה מקובל יותר כשמדובר בקבוצות סופיות.

נעבור לבסוף לעיקרון (7) – העיקרון האחרון בטבלה ד.1. כיוון שניסוח העיקרון מסובך במידת-מה, נקדים להוכחתו דוגמה, שתבהיר למה הכוונה.

בעיה:

בכמה אופנים ניתן לסדר קבוצה של 5 כדורים אדומים, 4 שחורים, 3 ירוקים ו- 4 צהובים?

תשובה:

בקבוצה שבה עסקנו יש 16 כדורים. עקרונית, התשובה היא פשוט !16. ברם, "לא לכך התכוון המשורר". השואל כאן אינו רוצה להבדיל, למשל, בין שני סידורים, שכל ההבדל ביניהם הוא, שבאחד כדור צהוב א' הוא הראשון, וכדור צהוב ב' הוא השני, בעוד בשני המצב הפוך. אומנם, שני הסידורים אינם זהים באמת (על כדור צהוב א' יש אולי שריטה מיקרוסקופית, בעוד לכדור צהוב ב' אין שריטה כזו), אבל אנו איננו רוצים, בדרך-כלל, להבדיל ביניהם. לצרכינו (ברוב המקרים) הם *שקולים*. כללית, בבעיה מסוג זה אנו רוצים לזהות (אלא אם כן נאמר אחרת) כל שני סידורים, שאי-אפשר להבחין ביניהם לפי צבעי הכדורים.

המובן המתמטי של אמירה מהסוג של "אנו מזהים שני עצמים של קבוצה E בעלי תכונה מסוימת" בהקשר של בעיית ספירה מסוימת הוא, שאנו מגדירים יחס שקילות מסוים על E, ומה שאנו רוצים לדעת הוא את *מספר מחלקות השקילות* של E לפי יחס זה, לא את מספר איברי E (שני איברים באותה מחלקת שקילות הם "אותו דבר" לגבינו). בדוגמה שלפנינו, הקבוצה E היא אוסף הסידורים של 16 הכדורים (כלומר: קבוצת פונקציות השקילות בין $B = \{1, \ldots, 16\}$ ובין A-קבוצת הכדורים). שני הסידורים הם שקולים לגבינו אם בכל מקום סידורי הם שמים כדורים בעלי צבע זהה. זהו בדיוק מקרה מהסוג, שעיקרון (7) של ד.1 מדבר עליו: A כאן היא קבוצת הכדורים. A_1 – היא קבוצת הכדורים האדומים, A_2 – קבוצת הכדורים השחורים, A_3 – קבוצת הכדורים הירוקים ו- A_4 – קבוצת הכדורים הצהובים. מתקיים אכן, ש- $A = \biguplus_{i=1}^{4} A_i$.

כמו כן, בבעיה זו: $n = 16$, $\ell = 4$, $q_1 = 5$, $q_2 = 4$, $q_3 = 3$ ו- $q_4 = 4$. לפי עיקרון (7), התשובה לשאלה היא אפוא $\frac{16!}{5!4!3!4!}$.

הוכחת (7):

כיוון ש- $n = |B| = |A|$, הרי ב- $\mathrm{Eq}(A,B)$ יש $E(n) = n!$. קל לברר, שאכן היחס R הוא יחס שקילות על $\mathrm{Eq}(A,B)$. נראה, שבכל מחלקת שקילות של R יש $q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_\ell!$ איברים. מזה ומעיקרון (2) ינבע (7) באופן מיידי.

אינטואיטיבית, הסיבה לכך שבכל מחלקת שקילות יש $q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_\ell!$ איברים ברורה: נניח $B = \{1, \ldots, n\}$, X מחלקת שקילות ו- $X = [f]_R$. f היא במקרה זה סידור של איברי A , ופונקציה g היא סידור שקול (כלומר $g \in [f]_R$), אם"ם היא מתקבלת מהסידור f על-ידי שעושים פרמוטציה (תמורה) כלשהי בין איברי A_1, פרמוטציה של איברי A_2 , וכן הלאה. מספר הפרמוטציות של איברי סוג i הוא $q_i!$, וסך-הכל נוכל לקבל כך $q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_\ell!$ סידורים שקולים ל- f. מה שנכתוב עתה הוא פשוט ניסוח מדויק של שיקול אינטואיטיבי זה.

הוכחת (7) לפי העקרונות הבסיסיים של קומבינטוריקה כללית:

כיוון ש- $n = |B| = |A|$, הרי: $|\mathrm{Eq}(A,B)| = E(n) = n!$.

יהי $X \in \mathrm{Eq}(A,B)/R$. אז $X = [f]_R$ לאיזה $f \in \mathrm{Eq}(A,B)$.

נגדיר $F:\mathrm{Eq}(A_1,A_1)\times\ldots\times\mathrm{Eq}(A_\ell,A_\ell)\to X$ על-ידי:

$$F(g_1,\ldots,g_\ell) = \lambda y \in B.\begin{cases} g_1(f(y)) & f(y)\in A_1 \\ g_2(f(y)) & f(y)\in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_\ell(f(y)) & f(y)\in A_\ell \end{cases}$$

F מוגדרת היטב, כיוון ש- $\{A_1,\ldots,A_\ell\}$ פירוק של A .

קל לברר שלכל $<g_1, \ldots, g_n>$ בתחום, $F(g_1,\ldots,g_\ell)$ אכן פונקצית שקילות מ- B על A (כלומר $F(g_1,\ldots,g_\ell)\in\mathrm{Eq}(A,B)$). מהגדרת R נובע גם מיידית, ש- $F(g_1,\ldots,g_\ell)Rf$, דהיינו $F(g_1,\ldots,g_\ell)\in[f]_R = X$.

לבסוף, F עצמה היא פונקצית שקילות מ- $\mathrm{Eq}(A_1,A_1)\times\ldots\times\mathrm{Eq}(A_\ell,A_\ell)$ על X, כי לא קשה להראות ש- $\lambda g\in X.\langle g\circ f^{-1}/A_1,\ g\circ f^{-1}/A_2,\ldots,\ g\circ f^{-1}/A_\ell\rangle$ היא פונקציה הפוכה (הפרטים – תרגיל).

מכל זה נובע, שלכל $X \in \mathrm{Eq}(A,B)/R$ מתקיים:

$$|X| = |\mathrm{Eq}(A_1,A_1)\times\ldots\times\mathrm{Eq}(A_\ell,A_\ell)|$$

$$\Rightarrow \qquad |X| = q_1!\cdot q_2!\cdot\ \ldots\ \cdot q_\ell!$$

מכאן

$$|\mathrm{Eq}(A,B)| = |\mathrm{Eq}(A,B)/R|\cdot q_1!\cdot q_2!\cdot\ \ldots\ \cdot q_\ell!$$

ולכן

$$|\mathrm{Eq}(A,B)/R| = \frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ \ldots\ \cdot q_\ell!}$$

הנה דוגמה נוספת לשימוש בעיקרון (7):
נניח שיש לחלק קבוצה B של 20 אנשים ל- 4 קבוצות, שלכל אחת מהן משימה אחרת. בקבוצה הראשונה צריכים להיות 7 אנשים, בשנייה 4, בשלישית 5 וברביעית 4. מהו מספר החלוקות האפשרי?

תשובה:
נבצע את החלוקה כך: נסדר את עשרים האנשים בשורה. שבעת הראשונים יהיו בקבוצה א׳, ארבעת הבאים יהיו בקבוצה ב׳, וכן הלאה. לרוע המזל, ברור ששני סידורים שונים יכולים לתת אותה חלוקה. ניתן אבל לראות כל סידור כפונקציה מ- B אל $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$. אם ניקח $A_1 = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $A_2 = \{8, 9, 10, 11\}$, $A_3 = \{12, \ldots, 16\}$ ו- $A_4 = \{17, \ldots, 20\}$, אז שני ה"סידורים", f ו- g , הם שקולים, אם $\forall x \in B\ \forall 1 \le i \le 4\quad f(x) \in A_i \iff g(x) \in A_i$. לכן עיקרון (7) ישים ומספר האפשרויות הוא $\frac{20!}{7!4!5!4!}$.

כאשר אין חשיבות לסדר בין חלקי קבוצה, אלא רק צריך לבצע חלוקה, אז יש לעשות זיהויים נוספים בתוך קבוצת החלוקות בהן *יש* חשיבות לסדר (כלומר, יש להגדיר יחס שקילות מתאים עליה ולהשתמש בעיקרון (2) בטבלה ד.1). העיקרון הכללי הוא, שאם $|A| = n$, ורוצים לחלק את A ל- k_1 קבוצות עם n_1 איברים, k_2 קבוצות עם n_2 איברים, ..., k_ℓ קבוצות עם n_ℓ איברים (כש- $n = \sum_{i=1}^{\ell} k_i n_i$), אז מספר האפשרויות הוא:

$$\frac{n!}{k_1!\cdot(n_1!)^{k_1}\cdot k_2!\cdot(n_2!)^{k_2}\cdot\ldots\cdot k_\ell!\cdot(n_\ell!)^{k_\ell}}$$

ד.2 עיקרון ההכלה וההפרדה

מציאת מספר האיברים ב- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ כשהאיחוד אינו זר, וב- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, אינה דבר פשוט.

בפרק הקודם ראינו נוסחה, שאפשר להיעזר בה עבור המקרה $n = 2$:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

בפרק זה נכליל נוסחה זו ל- n טבעי כלשהו. ההכללה נקראת עיקרון ההכלה וההפרדה (Inclusion-Exclusion Principle, ובקיצור In-Ex).

עיקרון ההכלה וההפרדה, נוסח א':

נניח $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. נסמן $E_n = P(\{1, 2, \ldots, n\}) - \{\varnothing\}$. אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{X \in E_n} (-1)^{|X|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right|$$

למרות שהניסוח הזה הוא צלול ובהיר כבדולח, הבה נדגים בכל זאת (רק ליתר ביטחון...) את מה שכתוב פה עבור המקרים $n = 2$ ו- $n = 3$:

(א) כש- $n = 2$ אז:

$$E_2 = P(\{1,2\}) - \{\varnothing\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} - \{\varnothing\}$$
$$= \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

לכן:

$$\sum_{X \in E_2} (-1)^{|X|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right| = (-1)^{|\{1\}|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in \{1\}} A_i\right| + (-1)^{|\{2\}|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in \{2\}} A_i\right| + (-1)^{|\{1,2\}|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i\right|$$

עתה:

$$|\{1\}| = 1 \quad , \quad |\{2\}| = 1 \quad , \quad |\{1,2\}| = 2$$

כמו-כן:

$$\bigcap_{i\in\{1\}} A_i = A_1 \qquad \bigcap_{i\in\{2\}} A_i = A_2 \qquad \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$$

סך-הכל מקבלים:

$$\sum_{X\in E_2} (-1)^{|X|-1} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right| = (-1)^{1-1} \cdot |A_1| + (-1)^{1-1} \cdot |A_2| + (-1)^{2-1} \cdot |A_1 \cap A_2| =$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

וזה אכן $|A_1 \cup A_2|$, לפי הזהות הבסיסית בה פתחנו את הפרק.

(ב) כש- $n = 3$ נקבל:

$$E_3 = P(\{1,2,3\}) - \{\varnothing\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

בסכום באגף ימין של עיקרון ההכלה וההפרדה יהיו כאן לכן $2^3 - 1 = 7$ מחוברים.
עתה כאן:

$$|\{1\}| = 1 \qquad \bigcap_{i\in\{1\}} A_i = A_1 \qquad |\{1,2\}| = 2 \qquad \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$$

$$|\{2\}| = 1 \qquad \bigcap_{i\in\{2\}} A_i = A_2 \qquad |\{1,3\}| = 2 \qquad \bigcap_{i\in\{1,3\}} A_i = A_1 \cap A_3$$

$$|\{3\}| = 1 \qquad \bigcap_{i\in\{3\}} A_i = A_3 \qquad |\{2,3\}| = 2 \qquad \bigcap_{i\in\{2,3\}} A_i = A_2 \cap A_3$$

$$|\{1,2,3\}| = 3 \qquad \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

לכן במקרה זה:

$$\sum_{X\in E_3} (-1)^{|X|-1} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

הבה נראה, שזה אכן $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. עבור זה נעזר בנוסחה עבור $n=2$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3|$$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$$

המקרה $n=2$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)|$$

חוק הפילוג

$$= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|)$$

פעמיים $n=2$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

כדאי לשים לב, שהשתמשנו פה בנוסחה עבור $n=2$ מספר פעמים, ועבור קומבינציות שונות, לא רק עבור A_1 ו- A_2 (גם עבור $A_1 \cap A_3$ ו- $A_2 \cap A_3$, למשל).

הוכחת עיקרון ההכלה וההפרדה נעשית באינדוקציה. הבסיס $n=2$ הוכח בפרק הקודם. שלב המעבר מ- n ל- $n+1$ דומה למה שעשינו כאן במעבר מ- $n=2$ ל- $n=3$, וגם בו צריך להשתמש בהנחת האינדוקציה בשני מקומות שונים, כמו גם במקרה הפרטי הידוע $n=2$. ההוכחה מובאת במלואה בנספח לפרק זה.

הנוסח הראשון של עיקרון ההכלה וההפרדה מסייע (במקרים מסוימים) למצוא את מספר האיברים באיחוד של n קבוצות. נביא עתה נוסח שני, שימושי דווקא יותר, המסייע (שוב, במקרים מסוימים) למצוא את מספר האיברים *בחיתוך* של n קבוצות.

עיקרון ההכלה וההפרדה, נוסח ב':

נניח U קבוצה, ותהיינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות חלקיות של U. נסמן $\overline{A_i} = U - A_i$ (המשלים של A_i ביחס ל- U) ו- $\cap(\varnothing) = U$. אז:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = \sum_{X \in P(\{1,\ldots,n\})} (-1)^{|X|} \cdot \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right|$$

דוגמה: אם $n=2$, אז $P(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

$|\emptyset| = 0$ $\qquad \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$ $\qquad \left|\bigcap_{i\in\emptyset} A_i\right| = |U|$

$|\{1\}| = 1$ $\qquad \bigcap_{i\in\{1\}} A_i = A_1$ $\qquad \left|\bigcap_{i\in\{1\}} A_i\right| = |A_1|$

$|\{2\}| = 1$ $\qquad \bigcap_{i\in\{2\}} A_i = A_2$ $\qquad \left|\bigcap_{i\in\{2\}} A_i\right| = |A_2|$

$|\{1,2\}| = 2$ $\qquad \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$ $\qquad \left|\bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i\right| = |A_1 \cap A_2|$

לכן, לפי נוסח זה של עיקרון ההכלה וההפרדה:

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right| = (-1)^0|U| + (-1)^1|A_1| + (-1)^1|A_2| + (-1)^2|A_1 \cap A_2| =$$
$$= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

הוכחת נוסח ב' של עיקרון ההכלה וההפרדה:

$$\left|\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = \left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |U| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$$

חוק דה-מורגן

(לפי נוסח א')
$$= |U| - \sum_{X\in E_n} (-1)^{|X|-1} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|$$

$$= |\cap\emptyset| + \sum_{X\in E_n} (-1)^{|X|} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|$$

(כי $E_n \cup \{\emptyset\} = P(\{1, \ldots, n\})$)
$$= \sum_{X\in P(\{1,\ldots,n\})} (-1)^{|X|} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|$$

הערות:

(1) שני הנוסחים של עיקרון ההכלה וההפרדה הינם שקולים זה לזה: ממש כשם שהוכחנו כאן את נוסח ב' על-סמך נוסח א', יכולנו בקלות לעשות את ההיפך (ההוכחה דומה).

(2) בטקסטים רבים מובאת ההוכחה האינטואיטיבית הבאה לנוסח ב': נניח $a \in U$, ונניח ש- $A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$ הם איברי $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ש- a שייך אליהם (ייתכן ש- $k = 0$).
אם $k > 0$, אז a "תורם" לסכום באגף ימין של נוסח ב' $0 = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}$* (כל קבוצה של j קבוצות מתוך $A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$ תורמת משהו). אם $k = 0$ אז a תורם 1 בלבד (רק $|U|$). סך-הכל, רק איברי $\left|\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|$ תורמים 1 כל אחד, ומכאן השוויון. הוכחה זו היא נכונה באופן בסיסי, אבל אין זו משימה של מה בכך להפוך אותה להוכחה מדויקת באמת!

צורת השימוש בנוסח השני של עיקרון ההכלה וההפרדה היא כזו: כאשר רוצים למצוא את מספר האיברים של קבוצה מסוימת U, המקיימים את התכונות $P_1, \ldots, P_n$, אזי מגדירים את A_i בתור קבוצת האיברים ב- U, *שאינם* מקיימים את P_i:

$$A_i = \{x \in U \mid \neg P_i(x)\}$$

מחפשים אז את $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|$, ועיקרון ההכלה וההפרדה עשוי לעזור (בתנאי, כמובן, שמציאת מספר האיברים בחיתוכים השונים של קבוצות מתוך $A_1, \ldots, A_n$ הוא קל יותר ממציאת $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|$).

דוגמה 1:

מצא את מספר הטבעיים בין 1 ל- 1000, שאינם מתחלקים ב- 5, 6 ו- 8.

תשובה:
כאן $U = \{n \in \mathbf{N}^+ \mid n \leq 1000\}$. לכן $|U| = 1000$.
נגדיר:

* זו נוסחה שנראה בפרק הבא.

$$A_1 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 5\}$$
$$A_2 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 6\}$$
$$A_3 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 8\}$$

אז

$$|A_1| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200 \quad , \quad |A_2| = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166 \quad , \quad |A_3| = \left[\frac{1000}{8}\right] = 125$$

כמו כן:

$$A_1 \cap A_2 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 30\}$$
$$A_1 \cap A_3 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 40\}$$
$$A_2 \cap A_3 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 24\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in U \mid n\ \text{מתחלק ב-}\ 120\}$$

לכן:

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{40}\right] = 25 \qquad |A_1 \cap A_2| = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{120}\right] = 8 \qquad |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{24}\right] = 41$$

לכן התשובה:

$$1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

מסקנה:

מספר הטבעיים בין 1 ל- 1000, שמתחלקים ב- 5, 6 או 8 הוא $1000 - 600 = 400$.

שימוש נפוץ במיוחד בעיקרון ההכלה וההפרדה נעשה במקרים, שמספר האיברים ב- $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ תלוי ב- k בלבד (בתנאי שכל האינדקסים שונים זה מזה). אם נסמן מספר איברים זה ב- α_k (כש- $\alpha_0 = |U|$), נקבל מעיקרון ההכלה וההפרדה ש:

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k \cdot \binom{n}{k}$$

(זאת כיוון שמספר החיתוכים בנוסחה, שעוצמתם α_k , הוא כמספר האפשרויות לבחור k אינדקסים שונים $i_1, \ldots, i_k$ מתוך הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$, כלומר: $\binom{n}{k}$).

דוגמה 2:

מהו מספר המספרים בני n ספרות, שאפשר להרכיב מ- $\{1,2,3,4,5\}$, אם 1, 2 ו- 3 חייבים להופיע?

תשובה:

כאן U היא קבוצת המספרים בני n ספרות שאפשר להרכיב מ- $\{1,2,3,4,5\}$.

A_1 היא קבוצת המספרים ב- U בהם 1 אינו מופיע.

A_2 היא קבוצת המספרים ב- U בהם 2 אינו מופיע.

A_3 היא קבוצת המספרים ב- U בהם 3 אינו מופיע.

אנו מחפשים את $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right|$. עתה:

$$|U| = 5^n \Rightarrow \alpha_0 = 5^n$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 4^n \Rightarrow \alpha_1 = 4^n$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 3^n \Rightarrow \alpha_2 = 3^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^n \Rightarrow \alpha_3 = 2^n$$

לכן התשובה היא:

$$\binom{3}{0} \cdot 5^n - \binom{3}{1} \cdot 4^n + \binom{3}{2} \cdot 3^n - \binom{3}{3} \cdot 2^n$$

כלומר:

$$5^n - 3 \cdot 4^n + 3 \cdot 3^n - 2^n$$

אזהרה:

הנוסחה $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k \cdot \binom{n}{k}$ ישימה רק כאשר ל- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ יש מובן, כלומר: רק כשמתקיים התנאי, שמספר האיברים ב- $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ תלוי רק ב- k (וזאת לכל k).

תנאי זה התקיים בדוגמה האחרונה. כך, למשל, עבור $k = 2$ היה לחיתוך של *כל* שתי קבוצות מתוך $\{A_1, A_2, A_3\}$ אותו מספר איברים: 3^n.

דוגמה 3:

בעיית המלצר ו- n הכובעים: n אורחים במסעדה מוסרים בעת הכניסה את כובעיהם למלצר. בשעת היציאה מחזיר להם המלצר את הכובעים באופן אקראי. כמה אפשרויות יש לו להחזיר את הכובעים, כך שאף אורח לא מקבל את הכובע של עצמו?

נוסח כללי יותר של הבעיה, במונחי תורת הקבוצות, הינו:
נניח כי A ו- B הן קבוצות כך ש- $|A| = |B| = n$, ונניח ש- g_0 היא פונקציית שקילות מ- B ל- A. מצא את $|\{f \in \mathrm{Eq}(A, B) \mid \forall x \in B\ f(x) \neq g_0(x)\}|$.
(בבעיה המקורית B היא קבוצת האורחים, A קבוצת הכובעים, g_0 היא הפונקציה המתאימה לכל אורח את הכובע שלו, ו- $\mathrm{Eq}(A, B)$ הינה קבוצת ההתאמות האפשריות בין קבוצת האורחים לקבוצת הכובעים).

פתרון:
נניח $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. תהי $U = \mathrm{Eq}(A, B)$.
נגדיר:

$$A_i = \{f \in \mathrm{Eq}(A, B) \mid f(b_i) = g_0(b_i)\}$$

אנו מחפשים את:

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|$$

עתה, קל לראות, שאם $i_1, \ldots, i_k$ הם k אינדקסים שונים מתוך $\{1, \ldots, n\}$, אז

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = (n-k)!$$

(זה כולל את המקרה $k = 0$, כי $|\cap(\varnothing)| = |U| = |\mathrm{Eq}(A, B)| = n!$).

לכן, לפי In-Ex, התשובה היא:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{n!}{k!} = n!\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}$$

הערה:

מנוסחה זו נובעת המסקנה המעניינת הבאה: אם נסמן את המספר שמצאנו ב- $D(n)$, אז $\frac{D(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}$. מחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי נובע לכן ש-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n!}=\frac{1}{e}$$

עתה, $\frac{D(n)}{n!}$ היא *ההסתברות* שאף אורח לא יקבל את כובעו, ומכאן שהסתברות זו שואפת ל- $\frac{1}{e}$. יתר-על-כן, ידוע לנו מחשבון דיפרנציאלי ש-

$$\left|\frac{D(n)}{n!}-\frac{1}{e}\right|<\frac{1}{(n+1)!}$$

לכן, כבר עבור *n*-ים קטנים מאוד ההסתברות היא בערך $\frac{1}{e}$ (השגיאה עבור $n=7$, למשל, קטנה מ- 0.00003, והיא הולכת וקטנה). המסקנה המפתיעה היא, שבין אם יש 10 אורחים או 1,000,000, ההסתברות שאף אורח לא יקבל את כובעו בחזרה היא בכל המקרים כמעט זהה (וגדולה למדי): בערך $\frac{1}{e}$ (למעלה מ- $\frac{1}{3}$!), כשההבדלים בין המקרים השונים הם זניחים!

הערה:

במקרה הפרטי בו $A=B$ ו- $g_0=i_B$, נוהגים לקרוא לפונקציות שנספרו בדוגמה זו (כלומר, הפונקציות ב- $\{f\in \mathrm{Eq}(B,B)\mid \forall x\in B.\, f(x)\neq x\}$) "אי סדרים טוטליים על *B*".

מספר הפתרונות של משוואות בשלמים עם אילוצים

בעיה:

כמה פתרונות במספרים *שלמים* יש למשוואה

$$x_1+x_2+x_3=9$$

בתנאי ש- $1\le x_1\le 2$, $-2\le x_2\le 4$ ו- $2\le x_2\le 4$?

בעיה זו היא דוגמה לסוג כללי של שאלות, שניתן לפתור בעזרת עיקרון ההכלה וההפרדה: כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k$$

בתנאי שמתקיימים האילוצים: $a_i \le x_i \le b_i$ (כאשר לכל $1 \le i < n$ a_i הוא מספר שלם, ו- b_i הוא שלם או $b_i = \infty$)?

הנוסחאות הבסיסיות של הקומבינטוריקה נותנות את התשובה במקרה הפרטי, בו לכל $1 \le i < n$ מתקיים ש- $a_i = 0$ ו- $b_i \ge k$. התשובה אז היא $S(n, k)$. עתה, אחת הדרכים העיקריות במתמטיקה להתמודדות עם בעיות חדשות היא לנסות לעשות להן רדוקציה לבעיות, אותן אנו כבר יודעים לפתור. שלב ראשון בפתרון בעיות מהסוג, שאנו דנים בו עכשיו, יהיה לכן ביצוע *נורמליזציה* שלהן, שתהפוך אותן לבעיות בהן $a_i = 0$ לכל n , כמו במקרה שפתרונו ידוע לנו. נוכל להשיג זאת באופן פשוט על-ידי שינוי המשתנים אתם אנו עובדים. לשם כך נגדיר:

$$y_i = x_i - a_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

כיוון ש- $x_i = y_i + a_i$ לכל i , נוכל להציב $y_i + a_i$ במקום x_i במשוואה המקורית, ולקבל כך משוואה חדשה, עם אילוצים חדשים, אבל עם אותו מספר פתרונות כמו שהיה למשוואה המקורית. בדוגמה שלנו זה ייראה כך:

$$y_1 = x_1 - 1 \qquad y_2 = x_2 + 2 \qquad y_3 = x_3 - 2$$

המשוואה שנקבל תהיה לכן:

$$(y_1 + 1) + (y_2 - 2) + (y_3 + 2) = 9$$

כלומר:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8$$

האילוצים החדשים יהיו:

$$1 \le y_1 + 1 \le 2 \qquad -2 \le y_2 - 2 \le 4 \qquad 2 \le y_3 + 2 \le 4$$

כלומר:

$$0 \le y_1 \le 1 \qquad 0 \le y_2 \le 6 \qquad 0 \le y_3 \le 2$$

אם נעבור משימוש ב- $y_1, \ldots, y_3$ חזרה ל- $x_1, \ldots, x_3$ (צעד שאינו הכרחי, אך בוודאי אינו משנה את מספר הפתרונות), נקבל, שעלינו לפתור את המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ בהגבלות: $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 6$ ו- $0 \le x_3 \le 2$. במלים אחרות: עלינו שוב לפתור משוואה מהצורה $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ (לא אותו k שהיה במשוואה המקורית!) עם אילוצים מהצורה $0 \le x_i \le b_i$ (שוב, לא אותם b_i-ים שהיו במשוואה המקורית!). כדי לפתור בעיה זו בעזרת In-Ex נגדיר:

$$U = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathbf{N}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$$
$$A_i = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in U \mid x_i \ge b_i + 1\}$$

ונמצא את $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right|$.

בדוגמה הספציפית שלנו:

$$U = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbf{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 8\}$$
$$A_1 = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbf{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 8 \wedge x_1 \ge 2\}$$
$$A_2 = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbf{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 8 \wedge x_2 \ge 7\}$$
$$A_3 = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbf{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 8 \wedge x_3 \ge 3\}$$

הפעלת In-Ex במצב אליו הגענו תדרוש למצוא את $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|$ בכל הצירופים האפשריים. משמעות הדבר היא שוב מציאת מספר הפתרונות של משוואות עם הגבלות (מהסוג בו אנו עוסקים). הפעם יוביל אבל נרמול הבעיות לכאלה, שפתרונן הוא $S(n, k)$ עבור k מתאים.

הבה נדגים את מציאת $|A_1 \cap A_3|$ בדוגמה הספציפית שלנו. המדובר, למעשה, במציאת מספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ עם האילוצים: $x_1 \ge 2$, $x_3 \ge 3$.

נגדיר אפוא:

$$y_1 = x_1 - 2 \qquad y_2 = x_2 \qquad y_3 = x_3 - 3$$

נקבל:

$$(y_1 + 2) + y_2 + (y_3 + 3) = 8$$

כלומר:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

כש- y_1, y_2, y_3 חייבים להיות מספרים טבעיים (ואין הגבלות נוספות!), מספר הפתרונות של משוואה זו הוא $S(3, 3)$, כלומר $\binom{5}{3}$.

באופן דומה נקבל כאן:

$$|u| = S(3,8) = \binom{10}{8}$$

$$|A_1| = S(3,6) = \binom{8}{6} \qquad |A_2| = S(3,1) = \binom{3}{1} \qquad |A_3| = S(3,5) = \binom{7}{5}$$

כמו-כן, $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$. לכן, מספר הפתרונות של הבעיה הוא סך-הכל:

$$\binom{10}{8} - \binom{8}{6} - \binom{3}{1} - \binom{7}{5} + \binom{5}{3} = 45 - 28 - 3 - 21 + 10 = 3$$

הערה:

בדוגמה ספציפית זו יכולנו פשוט לספור את הפתרונות ישירות, וזה היה מהיר יותר. עם זאת, זה אינו המצב בדרך-כלל!

נספח: הוכחת עיקרון ההכלה וההפרדה

סימונים:

$E_n = P(\{1, \ldots, n\}) - \{\varnothing\}$ $\quad\quad$ $E_n^* = \{X \in P(\{1, \ldots, n+1\}) \mid n+1 \in X\} - \{\{n+1\}\}$

למה 1

אם A ו- B סופיות, $F : A \to B$ היא פונקציית שקילות ו- $g : B \to \mathbf{R}$, אז:

$$\sum_{x \in A} g(F(x)) = \sum_{x \in B} g(x)$$

למה 2

(i) $E_{n+1} = E_n \cup \{\{n+1\}\} \cup E_n^*$.

(ii) $F_n = \lambda X \in E_n \,.\, X \cup \{n+1\}$ היא פונקציית שקילות מ- E_n על E_n^* ומתקיים:

$$\forall X \in E_n \,.\, |F_n(X)| - 1 = |X|$$

את הוכחת שתי הלמות נשאיר לקורא.

הוכחת העיקרון:

באינדוקציה. ל- $n = 2$ כבר הוכחנו.

נניח נכונות ל- n, נוכיח ל- $n+1$. יהיו אפוא $A_1, \ldots, A_{n+1}$ קבוצות.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right| \quad \text{לפי חוק הפילוג}$$

$$= \sum_{X \in E_n} (-1)^{|X|-1} \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right| + (-1)^{|\{n+1\}|-1} |A_{n+1}| - \sum_{X \in E_n} (-1)^{|X|-1} \left|\bigcap_{i \in X} (A_i \cap A_{n+1})\right| \quad \text{לפי הנחת האינדוקציה (פעמיים)}$$

$$= \sum_{X \in E_n} (-1)^{|X|-1} \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right| + (-1)^{|\{n+1\}|-1} \left|\bigcap_{i \in \{n+1\}} A_i\right| + \sum_{X \in E_n} (-1)^{|X|} \left|\bigcap_{i \in X} (A_i \cap A_{n+1})\right|$$

ברור, אבל, ש-

$$\bigcap_{i\in X}(A_i\cap A_{n+1})=\bigcap_{i\in F_n(X)}A_i$$

לכן נקבל לפי למה 2(ii):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right|=\sum_{X\in E_n}(-1)^{|X|-1}\left|\bigcap_{i\in X}A_i\right|+(-1)^{|\{n+1\}|-1}\left|\bigcap_{i\in\{n+1\}}A_i\right|+\sum_{X\in E_n}(-1)^{|F_n(X)|-1}\left|\bigcap_{i\in F_n(X)}A_i\right|$$

לפי למה 1 $$=\sum_{X\in E_n}(-1)^{|X|-1}\left|\bigcap_{i\in X}A_i\right|+(-1)^{|\{n+1\}|-1}\left|\bigcap_{i\in\{n+1\}}A_i\right|+\sum_{X\in E_n^*}(-1)^{|X|-1}\left|\bigcap_{i\in X}A_i\right|$$

$$=\sum_{X\in E_n\cup\{\{n+1\}\}\cup E_n^*}(-1)^{|X|-1}\left|\bigcap_{i\in X}A_i\right|$$

לפי למה 2 (i) $$=\sum_{X\in E_{n+1}}(-1)^{|X|-1}\left|\bigcap_{i\in X}A_i\right|$$

ד.3 תכונות המקדמים הבינומיאליים

המספרים $\binom{n}{k}$, כאשר $0 \le k < n$, הם בעלי חשיבות רבה במתמטיקה, מעבר לשימוש שנעשה בהם בקומבינטוריקה סופית. פרק זה יוקדש לכן לכמה מתכונותיהם. נתחיל בזהויות הפשוטות הבאות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (0 \le k \le n) \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (1 \le k \le n-1) \tag{2}$$

לרוב הטענות מסוג זה ניתן לתת שתי הוכחות שונות: אחת אלגברית והשנייה קומבינטורית. הוכחה אלגברית של (1), למשל, נראית כך:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

הוכחה קומבינטורית, לעומת זאת, מתבססת על כך, שאם $|A| = n$, אז $\lambda X \in P_k(A).A - X$ היא פונקציית שקילות מ- $P_k(A)$ על $P_{n-k}(A)$, ולכן

$$\binom{n}{k} = |P_k(A)| = |P_{n-k}(A)| = \binom{n}{n-k}$$

(ניסוח יותר אינטואיטיבי: לבחור k עצמים מתוך n , או לבחור את $n-k$ העצמים הנותרים, זו בעצם אותה בעיה.)

לגבי (2) הוכחה אלגברית תיראה כך:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k))!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

(השתמשנו במהלך ההוכחה 3 פעמים בעובדה, שלכל $m \in \mathbf{N}^+$ מתקיים:
$m! = (m-1)! \cdot m$).

הוכחה קומבינטורית של אותה זהות:
את $P_k(\{1, \ldots, n\})$ אפשר לחלק לשתי תת-קבוצות זרות:
(1) אלה ש- n שייך אליהן. קבוצה זו אקויפוטנטית עם $P_{k-1}(\{1, \ldots, n-1\})$ (כי פרט ל- n עלינו לבחור בעוד $k-1$ מספרים מבין המספרים בין 1 ל- $n-1$).
(2) אלה ש- n לא שייך אליהן. תת-קבוצה זו היא *בדיוק* $P_k(\{1, \ldots, n-1\})$. לכן:

$$\binom{n}{k}=|P_k(\{1,\ldots,n\})|=|P_{k-1}(\{1,\ldots,n-1\})|+|P_k(\{1,\ldots,n-1\})|=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

שתי הזהויות שהוכחנו (בעיקר השנייה), יחד עם העובדה שלכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים

$$\binom{n}{0}=1 \qquad \binom{n}{n}=1$$

מאפשרות למצוא את המקדמים הבינומיאליים בעזרת מה שידוע בשם "משולש פסקל":

$$\begin{array}{lccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

האיבר ה- k-י בשורה מספר n (הספירה מתחילה *מאפס*) נותן את $\binom{n}{k}$. המשולש נבנה כך: 1-ים בקצוות (לפי $\binom{n}{0}=1, \binom{n}{n}=1$), וכל מספר אחר שווה לסכום השניים, שנמצאים מעליו (זה לפי זהות מס' (2) למעלה). זהות מס' (1) היא ה"אחראית" לכך שב"משולש" יש סימטריה בין צד ימין לצד שמאל.

משפט הבינום

את השם "מקדמים בינומיאליים" קיבלו המספרים $\binom{n}{k}$ ממשפט מפורסם אחר שהם מככבים בו, הלוא הוא *משפט הבינום*:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \left(= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n\right)}$$

הסבר אינטואיטיבי למה נוסחה זו נכונה מתקבל מהעובדה ש-

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n \text{ פעמים}}$$

אם נפתח את כל הסוגריים באגף ימין נקבל סכום של מונומים רבים מהצורה $a^{n-k}b^k$ (כש- $0 \le k \le n$). עבור k ספציפי, מספר הפעמים שהמונום $a^{n-k}b^k$ מופיע הוא כמספר האפשרויות לבחור את k ה- $(a + b)$-ים (מתוך ה- n) שיתרמו את ה- b-ים של $a^{n-k}b^k$ (כל שאר ה- $(a + b)$-ים יתרמו a), לכן מספר זה הוא $\binom{n}{k}$. כינוס כל האיברים ייתן אפוא את נוסחת הבינום.

הוכחה מדויקת של משפט הבינום נעשית באינדוקציה. המשפט טריביאלי עבור $n=0$ (וגם עבור $n=1$). נניח נכונות ל- $n-1$. נוכיח ל- n.

לפי הנחת האינדוקציה:

$$(a+b)^n=(a+b)^{n-1}\cdot(a+b)=(a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k-1}b^{k+1}$$

$$=\binom{n-1}{0}a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}a^{n-(k+1)}b^{k+1}+\binom{n-1}{n-1}b^n$$

$$=a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^k+b^n$$

$$=a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)a^{n-k}b^k+b^n$$

לפי זהות (2)

$$=\binom{n}{0}a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\binom{n}{n}b^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

מסקנות פשוטות ממשפט הבינום:

1. אם נציב במשפט הבינום $a=1$ ו- $b=1$, נקבל:

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

מזה נובע שאם ב- A יש n איברים, אז:

$$|P(A)|=\sum_{k=0}^{n}|P_k(A)|$$

נוסחה אחרונה זו ברורה כמובן גם מהעובדה ש:

$$P(A) = \biguplus_{k=0}^{n} P_k(A)$$

2. אם נציב במשפט הבינום $a=1$ ו- $b=-1$, אז עבור $n>0$ נקבל:

$$0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}$$

(זה לא מה שנקבל עבור $n=0$, כי בקומבינטוריקה $0^0=1$, וגם $(-1)^0=1$, $\binom{0}{0}=1$).

הכללת המקדמים הבינומיאליים

נתחיל בהבחנה הבאה:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

את הביטוי $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ מסמנים לעתים קרובות ב- $n^{\underline{k}}$ (או $(n)_k$). מסתבר, שבחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי יש חשיבות לצירוף זה, גם כשבמקום n מציבים לא רק מספר טבעי גדול מ- k, אלא מספר ממשי כלשהו. בהתאם מגדירים:

$$x^{\underline{k}}=\begin{cases}1 & k=0\\ x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1) & k>0\end{cases}\qquad (k\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R})$$

$$\binom{x}{k}=\frac{x^{\underline{k}}}{k!}\qquad (k\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R})$$

דוגמאות:

(1) לכל $x\in\mathbf{R}$: $\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$

(2) אם נציב $x=-n$ כש- $n\in\mathbf{N}$, נקבל עבור $k>0$:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot (n+k-1)^{\underline{k}}}{k!} =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k} = (-1)^n \cdot S(n,k)$$

(3) לכל $x \in \mathbf{R}$: $\binom{x}{0} = 1$ ו- $\binom{x}{1} = x$.

(4) $\binom{n}{k}$ מוגדר עתה גם כש- $n \in \mathbf{N}$ ו- $n < k$, אבל ברור ש:

$$\forall k\, \forall n.\ k \in \mathbf{N} \wedge n \in \mathbf{N} \wedge n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$$

(כיוון שאחד הגורמים ב- $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ כאשר $n<k$ יהיה $n-n$).

הסיבה העיקרית להכללת המקדמים הבינומיאליים ל- x ממשי כלשהו הינה, שבחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מוכיחים, שאם $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, אז משפט הבינום נכון גם כשהמעריך אינו מספר טבעי, אלא α ממשי כלשהו:

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \forall b \in \mathbf{R}\, \forall \alpha \in \mathbf{R}.\ \left|\frac{b}{a}\right| < 1 \Rightarrow (a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$$

הבהרות:

(1) הסכום באגף ימין של משפט בינום מוכלל זה הוא סכום *אינסופי*. הגדרה מדויקת של סכום כזה (הקובעת מתי הוא "מתכנס", דהיינו: מתי יש לו ערך ממשי) ניתנת בחשבון אינפיניטסימלי (אם כי הנוסחה של סכום טור הנדסי אינסופי מתכנס נלמדת כבר בתיכון).

(2) הנוסחה הנ"ל היא אכן הכללה של משפט הבינום שהוכחנו כאן, כיוון שאם n טבעי, אז מה שמתקבל מהנוסחה המוכללת הוא אכן:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

הסיבה היא, שכל המחוברים החל מ- $k+1$ והלאה הם 0 (כי $\binom{n}{k} = 0$ כש- $k > n$).

(3) המקרה השימושי ביותר (גם לצרכינו בהמשך) של משפט הבינום המוכלל, שראינו למעלה, הוא כאשר $a = 1$ ו- $b = x$ כך ש- $|x| < 1$. נקבל אז:

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall \alpha \in \mathbf{R}.\ |x| < 1 \Rightarrow (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

באופן מעשי, כדאי לציין, מוכיחים תחילה עובדה זו, וההכללה המלאה מתקבלת על-ידי ההצבה $x = \frac{b}{a}$ (ופישוט).

זהויות רבות על המקדמים הבינומיאליים אפשר להכליל אם מרשים x ממשי כלשהו בניסוחן במקום מספרים טבעיים בלבד (רק בחלק העליון של $\binom{-}{-}$, לא בתחתון!). כך, למשל, אפשר להכליל את (2) עבור $x \in \mathbf{R}$ כלשהו (ו- $k \in \mathbf{N}$):

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$$

אפשר כאן להוכיח עובדה זו בעזרת פיתוח אלגברי. ברם, אין צורך בכך. אפשר להסיק אותה ישירות מהעובדה הידועה לנו כבר, דהיינו: שהיא נכונה כאשר x הוא מספר טבעי גדול מ- k. השיקול הוא השיקול הבא: עבור k *קבוע*, $x^{\underline{k}}$ ו- $\binom{x}{k}$ הם פולינומים ב- x ממעלה k. לכן $\binom{x}{k} - \binom{x-1}{k} - \binom{x-1}{k-1}$ גם הוא פולינום ממעלה k (לכל היותר). לפולינום זה יש אינסוף שורשים: כל מספר טבעי גדול מ- k הוא שורש שלו, לפי מה שהוכחנו. ברם, לפולינום ממעלה $k \geq 1$ יש לכל היותר k שורשים, אלא אם כן הוא פולינום האפס. היוצא מכאן הוא ש- $\binom{x}{k} - \binom{x-1}{k} - \binom{x-1}{k-1}$ שווה זהותית לאפס, ולכן $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$ לכל $x \in \mathbf{R}$.

טכניקת ההוכחה, שתיארנו עתה, ידועה בשם "השיקול הפולינומיאלי". היא מאפשרת להוכיח זהויות בינומיאליות רבות עבור מספרים ממשיים כלשהם על-ידי הוכחתן למספרים טבעיים בלבד. כמובן יש להיזהר פה: לא כל זהות נוכל להכליל כך. לא נוכל, למשל, להכליל את זהות (1) ל- x ממשי כלשהו (במקום n), כיוון ש- $\binom{x}{x-k}$ אינו מוגדר כלל, כש- x אינו מספר טבעי $\leq k$.

טבלה מס' ד.3 כוללת את עשר הזהויות הבינומיאליות החשובות ביותר. בטבלה זו a, b, x, y, α הם מספרים ממשיים כלשהם; n, m, k – מספרים טבעיים. בצד ימין רשומים תנאים לנכונותן של הזהויות משמאל.

טבלה ד.3:
זהויות בינומיאליות חשובות

	תנאים	
(1)	$k \le n$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2)	$k \ge 1$	$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$
(3)	$\alpha \in \mathbf{N} \vee \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert < 1$	$(a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$
(4)		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = 2^n$
(5)	$n \ge 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
(6)		$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$
(7)	$k \le n$	$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$
(8)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$
(9)	$m \le n$	$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
(10)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$

נעבור להוכחת הזהויות. את (1)-(5) כבר הוכחנו במהלך פרק זה. את (6) הוכחנו במקרה $x = n \in \mathbf{N}$, וניתן להכליל ל- x כלשהו בעזרת השיקול הפולינומיאלי. בדומה, גם את נוסחאות (7), (8) ו-(10) די להוכיח למקרה ש- x ו- y הם מספרים טבעיים, ולהסתמך על השיקול הפולינומיאלי לצורך ההכללה למספרים ממשיים כלשהם.

הוכחת (7):

נניח $x \in \mathbf{N}$. נבחן את הבעיה הבאה: מתוך קבוצה A עם x איברים יש לבחור קבוצה B עם n איברים, ומתוך קבוצה B יש לבחור קבוצה C עם k איברים. כמה אפשרויות יש?

פתרון א': מספר האפשרויות לבחור את B הוא $\binom{x}{n}$. אחר-כך אפשר לבחור את C מתוכה ב- $\binom{n}{k}$ דרכים. סך-הכל $\binom{x}{n}\cdot\binom{n}{k}$.

פתרון ב': נבחר תחילה את הקבוצה C. אפשר לעשות זאת ב- $\binom{x}{k}$ דרכים. אחר-כך נבחר את שאר האיברים ב- B. עלינו לבחור $n-k$ איברים מתוך $x-k$ שנותרו. לכך יש $\binom{x-k}{n-k}$ דרכים. סך-הכל יש $\binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$ אפשרויות.

משני הפתרונות מקבלים את השוויון ב- (7).

הוכחת (8): באינדוקציה על n.

כש- $n=0$, אז $\sum_{k=0}^{0}\binom{x+k}{k}=\binom{x}{0}=1$ וגם $\binom{x+0+1}{0}=1$.

נניח נכונות ל- $n-1$. נוכיח ל- n. ואכן:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\overset{(1)}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{x+k}{k}+\binom{x+n}{n}\overset{(2)}{=}\binom{x+(n-1)+1}{n-1}+\binom{x+n}{n}\overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}\binom{x+n}{n-1}+\binom{x+n}{n}\overset{(4)}{=}\binom{x+n+1}{n}$$

השוויון (2) כאן הוא על-פי הנחת האינדוקציה. זה שב- (4) – לפי זהות (2) מטבלה ד.3.

הסבר קומבינטורי ל- (8):

נחשב בשתי דרכים את מספר הפתרונות במספרים טבעיים של האי-שוויון:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + x_{m+1} \leq n \qquad (m \in \mathbf{N}\ ,\ n \in \mathbf{N})$$

(א) המספר המבוקש זהה למספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + x_{m+1} + x_{m+2} = n$$

(כיוון ש- $\lambda x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1} . \langle x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, n - \sum_{i=1}^{m+1} x_1 \rangle$ היא פונקציית שקילות מקבוצת הפתרונות של האי-שוויון על זו של המשוואה).

מכאן נקבל שהמספר המבוקש הוא $S(m+2, n)$.

(ב) קבוצת הפתרונות של האי-שוויון הינה בבירור:

$$\biguplus_{k=0}^{n} \left\{ \langle x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \rangle \in \mathrm{N}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m+1} x_i = k \right\}$$

לכן מספרם הינו $\sum_{k=0}^{n} S(m+1, k)$.

משתי התשובות אנו מקבלים:

$$S(m+2, n) = \sum_{k=0}^{n} S(m+1, k)$$

כלומר:

$$\binom{m+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k}$$

זהות (8) מתקבלת מזה בעזרת השיקול הפולינומיאלי.

הערה:
הוכחה זו מובילה לשיטה כללית למציאת מספר הפתרונות במספרים טבעיים של האי-שוויון: $x_1, x_2 + \ldots + x_n \le k$. מספר זה שווה למספר הפתרונות הטבעיים של *המשוואה:* $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = k$. מכאן שהוא שווה ל- $S(n+1, k)$.

הוכחת (9):

העובדה ש- $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$ נובעת מכך ש- $\binom{k}{m} = 0$ כאשר $k < m$.

עתה:

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} \underset{\text{זהות (1)}}{=} \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m} \underset{\text{הזזת אינדקסים}}{=} \sum_{k=m-m}^{n-m}\binom{k+m}{(k+m)-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{k} \underset{\text{זהות (8)}}{=} \binom{m+(n-m)+1}{n-m} = \binom{n+1}{n-m} \underset{\text{זהות (1)}}{=} \binom{n+1}{m+1}$$

הוכחת (10):

נניח $x, y \in \mathbf{N}$ ו- $x + y \ge n$. נתבונן בבעיה הבאה: תהיינה A ו- B קבוצות כך ש- $|A| = x$, $|B| = y$ ו- $A \cap B = \varnothing$. כמה אפשרויות יש לבחור n עצמים מתוך $A \cup B$?

פתרון א': ב- $A \cup B$ יש $x+y$ איברים. לכן התשובה $\binom{x+y}{n}$.

פתרון ב': נסמן ב- k את מספר האיברים שנבחר מ- A . $n-k$ יהיה אז מספר האיברים הנבחרים מתוך B . לכן מספר האפשרויות לבחור בדיוק k איברים מ- A (והשאר מ- B) הוא $\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$. עתה k יכול להיות כל מספר בין 0 ל- n, לכן סך-הכל מספר האפשרויות הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$.

מהשוואת שני הפתרונות נקבל את הזהות ב- (10).

דוגמה:

בבחירות לאגודת הסטודנטים יש עשרה מועמדים. לכל בוחר יש חמישה קולות, שהוא יכול לחלקם כרצונו: הוא יכול לתת את כולם לאותו מועמד, או לחלקם בין חמישה מועמדים שונים וכו'. הוא אינו חייב, כמו-כן, להשתמש בכל הקולות העומדים לרשותו. בבחירות השתתפו 3100 סטודנטים ו- 97 מהם הטילו פתקים לבנים. הוכח שבין הנותרים יש שניים שהצביעו באותה צורה.

פתרון:

נסמן ב- A_i את קבוצת פתקי ההצבעה האפשריים עם i קולות. ברור ש- $|A_i| = S(10, i)$, כי צריך לבחור i מועמדים מתוך 10, עם אפשרות חזרה וללא חשיבות לסדר. מכאן ש- $|A_i| = \binom{10+i-1}{i} = \binom{9+i}{i}$.

קבוצת פתקי ההצבעה האפשריים היא $\biguplus_{i=0}^{5} A_i$. לכן מספרם:

$$\sum_{i=0}^{5}\binom{9+i}{i} \underset{\uparrow}{=} \binom{9+5+1}{5} = \binom{15}{5} = 3003$$

לפי (8)

מכאן שמספר פתקי ההצבעה הלא-ריקים האפשריים: $3003 - 1 = 3002$.

מספר פתקי ההצבעה הלא-ריקים שנספרו: $3100 - 97 = 3003$.

לפי עיקרון שובך היונים הפשוט, יש לכן שני פתקי הצבעה לא-ריקים זהים.

הערה:

מציאת מספר הפתקים האפשריים היא בעצם מציאת מספר הפתרונות במספרים טבעיים של

$$x_1, x_2 + \ldots + x_{10} \le 5$$

כמו שראינו בהערה אחרי הוכחת זהות (8), זה שקול למציאת מספר הפתרונות של המשוואה:

$$x_1, x_2 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 5$$

(נוסף בה כאילו מועמד נוסף, שהינו "חסר שם").

ולכן התשובה היא $S(11, 5)$, כלומר

$$\binom{11+5-1}{5} = \binom{15}{5}$$

ד.4. פונקציות יוצרות

הבה נתחיל בבעיה הבאה, אותה נפתור לקראת סוף הפרק.

בעיה

כמה אפשרויות יש לבחור 173 מספרים מתוך $\{0, 1, 2\}$, אם 0 חייב להיבחר מספר זוגי של פעמים?

אפשר לנסות לפתור בעיה זו באופן סבלני על-ידי בדיקת כל האפשרויות. זה יהפוך לסיוט אם במקום 173 יהיה מדובר ב- 1733. בשלב זה נעדיף, אולי, שמחשב יעשה את העבודה השחורה במקומנו. בשביל זה נצטרך כמובן לכתוב תכנית מתאימה. די ברור, אבל, שתכנית כזו תוכל (אולי בשינויים קלים) לפתור את הבעיה לא רק עבור 173 או 1733, אלא עבור n טבעי כלשהו. היוצא מזה הוא, שכל ניסיון לפתור בעיה זו (אפילו בעזרת מחשב) יוביל, כמעט בהכרח, לצורך במציאת פתרון של בעיה כללית יותר.
במתמטיקה, אפילו לא ממוחשבת, אחת הגישות העיקריות לפתרון בעיות היא אכן לנסות *להכליל* אותן. אולי זה נראה מוזר, אך לעתים קרובות קל יותר לפתור בעיה כללית, ואחר-כך ליישם את הפתרון למקרה פרטי, בו אנו מעוניינים, מאשר לנסות לפתור ישירות את המקרה הפרטי. בקומבינטוריקה זה מתבטא בכך, שלעתים נוח להחליף את אחד הנתונים של בעיה מסוימת ב*פרמטר* n (או k או כל אחד אחר) ואז לנסות לפתור את הבעיה עבור n כלשהו. פתרון הבעיה המוכללת יהיה צריך לספק דרך יעילה לחישוב ה*פונקציה*, המתאימה לכל n את פתרון הבעיה, כשערך הפרמטר הוא n. אם אכן נמצא דרך יעילה כזו (על-ידי נוסחה ישירה, או אולי בדרך אחרת), נוכל להפעיל אותה על המקרה הספציפי המעניין אותנו, וכך לפתור אותו.

בדוגמה שלנו, אם נסמן ב- a_n את מספר האפשרויות לבחור n מספרים מתוך $\{0, 1, 2\}$, כש- 0 חייב להופיע מספר זוגי של פעמים, הרי מה *שתשאלנו* עליו הוא a_{173}. מה שננסה *לעשות*, לעומת זאת, הוא למצוא דרך יעילה לחישוב הפונקציה $\lambda n \in \mathbf{N}.\, a_n$ (אנו נמצא בהמשך נוסחה מפורשת לפונקציה זו!). מציאת ערך הפונקציה עבור $n = 173$ יהיה אז עניין פשוט.

ל- $\lambda n \in \mathbf{N}.\, a_n$ אנו קוראים, כזכור, *סדרה* של מספרים (טבעיים, במקרה זה). אינטואיטיבית, אנו רואים פונקציה זו כמייצגת רשימה אינסופית של מספרים $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$. אינטואיציה זו יש בה עזר רב (אך יש לזכור שהיא אינטואיציה בלבד!). לסדרות של מספרים (טבעיים, בדרך-כלל, אך לא תמיד) יש אכן שימוש רב

בפתרון בעיות קומבינטוריות. בפרק הזה ובפרק הבא נפתח כלים לטיפול יעיל בסדרות כאלה*, וכמו-כן נראה, איך ליישם כלים אלה לצורך פתרון בעיות קומבינטוריות. נתחיל במה שהוא אולי הכלי החזק והכללי ביותר (בחלק גדול של המקרים): *פונקציות יוצרות*. לצורך הפעלת כלי זה יבוא לעזרתנו החשבון האינפיניטסימלי.

סימונים:

בפרק זה, המשתנים n , m , ℓ , k , j , i ישמשו כמשתנים עבור מספרים ***טבעיים***. במקום לכתוב $\lambda n\in\mathbf{N}.\,t$ או $\forall n\in\mathbf{N}.\,\varphi$, נכתוב לכן פשוט $\lambda n.\,t$ ו- $\forall n.\,\varphi$ (וכנ"ל עם שאר המשתנים האלה). המשתנים a , b , c , x , y , z , u , v , w , α , β , γ ישמשו עבור מספרים ממשיים (ולפעמים אפילו מרוכבים). במקום לכתוב $\lambda x\in\mathbf{R}.\,t$ או $\forall x\in\mathbf{R}.\,y$, נכתוב לכן בקיצור $\lambda x.\,t$ ו- $\forall x.\,\varphi$ (וכנ"ל עם השאר). יש לזכור תמיד, שאלו רק קיצורים למה שהיינו צריכים לכתוב באמת!

הרעיון המרכזי של פרק זה הוא, שסדרות רבות של מספרים נוצרות באופן טבעי על-ידי פונקציות (חלקיות) מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$ באופן הבא:

הגדרה:

נאמר שפונקציה $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *יוצרת* את הסדרה $\lambda n.\,a_n$ אם קיים $r>0$ כך ש:

$$\forall x.\,|x|<r\Rightarrow F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

הערות:

(א) ב- $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ הכוונה ל- $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}a_nx^n$. הסכום ("טור") האינסופי מוגדר אפוא אם"ם הסדרה $\lambda k.\sum_{n=0}^{k}a_nx^n$ מתכנסת. במקרה זה נאמר שה"טור" *מתכנס*. הגדרה מדויקת זו של $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *לא* תהיה אבל חשובה לענייננו! שימושית הרבה יותר תהיה עבורנו האינטואיציה של ראיית טור זה כמעין סכום אינסופי, *הדומה בהתנהגותו לפולינום*:

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

* יש לשים לב שסדרות אצלנו מתחילות ב- a_0 ולא ב- a_1.

גם לגודלו של r לא תהייה לגבינו כל חשיבות. חשוב רק שהוא קיים וגדול מאפס.

(ב) יחס ה"יצירה" הוא יחס בין $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ לבין $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$. יחס זה הוא חד-חד-ערכי במובן הבא: ברור, שלכל סדרה ב- $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ יש לכל היותר פונקציה רציפה אחת שיוצרת אותה,* ומיד נראה גם שכל פונקציה ב- $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ יוצרת לכל היותר סדרה אחת.

(ג) מה שנזדקק לו מחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי הוא רק מספר עובדות יסודיות על *יחס* ה"יצירה". המובן המדויק של מושג היצירה בעצם אינו כל כך חשוב לנו. חשיבות תהיה כאן רק לאותן עובדות יסודיות אודותיו, המרוכזות להלן בטבלאות ד.4 ו- ד.5. נדגיש עם זאת שוב, שכדאי בהחלט להיעזר ב*אינטואיציה*, לפיה הסדרה $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ נוצרת על-ידי הפונקציה

$$\lambda x.\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

דוגמאות

(1) בבית-ספר תיכון לומדים על סכום טור הנדסי אינסופי מתכנס.
לומדים שם שאם $|q| < 1$ אז $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \dfrac{1}{1-q}$.
ממילא אם $|x| < 1$ אז $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$.

במונחים של פרק זה פירוש הדבר ש- $\lambda x. \dfrac{1}{1-x}$ יוצרת את הסדרה $\langle 1,1,1,1, \dots \rangle$, או ליתר דיוק: את הסדרה $\lambda n.\ 1$ (ערך r במקרה זה הוא 1, כיוון שהשוויון למעלה נכון עבור $|x| < 1$. עובדה זו, כאמור, אינה רלוונטית לענייננו).

(2) משפט הבינום המוכלל קובע, שהפונקציה $\lambda x.\ (1+x)^{\alpha}$ יוצרת את הסדרה $\lambda n. \dbinom{\alpha}{n}$ (כלומר: את הסדרה $\left\langle \dbinom{\alpha}{0}, \dbinom{\alpha}{1}, \dbinom{\alpha}{2}, \dots \right\rangle$). זה נכון לכל $\alpha \in \mathbf{R}$.

---

* ליתר דיוק, אם F_1 ו- F_2 יוצרות אותה סדרה, אז יש $\rho > 0$ כך ש- F_1 ו- F_2 מוגדרות שתיהן ב- $(-\rho, \rho)$ ו- $F_1(x) = F_2(x)$ לכל x בקטע זה. ה"יחידות" של הפונקציה הנוצרת, עליה מדובר כאן, היא לכן במובן קצת שונה מהרגיל.

משפט מרכזי על הקשר בין פונקציות וסדרות הוא המשפט הבא:

משפט

אם פונקציה F יוצרת את הסדרה $\lambda n.\, a_n$, אז

$$\boxed{a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}}$$

את המשפט הזה מוכיחים בחדו"א.

מסקנות:

(1) כל פונקציה (חלקית) מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$ יוצרת *לכל היותר* סדרה אחת.

(2) תנאי *הכרחי* לכך ש- F תיצור סדרה כלשהי הוא, שהיא תהיה מוגדרת ורציפה ב- 0, ויהיו לה שם כל הנגזרות (מכל סדר).

הערה:

אומנם זהו תנאי הכרחי בלבד, אך בכל המקרים הנורמליים (הצצים בשימושים) זהו גם תנאי מספיק.

דוגמה:

אם $F = \lambda x.\, e^x$, אז $F' = \lambda x.\, e^x$ ו- $F^{(n)} = \lambda x.\, e^x$ לכל n. לכן $F^{(n)}(0) = e^0 = 1$ לכל n. מהמשפט האחרון נובע לכן, שהסדרה היחידה שפונקציה זו יכולה ליצור היא $\lambda n.\, \frac{1}{n!}$. למעשה, היא אכן יוצרת אותה, וההתכנסות אפילו מתקיימת *לכל* x:

$$\forall x.\, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

טבלה מס' ד.4 מסכמת את כל התכונות החשובות של יחס היצירה שנזדקק להן. חלק מהן נובעות מתכונות אחרות ברשימה. את האחרות מוכיחים במדויק בחדו"א, ואנו נשאיר הוכחות מדויקות אלה לקורס המתאים. פה ניתן במקום זאת *הסברים* אינטואיטיביים מדוע יש *לצפות* לנכונות התכונות.*

* ההוכחות המדויקות בחדו"א מבוססות למעשה על אינטואיציות אלה, והן שוות למה שנעשה פה "עד כדי ε".

טבלה ד.4: פונקציות יוצרות: התכונות היסודיות

נניח: F יוצרת את $\lambda n.\, a_n$.
G יוצרת את $\lambda n.\, b_n$.

אז:

(1)	$\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \alpha\, a_n + \beta\, b_n$
(2)	$\lambda x.\ x^m.\ F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$
(3)	$\lambda x. \dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-1} x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.\ a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.\ F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.\ c^n a_n$
(5)	$\lambda x.\ F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n. \begin{cases} a_{\frac{n}{m}} & m \setminus n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
(6)	$\lambda x.\ F(x) \cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x. \dfrac{F(x)}{1 - x}$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k$
(8)	F'	יוצרת את	$\lambda n.\ (n+1) a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.\ x \cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ n a_n$
(10)	$\lambda x. \int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\ \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{a_{n-1}}{n} & n > 0 \end{cases}$

נעבור עתה על התכונות ברשימה, ונסביר למה הן אמורות להיות נכונות. נסתמך על כך שהמשמעות האינטואיטיבית של ההנחות שבראש הטבלה היא:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$

(1) אינטואיטיבית,

$$\alpha F(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \ldots + \alpha a_nx^n + \ldots$$

$$\beta G(x) = \beta b_0 + \beta b_1x + \beta b_2x^2 + \ldots + \beta b_nx^n + \ldots$$

ולכן

$$\alpha F(x) + \beta G(x) = (\alpha a_0+\beta b_0) + (\alpha a_1+\beta b_1)x + (\alpha a_2+\beta b_2)x^2 + \ldots + (\alpha a_n+\beta b_n)x^n + \ldots$$

ולכן ברור ש- $\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta F(x)$ יוצרת את $\lambda n.\ \alpha a_n + \beta b_n$.

צורה יותר קונקרטית של הטיעון הנ"ל היא:

$$\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta G(x) = \lambda x. \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

ולכן נקבל את (1) (על-פי המקדם של x^n במה שיצא).

צורת שיקול זו מניחה, שעל סכומים אינסופיים חלים אותם חוקים, שחלים על סכומים סופיים. בתנאים מסוימים (החלים כאן) זה אכן נכון.

(2) $$\lambda x.x^m F(x) = \lambda x.x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = \lambda x. \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$$

חשוב מאוד להבין את השלב האחרון בחישוב זה. מה שאנו עושים בו הוא "הזזה" של האינדקסים, כמו שהדבר נעשה בסכומים סופיים: כיוון ה"הזזה" בגבולות של ה- Σ הפוך לזו, הנעשית בפנים הביטוי. (הסבר פורמלי: מגדירים $k = n + m$. אז $n = k - m$. לכן כש- $n = 0$ אז $k = m$, וכש- "$n = \infty$" גם "$k = \infty$". מכאן אנו מקבלים ש- $\sum_{k=m}^{\infty} a_{k-m} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$.)

עתה ב- $\sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m}x^n$ המקדם של x^n הוא a_{n-m} אם $n \geq m$. אם $n < m$, אז "אין" x^n, כלומר: המקדם שלו הוא 0. מכאן (2).

דוגמה:

$$\lambda x.\, x^2 e^x = \lambda x.\, x^2\left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)$$

$$= \lambda x.\left(\frac{x^2}{0!} + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{(n-2)!} + \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} + \ldots\right)$$

ואנו רואים ש- $a_0 = a_1 = 0$, ושהמקדם של x^n הוא $\frac{1}{(n-2)!}$ כש- $n \geq 2$.

$$\lambda x.\frac{F(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-1}x^{m-1}}{x^m} = \lambda x.\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n}{x^m} = \lambda x.\frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n}{x^m} \quad (3)$$

$$= \lambda x.\frac{x^m \cdot \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{n-m}}{x^m} = \lambda x.\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^{n-m} = \lambda x.\sum_{n=m-m}^{\infty} a_{n+m} x^{(n+m)-m} = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^n$$

דוגמה:

$$\lambda x.\frac{e^x - 1}{x} = \lambda x.\frac{(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots) - 1}{x} = \lambda x.\frac{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}{x} =$$

$$= \lambda x.\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

ברור שהמקדם של x^n הוא $\frac{1}{(n+1)!}$. לכן $\lambda x.\frac{e^x - 1}{x}$ יוצרת את $\lambda n.\frac{1}{(n+1)!}$.

$$\lambda x.F(cx) = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n x^n \quad (4)$$

ולכן $\lambda x.\, F(cx)$ יוצרת את $\lambda n.\, c^n a_n$.

דוגמה:

$\lambda x.\, e^x$ יוצרת את $\lambda n.\frac{1}{n!}$. לכן לכל $a \in \mathbf{R}$, $\lambda x.\, e^{ax}$ יוצרת את $\lambda n.\frac{a^n}{n!}$.

$$\lambda x.\, F(x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^m)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m \cdot n} \tag{5}$$

אנו רואים, שאם החזקה של x אינה מתחלקת ב- m , אז המקדם שלה הוא 0.
לעומת זאת, אם החזקה של x היא מהצורה $m \cdot k$, אז המקדם שלה הוא a_k ,
כלומר $a_{\frac{m \cdot k}{m}}$.

דוגמה:

$$\lambda x.\, e^{x^3} = \lambda x. 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + \ldots$$

ואנו רואים, שהמקדמים של x^{10} ו- x^{11} (למשל) הם 0, בעוד שהמקדם של x^{12} הוא $\frac{1}{(\frac{12}{3})!}$.

$$\lambda x.\, F(x) \cdot G(x) = \lambda x.\, (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots) \tag{6}$$

אם "נפתח את הסוגריים" ונכנס, כמו שעושים לסכומים סופיים, נקבל:

$$\lambda x.\, a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \ldots$$

ולכן, אינטואיטיבית, המקדם של x^n הוא $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

דוגמה:

ניקח $F = \lambda x.\, e^{3x}$, $G = \lambda x.\, e^{2x}$. אז $F \cdot G = \lambda x.\, e^{3x} \cdot e^{2x} = \lambda x.\, e^{5x}$.

עתה, במקרה זה $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $b_n = \frac{2^n}{n!}$. חישוב הנעזר במשפט הבינום נותן לכן:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^{n-k} \cdot 3^k =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 3^k = \frac{(2+3)^n}{n!} = \frac{5^n}{n!}$$

ואכן $\lambda x.\ e^{5x}$ יוצרת את $\lambda n.\frac{5^n}{n!}$ (כמו שהוכחנו באופן כללי למעלה).

(7) זהו מקרה פרטי חשוב במיוחד של (6), בו אנו לוקחים $G = \lambda x.\frac{1}{1-x}$. במקרה זה $b_n = 1$ לכל n, ו- (7) מתקבל.

בהמשך נראה כיצד משתמשים ב- (7) לחישוב נוסחאות של סכומים.

(8) $$F = \lambda x.\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

ואם נגזור לפי נגזרת של סכום, נקבל:

$$F' = \lambda x.\ a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n \ldots$$

ולכן, אינטואיטיבית, F' יוצרת את $\lambda n.\ (n+1)a_{n+1}$.

דוגמה:

$\lambda x.\frac{1}{1-x} = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. אם נגזור נקבל:

$$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^2} = \lambda x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

מכאן ש- $\lambda x.\frac{1}{(1-x)^2}$ יוצרת את הסדרה: $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$.

(נשים לב אבל, ש- 1 נמצא כאן בְּמקום האפס, לא בְּמקום ה"אחד"!).

הערה:

עובדה אחרונה זו נובעת גם מנוסחת הבינום הכללית, והיא מקרה פרטי של נוסחה (7) בטבלה ד.5.

(9) נובע מיידית מ- (8) ומ- (2) ($m = 1$).

דוגמה:

לפי הדוגמה הקודמת ו- (8), $\lambda x.\dfrac{x}{(1-x)^2}$ יוצרת את $\lambda n.\,n$, כלומר את $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \dots\rangle$.

(10) השיקול האינטואיטיבי כאן דומה לזה של (8), ומושאר לקוראים.

דוגמה:

$$\lambda x.\frac{1}{1-x} = \lambda x.\ 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

אינטגרציה של שני הצדדים מ- 0 ועד x תיתן:

$$\lambda x. -\ln(1-x) = \lambda x.\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

כלומר, $\lambda x. -\ln(1-x)$ יוצרת את: $\lambda n.\ \text{if}\ \ n = 0\ \ \text{then}\ \ 0\ \ \text{else}\ \ 1/n$, כלומר את: $\left\langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\rangle$.

טבלה ד.5 כוללת רשימה של פונקציות יוצרות חשובות ואת הסדרות שהן יוצרות. מתוך הרשימה הזו, (2), (5), (8), (9) ו- (10) כבר הוסברו למעלה. (3) ו- (4) נובעים מ- (2) בעזרת הכלל על $\lambda x.\,F(cx)$ ((3), אגב, הוא מקרה פרטי של (4), בו $c = -1$). (1) הוא טריביאלי. נסביר אפוא עתה את (6), (7), (11) ו- (12).

הוכחת (6): מ- (5) נובע ש- $\lambda x.\,(1+x)^{-\alpha}$ יוצרת את $\lambda n.\binom{-\alpha}{n}$, דהיינו את $\lambda n.\,(-1)^n \cdot \binom{\alpha+n-1}{n}$ (לפי זהות (6) מטבלה ד.3). אם נפעיל עתה על $\lambda x.\,(1+x)^{-\alpha}$ את הכלל אודות $\lambda x.\,F(cx)$ (כש- $c = -1$), נקבל את (6).

(7) הוא מקרה פרטי של (6) עם $\alpha = m + 1$, תוך שימוש בעובדה ש- $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

טבלה ד.5: פונקציות יוצרות: דוגמאות חשובות

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה לא פורמלית
(1)	$\lambda x.\, x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-x}$	$\lambda n.\, 1$	$\langle 1, 1, 1, 1, \ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\dfrac{1}{1+x}$	$\lambda n.\, (-1)^n$	$\langle 1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-cx}$	$\lambda n.\, c^n$	$\langle 1, c, c^2, c^3, c^4, \ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.\, (1+x)^\alpha$	$\lambda n.\binom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \binom{\alpha}{2}, \binom{\alpha}{3}, \ldots \right\rangle$
(6)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\binom{\alpha+n-1}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \binom{\alpha+1}{2}, \binom{\alpha+2}{3}, \ldots \right\rangle$
(7)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\binom{m+n}{m}$	$\left\langle 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots \right\rangle$
(8)	$\lambda x.\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.\, n$	$\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.\, -\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ 1/n & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$
(10)	$\lambda x.\, e^{ax}$	$\lambda n.\dfrac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1, a, \frac{a^2}{2!}, \frac{a^3}{3!}, \ldots \right\rangle$
(11)	$\lambda x.\, \cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\dfrac{a^n}{n!} & n \text{ זוגי}\\ 0 & n \text{ איזוגי}\end{cases}$	$\left\langle 1, 0, \frac{a^2}{2!}, 0, \frac{a^4}{4!}, \ldots \right\rangle$
(12)	$\lambda x.\, \sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n \text{ זוגי}\\ \dfrac{a^n}{n!} & n \text{ איזוגי}\end{cases}$	$\left\langle 0, a, 0, \frac{a^3}{3!}, 0, \frac{a^5}{5!}, 0 \ldots \right\rangle$

(11)-(12): $\cosh$ ("קוסינוס היפרבולי") ו- $\sinh$ ("סינוס היפרבולי") מוגדרות כך:

$$\cosh = \lambda x.\frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad \sinh = \lambda x.\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

נוסחאות (11) ו- (12) נובעות לכן מ- (10) של טבלה זו ומכללים (1) ו- (4) של טבלה ד.4.

נעבור עתה לשימושים. עיקר השימושים בקורס זה יהיו, באופן טבעי, עבור קומבינטוריקה סופית. נתחיל אבל דווקא בשימוש מתחום אחר:

דוגמה:

מצא נוסחה עבור $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

פתרון:

המפתח כאן הוא תכונה (7) של טבלה ד.4, לפיה אם הסדרה $\lambda n.\, a_n$ נוצרת על-ידי F, אז סדרת הסכומים החלקיים נוצרת על-ידי $\lambda x.\frac{F(x)}{1-x}$.

שימוש בעובדה זו לצורך חישוב $\lambda n.\sum_{i=0}^{n} a_i$ עבור סדרה $\lambda n.\, a_n$ מסוימת מתבצע בשני שלבים:

(א) מציאת פונקציה F, שיוצרת את $\lambda n.\, a_n$.

(ב) מציאת הסדרה ש- $\lambda x.\frac{F(x)}{1-x}$ יוצרת.

בדוגמה שלנו, $a_n = n^2$ לכל n. בשלב (א) עלינו למצוא לכן פונקציה יוצרת ל- $\lambda n.\, n^2$. מאין ניקח אותה? עיון בטבלה ד.4 מגלה, שעיקרון (9) שם נראה הקרוב ביותר. כיוון ש- $n^2 = n \cdot n$, הרי אם נמצא פונקציה יוצרת G עבור $\lambda n.\, n$, אזי $\lambda x.\, x \cdot G'(x)$ תהיה פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\, n^2$. הבעיה עתה היא, לכן, למצוא פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\, n$. יכולנו להפעיל אותו שיקול, ולמצוא תחילה פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\, 1$. ברם, כאן נוכל פשוט להסתמך על טבלה ד.5, שם נכתב במפורש (סעיף (8)), ש- $\lambda n.\, n$ נוצרת על-ידי $G = \lambda x.\frac{x}{(1-x)^2}$. מזה נקבל:

$$F = \lambda x.x \cdot G'(x) = \lambda x.\, x.\frac{1+x}{(1-x)^3} = \lambda x.\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

לכן $\lambda x.\frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \lambda x.\frac{F(x)}{1-x}$.

עתה, לפי נוסחה (7) של טבלה ד.5 $\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^4}$ יוצרת את $\lambda n.\dbinom{n+3}{3}$. לכן:

$$\lambda x.(x+x^2)\cdot\frac{1}{(1-x)^4} = \lambda x.(x+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n =$$

$$= \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^{n+2} = \lambda x.\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{3}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\binom{n+1}{3}x^n =$$

$$= \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{3}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{3}x^n = \lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+2}{3}.+\binom{n+1}{3}\right]x^n$$

מכאן שהסכום המבוקש הוא:

$$\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}+\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{(n+1)n(n+2+n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הערות:

(1) במעבר שלפני האחרון בחישוב למעלה הסתמכנו על זה ש- $0 = \dbinom{2}{3} = \dbinom{1}{3}$.

(2) בחישוב האחרון לא נעזרנו במבט ראשון בכללים פורמליים, אלא בחישובים מ"הסוג האינטואיטיבי". למעשה, מה שעשינו לא היה אלא שימוש בכללים (1) ו- (2) של טבלה ד.4. לפי (2), למשל, $\lambda x.\dfrac{x^2}{(1-x)^4}$ יוצרת את $\lambda n.\dbinom{n+1}{3}$, כיוון ש- $\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^4}$ יוצרת את $\lambda n.\dbinom{n+3}{3}$. שיקול דומה חל על $\lambda x.\dfrac{x}{(1-x)^4}$. האפשרות לחבר נובעת מכלל (1) של טבלה ד.4. אנו נמשיך, עם זאת, להסתמך על כללים אלה ואחרים באופן לא מפורש, ובפועל נעשה חישובים אינטואיטיביים בסכומים אינסופיים. את כל מה שנעשה ניתן יהיה לתרגם בקלות לשימוש בכללים של טבלה ד.4.

(3) את מה שעשינו בדוגמה האחרונה ניתן להכליל בקלות לשיטה למציאת נוסחה עבור $\sum_{n=1}^{k} n^p$, כש- p מספר טבעי כלשהו. כל שעלינו לעשות הוא למצוא פונקציה יוצרת H_p עבור $\lambda n.\, n^p$ ואז למצוא את הסדרה הנוצרת על-ידי $\lambda x. \frac{H_p(x)}{1-x}$. כמו בדוגמה, נוכל להיעזר ב- (9) מטבלה ד.4, ולקבל ש- $H_{p+1} = \lambda x.\, xH'_p(x)$. כשמתחילים ב- $H_0 = \lambda x. \frac{1}{1-x}$ אפשר לקבל כך בקלות את H_p לכל p מבוקש.

(4) בדוגמה האחרונה ראינו הדגמה של שתי הבעיות העיקריות, הקשורות בפונקציות יוצרות:

(א) בהינתן סדרה $\lambda n.\, a_n$, למצוא פונקציה אלמנטרית, שיוצרת אותה (אם קיימת).

(ב) בהינתן פונקציה אלמנטרית, למצוא איזו סדרה (אם בכלל) היא יוצרת.

העובדות בטבלאות ד.4 ו- ד.5 הן כלי העבודה העיקרי שלנו לצורך התמודדות עם שני סוגי הבעיות.

(5) בדוגמה האחרונה היינו צריכים למצוא, בשלב מסוים, את הסדרה, שיוצרת פונקציה *רציונלית*, דהיינו מנה של שני פולינומים (במקרה של הדוגמה היתה זו הפונקציה $\lambda x. \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$). זהו מצב החוזר הרבה בשימושים, בעיקר אלו הקומבינטוריים. למזלנו, בהנחה מסוימת זה *תמיד* אפשרי:

משפט:

אם $p(x)$ ו- $q(x)$ שני פולינומים, ו- 0 אינו שורש של q, אז $\lambda x. \frac{p(x)}{q(x)}$ יוצרת סדרה.

הוכחה מלאה של המשפט דורשת הרחבת התיאוריה למספרים מרוכבים, ואנו נוותר עליה כאן. באופן בסיסי היא דומה להוכחה, שלכל פונקציה רציונלית ניתן למצוא אינטגרל לא מסוים, שהוא פונקציה אלמנטרית. ההוכחה היא קונסטרוקטיבית, ומספקת למעשה את המתכון (אלגוריתם) הבא למציאת הסדרה המבוקשת:

מציאת הסדרה הנוצרת על-ידי $\lambda x.\dfrac{p(x)}{q(x)}$:

שלב 1:

חילוק פולינומים:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

כאשר המעלה של p_1 קטנה ממעלת q .

שלב 2:

למצוא את השורשים $x_1, \ldots, x_m$ של הפולינום q (m – המעלה של q). כלומר: לפתור את המשוואה $q(x) = 0$.

($x_1, \ldots, x_m$ אינם בהכרח שונים זה מזה, והם יכולים להיות מספרים מרוכבים).

שלב 3:

לפרק את q לפי הנוסחה:

$$q(x) = b_0(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})\ldots(1 - \frac{x}{x_m})$$

(b_0 – האיבר החופשי של q , ואנו מניחים ש- $b_0 \neq 0$).

קיבלנו פירוק של q מהצורה: $q(x) = b_0(1 - c_1x)^{m_1}(1 - c_2x)^{m_2}\ldots(1 - c_px)^{m_p}$

כאשר $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$.

שלב 4:

מוצאים $A_1, \ldots, A_m$ כך ש-

$$\frac{p_1(x)}{q(x)} = \frac{1}{b_0}\left[\frac{A_1}{1-c_1x} + \frac{A_2}{(1-c_1x)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(1-c_1x)^{m_1}} + \frac{A_{m_1+1}}{1-c_2x} + \ldots + \frac{A_m}{(1-c_px)^{m_p}}\right]$$

שלב 5:

מוצאים את הסדרה, שכל מחובר יוצר, ומחברים. לתוצאה מוסיפים את p_0 משלב 1.

דוגמה:

איזו סדרה נוצרת על-ידי הפונקציה $\lambda x.\dfrac{1-5x}{2x^2-7x+3}$?

שלב 1:

מיותר כאן, כי המעלה של $1-5x$ כבר קטנה מזו של $2x^2-7x+3$.

שלב 2:

פותרים: $2x^2-7x+3=0$. הפתרונות: $x_1=\dfrac{1}{2}$ $x_2=3$.

שלב 3:

מפרקים את המכנה לפי הנוסחה:

$$b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = b_0\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

כאן נקבל:

$$2x^2-7x+3 = 3\left(1-\frac{x}{1/2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right) = 3(1-2x)\left(1-\frac{1}{3}x\right)$$

שלב 4:

מוצאים A ו- B כך ש:

$$\frac{1-5x}{(1-2x)(1-\frac{1}{3}x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}x}$$

כלומר: לכל x $\quad 1-5x = A(1-\frac{1}{3}x) + B(1-2x)$

נציב $x=\dfrac{1}{2}$. נקבל: $A=-\dfrac{9}{5}$.

נציב $x=3$. נקבל: $B=\dfrac{14}{5}$.

סיכום:

$$\lambda x.\frac{1-5x}{2x^2-7x+3} = \lambda x.\frac{1}{3}\left[\frac{-9/5}{1-2x} + \frac{14/5}{1-1/3\,x}\right]$$

$$= \lambda x.\frac{1}{15}\left[\frac{14}{1-1/3\,x} - \frac{9}{1-2x}\right]$$

שלב 5:

מה שמצאנו יוצר את הסדרה: $\lambda n.\dfrac{1}{15}\left[14\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 9\cdot 2^n\right]$

שימושים בקומבינטוריקה

השימושים העיקריים של פונקציות יוצרות בקומבינטוריקה מבוססים דווקא על עיקרון מספר (6) בטבלה ד.4, המטפל בהכפלת שתי פונקציות יוצרות. נביא תחילה דוגמאות בהן נשתמש בעיקרון זה באופן אינטואיטיבי. הביסוס התיאורטי המדויק יבוא אחר-כך.

א. בחירות עם הגבלות ללא חשיבות לסדר

נתחיל *בדוגמה*: כמה אפשרויות יש להרכיב סלסלה לט"ו בשבט, המורכבת מ- 44 תאנים, שקדים וצימוקים, אם חייבים להיות לפחות 2 שקדים, לא יותר מתמר אחד, ומספר הצימוקים חייב להיות זוגי?
אם נסמן את מספר השקדים ב- x_1, את מספר התמרים ב- x_2 ואת מספר הצימוקים ב- x_3, הרי מספר האפשרויות הוא כמו מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3=44$ בהגבלות הבאות:

$$x_1 \in \{n|\, n \geq 2\} = A_1 \qquad x_2 \in \{0, 1\} = A_2 \qquad x_3 \in \{2n|\, n \in \mathbf{N}\} = A_3$$

דרך אפשרית לפתור את הבעיה היא לעשות רשימה מסודרת של כל השלשות האפשריות. בשביל זה יש צורך בשיטת ארגון כלשהי. אבחנה מרכזית, שנעשתה פה (ושקל להיווכח בנכונותה), היא, שהמספר המבוקש יהיה בדיוק המקדם של x^{44} בפיתוח הפולינום: $(x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{44})(1+x)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{44})$.

פתיחת סוגריים בצורה השיטתית הרגילה וכינוס יתנו לכן את התשובה המבוקשת. בגישה זו הפולינומים מהווים רק כלי ארגוני ולא יותר. תועלתם כשמספר הפירות בסלסלה יהיה 4444 (ולא 44) מוטלת בספק רב. ברם, נוכל לצעוד צעד גדול קדימה אם נשים לב שאינטואיטיבית, התשובה המבוקשת עדיין תהיה המקדם של x^{44} ***גם אם לא נעצור ב-*** x^{44} ***בפולינום הראשון והשלישי במכפלה הנ"ל***. כלומר, התשובה היא המקדם של x^{44} בפיתוח:

$$(x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{44}+x^{45}+\ldots)(1+x)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{44}+x^{46}+\ldots)$$

למעשה, קל לראות, *שלכל* n שנציב במקום 44 הנ"ל, התשובה לבעיה תהיה המקדם של x^n בפיתוח של

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)(1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)$$

אם נתייחס עתה למכפלה זו כמגדירה פונקציה, ולכל אחד מהגורמים בה נתייחס כפונקציה יוצרת של סדרת המקדמים באותו גורם, הרי עיקרון המכפלה קובע בפירוש, שהמקדם של x^n נותן אכן את התשובה המבוקשת. כלומר: המקדם יהיה בדיוק מספר הקומבינציות $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ כך ש- $x_1 + x_2 + x_3 = n$ וכך ש- $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ ו- $x_3 \in A_3$.
עתה:

$$\lambda x.\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \lambda x.\frac{x^2}{1-x} \qquad (= \lambda x.\ x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)$$

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \lambda x.\frac{1}{1-x^2} \qquad (= \lambda x.\ 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)$$

לכן

$$\lambda x.\ (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)(1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = \lambda x.\frac{x^2}{1-x} \cdot (1 + x) \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

כדי לפתור את הבעיה המקורית, עלינו למצוא איזו סדרה יוצרת פונקציה זו, ואז לראות מיהו המקדם של x^{44}! הבה נעשה זאת*:

$$\lambda x.\frac{x^2}{1-x} \cdot (1 + x) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \lambda x.\frac{x^2(1+x)}{(1-x)(1-x)(1+x)} = \lambda x.\frac{x^2}{(1-x)^2} = \lambda x.\ x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

מסקנה:

אם נסמן ב- a_k את התשובה לשאלה עבור סלסלה בת k פירות, הרי:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ k-1 & k > 0 \end{cases}$$

בפרט $a_{44} = 44 - 1 = 43$, וזוהי התשובה לבעיה.

* מכאן ולהבא נשתמש באופן חופשי בנוסחאות בטבלה ד.5 לצורך מציאת הסדרה, שפונקציה מסוימת יוצרת, או מציאת הפונקציה היוצרת סדרה נתונה. ברוב המקרים לא נטרח לציין באיזו נוסחה אנו משתמשים, או שבכלל אנו משתמשים בטבלה זו.

נשים לב שבבעיה זו:

$\lambda x.\ x^2+x^3+x^4 \ldots$ היא הפונקציה היוצרת של $\chi_{\{n|n\geq 2\}}$ $\left(=\lambda_k\cdot\begin{cases}0 & k<2\\ 1 & k\geq 2\end{cases}\right)$

$\lambda x.\ 1+x$ היא הפונקציה היוצרת של $\chi_{\{0,1\}}$ $\left(=\lambda_k\cdot\begin{cases}1 & k\in\{0,1\}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\right)$

$\lambda x.\ 1+x^2+x^4+x^6 \ldots$ היא הפונקציה היוצרת של $\chi_{\mathrm{N}_{\mathrm{even}}}$ $\left(=\lambda_k\cdot\begin{cases}1 & k \text{ זוגי}\\ 0 & k \text{ אי זוגי}\end{cases}\right)$

(בכותבנו $\chi_{\mathrm{N}_{\mathrm{even}}}$ וכו' כוונתנו, כמובן, ל- $\chi^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}_{\mathrm{even}}}$).

אנו מצאנו אפוא את הסדרה הנוצרת על-ידי $\chi_{\mathrm{N}_{\mathrm{even}}}\cdot\chi_{\{0,1\}}\cdot\chi_{\{n|n\geq 2\}}$.

הבה נכליל. הבעיה שעסקנו בה פה היא בעיה מהסוג הכללי הבא:

בחירות עם הגבלות וללא חשיבות לסדר:

בעיה:

נניח $B=\{t_1,\ldots,t_n\}$ קבוצה עם n עצמים ו- $A_1,\ldots,A_n\in P(\mathbf{N})$.
כמה אפשרויות יש לבחור k עצמים מתוך B (אולי עם חזרות, אך בלי חשיבות לסדר), אם מספר הפעמים ש- t_i נבחר חייב להיות שייך ל- A_i ?

(בדוגמה: $B=$ {צימוק, תמר, שקד} ו- $A_3=\mathbf{N}_{\mathrm{even}}$, $A_2=\{0,1\}$, $A_1=\{n|\,n\geq 2\}$).

ניסוח אקוויוולנטי:

אם x_i $(i=1,\ldots,n)$ הוא מספר הפעמים ש- t_i נבחר, אז הבעיה היא: כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k$$

בהגבלות, שלכל $1\leq i\leq n$ $x_i\in A_i$?

ניסוח אקוויוולנטי: $|\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|\,x_1+x_2+\ldots+x_n=k\}|=\,?$

שיטת הפתרון (לפי אותו הסק שהפעלנו במקרה הפרטי של הדוגמה הקודמת):

אם a_k מסמן את מספר הפתרונות עבור k (ל- $A_1, \ldots, A_n$ נתונים), אז הפונקציה היוצרת של $\lambda k.\, a_k$ היא מכפלת הפונקציות היוצרות של χ_{A_i} $(i = 1, \ldots, n)$.

במלים אחרות: אם F_1 יוצרת את χ_{A_1},

F_2 יוצרת את χ_{A_2},

$\vdots$

F_n יוצרת את χ_{A_n},

אז $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n$ יוצרת את $\lambda k.\, a_k$.

פתרון הבעיה דורש אפוא למצוא תחילה את $F_1, \ldots, F_n$ ואחר-כך את הסדרה הנוצרת על-ידי $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n$ (בדרך נצטרך אפוא להתמודד עם שני סוגי הבעיות הטכניות, הקשורות בשימוש בפונקציות יוצרות!).

דוגמאות נוספות:

(1) $\boldsymbol{S(n, k)}$: כאן מדובר בבחירת k עצמים מתוך n ללא כל הגבלות. כלומר: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \mathbf{N}$. עתה $\chi_{\mathbf{N}} = \lambda n.\, 1$, לכן $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = \lambda x.\dfrac{1}{1-x}$.
הפונקציה היוצרת של $\lambda k.\, S(n, k)$ היא לכן $\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^n}$. הסדרה, שיוצרת פונקציה זו, היא (לפי (6) של טבלה ד.5):

$$\lambda k.\binom{n+k-1}{k}$$

לכן $S(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$ לכל n ו- k.

הערה:

1. זוהי ***הוכחה חדשה*** של נוסחה זו!
2. חשוב להבין, שבדוגמה זו $a_k = S(n, k)$, ו- n משמש כאן לכן ***כפרמטר*** !

(2) $\boldsymbol{C(n, k)}$: כאן מדובר בבחירת k עצמים מתוך n לא חזרות. במלים אחרות: כל עצם יכול להיבחר פעם אחת לכל היותר. לכן $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \{0, 1\}$. מכאן שלכל $1 \le i \le n$ $\chi_{A_i} = \lambda x.1 + x$. הפונקציה היוצרת של $\lambda k.\, C(n, k)$ היא אפוא

$\lambda x.\,(1+x)^n$. הסדרה, שפונקציה זו יוצרת, היא $\lambda k.\binom{n}{k}$. (שוב, n הוא ***פרמטר***

כאן!). לכן $\binom{n}{k} = C(n,k)$ (וזה נכון גם ל- $k > n$!).

(3) נחזור לדוגמה בה התחלנו פרק זה. כמה אפשרויות יש לבחור 173 מספרים מתוך $\{0, 1, 2\}$, אם 0 חייב להיבחר מספר זוגי של פעמים?

כאן $n = 3$, $k = 173$, ו-

$A_1 = \mathbf{N}_{\text{even}}$, והפונקציה היוצרת היא: $\lambda x.\,(1 + x^2 + x^4 + \ldots) = \lambda x.\dfrac{1}{1-x^2}$.

$A_2 = A_3 = \mathbf{N}$, והפונקציה היוצרת היא: $\lambda x.\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = \lambda x.\dfrac{1}{1-x}$.

הפונקציה היוצרת את $\lambda k.\,a_k$ היא לכן: $\lambda x.\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

הבה נמצא איזו סדרה פונקציה זו יוצרת:

$$\lambda x.\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2} = \lambda x.\frac{1}{(1+x)(1-x)(1-x)^2} = \lambda x.\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}$$

עלינו לחפש לכן A, B, C, D כך שמתקיימת הזהות:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2} + \frac{D}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \qquad A(1-x)^3 + B(1+x)(1-x)^2 + C(1+x)(1-x) + D(1+x) = 1$$

נציב $x = 1$. נקבל: $2D = 1$

נציב $x = -1$. נקבל: $8A = 1$

נציב $x = 0$. נקבל: $A + B + C + D = 1$

נציב $x = 2$. נקבל: $-A + 3B - 3C + 3D = 1$

פתרון המשוואות נותן:

$$A = \frac{1}{8} \qquad B = \frac{1}{8} \qquad C = \frac{2}{8} \qquad D = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

לכן:

$$\lambda x.\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \lambda x.\frac{1}{8}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{4}{(1-x)^3}\right]$$

הסדרה הנוצרת היא לכן:

$$\lambda k.\frac{1}{8}\left[(-1)^k + 1 + 2(k+1) + 4\binom{k+2}{2}\right]$$

$$= \lambda k.\frac{2k^2 + 8k + 7 + (-1)^k}{8}$$

מספר האפשרויות עבור k מסוים הוא לכן $\frac{2k^2 + 8k + 7 + (-1)^k}{8}$. אם נציב $k = 173$, נקבל 7656, וזוהי התשובה המבוקשת.

הכללה: במקום משוואה מהצורה $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ עם הגבלות $A_1, \ldots, A_n$, נוכל לפתור דבר כללי יותר: משוואה מהצורה $m_1x_1 + \ldots + m_nx_n = k$ $(m_i \in \mathbf{N})$ עם הגבלות דומות.
ההצבה $m_ix_i = y_i$ תעביר אותנו כאן למשוואה מהצורה $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k$ עם ההגבלות $y_i \in B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, כאשר $B_i = \{m_ij \mid j \in A_i\}$, וזוהי בעיה מהסוג, שאנו כבר יודעים איך להתמודד עמו.

דוגמה:
כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה $2x_1 + x_2 + x_3 = 173$?

תשובה:
ההצבה $y_1 = 2x_1$ תביא אותנו בדיוק לדוגמה הקודמת. התשובה היא לכן 7656.

(4) הבה נחזור עתה לבעיה, שפתרנו בפרק הקודם בעזרת ***עיקרון ההכלה וההפרדה***:
כמה פתרונות במספרים ***שלמים*** יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

בהגבלות $1 \le x_1 \le 2$, $-2 \le x_2 \le 4$ ו- $2 \le x_3 \le 4$?

פתרון:
כמו בשיטה הקודמת, גם כאן כדאי להתחיל באותו תהליך נרמול המוביל לבעיה על מספרים טבעיים. כלומר, גם כאן נתחיל בהגדרת משתנים חדשים:
$y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 + 2$ ו- $y_3 = x_3 - 2$, וכמו שם הבעיה צריכה להיות: מה מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 = 8$ בהגבלות:

$1 \le y_1 \le 0$, $6 \le y_2 \le 0$ ו- $2 \le y_3 \le 0$. זוהי כבר בעיה מהסוג, בו עסקנו בדוגמאות האחרונות. כאן: $A_1 = \{0,1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ו- $A_3 = \{0, 1, 2\}$. מכאן, שאם a_k מספר הפתרונות עבור $y_1 + y_2 + y_3 = k$ (בהגבלות הנ"ל), אז פונקציה יוצרת עבור $\lambda k. a_k$ היא $\lambda x. (1 + x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^6)(1 + x + x^2)$. במקרה זה, במקום למצוא נוסחה כללית עבור a_k , עדיף אולי למצוא ישירות את a_8 , כלומר: את המקדם של x^8 בפיתוח המכפלה הנ"ל. בדוגמה פשוטה זו אפשר לפתוח פשוט את הסוגריים ולכנס. הבה נעשה זאת אבל בדרך, שתהיה עדיפה עם דוגמאות מסובכות יותר. המפתח הוא שימוש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

$$\lambda x. (1 + x)(1 + x + \ldots + x^6)(1 + x + x^2) = \lambda x. \frac{1 - x^2}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^7}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^3}{1 - x}$$
$$= \lambda x. (1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^7) \cdot \frac{1}{(1 - x)^3}$$
$$= \lambda x. (1 - x^2 - x^3 + x^5 - x^7 + \text{(חזקות גדולות מ- 8)}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n$$

המקדם של x^8 יהיה לכן: $3 = \binom{3}{1} - \binom{5}{3} + \binom{7}{5} - \binom{8}{6} - \binom{10}{8}$.

(למשל: את $-x^3$ שבסוגריים נצטרך להכפיל ב- x^5 מתוך הסכום האינסופי. לכן הוא יתרום $-\binom{7}{5} = (-1) \cdot \binom{5+2}{5}$ למקדם של x^8.)

השוואה עם התשובה שקיבלנו לפי עיקרון ההכלה וההפרדה תראה, שקיבלנו שם אותו סכום בדיוק! זהו מצב אופייני: שימוש בשיטה זו, שעשינו כאן בפרוטרוט, ייתן אכן תמיד אותו סכום, שנותן השימוש בעיקרון ההכלה וההפרדה. עם זאת, פה מגוון האפשרויות שלנו גדול יותר. בין פתיחה כללית של הסוגריים (הדרך הכי פחות מתוחכמת) ובין הדרך של שימוש בלתי מתפשר בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית, קיימות דרכי ביניים. כאן יכולנו, למשל, לעשות גם את החישוב הבא:

$$\lambda x. (1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + \ldots + x^6) = \lambda x. (1 + x) \cdot \frac{1 - x^3}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^7}{1 - x}$$
$$= \lambda x. (1 + x)(1 - x^3 - x^7 + x^{10}) \cdot \frac{1}{1 - x^2}$$
$$= \lambda x. (1 + x - x^3 - x^4 - x^7 - x^8 + \text{(חזקות גדולות מ- 8)}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n$$

והמקדם של x^8 יהיה לכן: $3 = 1 - 2 - 5 - 6 - 8 + 9$.

ב. בחירות עם הגבלות ועם חשיבות לסדר

נתחיל גם כאן בדוגמה: מה מספר האפשרויות לסדר בשורה 11 כדורים כחולים, אדומים וירוקים, אם מספר הכדורים הכחולים והאדומים חייב להיות חזקה של 3 וחייב גם להיות לפחות כדור ירוק אחד?

פתרון:

נסמן את ההתפלגות האפשרית של מספר הכדורים:

ירוקים	כחולים	אדומים
9	1	1
7	3	1
7	1	3
5	3	3
1	1	9
1	9	1

לאור מה שלמדנו בעבר על סידור כדורים בשורה, נקבל לכן:

$$a_{11} = \frac{11!}{9!1!1!} + \frac{11!}{7!3!1!} + \frac{11!}{7!1!3!} + \frac{11!}{5!3!3!} + \frac{11!}{1!1!9!} + \frac{11!}{1!9!1!}$$

כדי לראות איך ניתן למצוא פתרון כללי נוח, נשים לב ש-

$$\frac{a_{11}}{11!} = \frac{1}{9!1!1!} + \frac{1}{7!3!1!} + \frac{1}{7!1!3!} + \frac{1}{5!3!3!} + \frac{1}{1!1!9!} + \frac{1}{1!9!1!}$$

נקודת המפתח היא עתה, שלפי עיקרון הכפל של פונקציות יוצרות, אגף ימין של המשוואה האחרונה הוא בדיוק המקדם של x^{11} בפיתוח של:

$$\lambda x.\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{27}}{27!}+\ldots\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{27}}{27!}+\ldots\right)$$

ברור אבל, שבמקום 11 יכולנו לקחת כאן כל k אחר. כמו כן ברור, שאם נגדיר:

$$A_2 = A_3 = \{3^n \mid n \in \mathbf{N}\} \quad , \quad A_1 = \{n \mid n \geq 1\}$$

אז הפונקציה למעלה היא בדיוק מכפלת הפונקציות היוצרות של $\lambda n.\frac{\chi_{A_i}(n)}{n!}$.

הבה נכליל לעיקרון כללי:

בעיה:

נניח $B = \{t_1, \ldots, t_n\}$ קבוצה עם n עצמים, ו- $A_1, \ldots, A_n \in P(\mathbf{N})$. כמה אפשרויות יש לבחור k עצמים מתוך B עם חשיבות לסדר (ואולי עם חזרות), אם מספר הפעמים ש- t_i נבחר חייב להיות שייך ל- A_i ?

ניסוח מדויק יותר: מה המספר של הרשימות באורך k של איברים מ- B, שבהן מספר הפעמים ש- t_i מופיע שייך ל- A_i ? דהיינו:

$$|\{f \in \{1, \ldots, k\} \to B \mid \forall 1 \leq i \leq n.\ |f^{-1}[\{t_i\}]| \in A_i\}| = ?$$

שיטת הפתרון: אם a_k מסמן את מספר הפתרונות של הבעיה (עבור $A_1, \ldots, A_n$ נתונים), אז הפונקציה היוצרת של $\lambda k.\frac{a_k}{k!}$ היא מכפלת הפונקציות היוצרות* של $\lambda k.\frac{\chi_{A_i}(k)}{k!}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

הסבר: נניח ש- k_i הוא מספר הפעמים ש- t_i נבחר. ברור ש- $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. עתה, מספר הסידורים, שה- n-יה $\langle k_1, \ldots, k_n\rangle$ מספקת, הוא $\frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$.

ברור לכן, שאם נסמן:

$$I_k = \left\{\langle k_1, \ldots, k_n\rangle \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} k_i = k\right\}$$

$$J_k = \{\langle k_1, \ldots, k_n\rangle \in I_k \mid k_1 \in A_1 \wedge k_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge k_n \in A_n\}$$

אז:

$$a_k = \sum_{\langle k_1,\ldots k_n\rangle \in J_k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!} = k! \cdot \sum_{\langle k_1,\ldots k_n\rangle \in J_k} \frac{1}{k_1!\ldots k_n!}$$

---

* ממשפטים בחדו"א נובע בקלות, שכל הפונקציות היוצרות האלה אכן קיימות. בדוגמאות הספציפיות זה ממילא יהיה ברור ממה שאנו כבר יודעים.

ולכן:

$$\frac{a_k}{k!} = \sum_{\langle k_1,\ldots k_n\rangle \in J_k} \frac{1}{k_1!}\cdot\frac{1}{k_2!}\cdots\frac{1}{k_n!} = \sum_{\langle k_1,\ldots k_n\rangle \in I_k} \frac{\chi_{A_1}(k_1)}{k_1!}\cdot\frac{\chi_{A_2}(k_2)}{k_2!}\cdots\frac{\chi_{A_n}(k_n)}{k_n!}$$

מעיקרון הכפל (טבלה ד.4, (6)) נובע לכן, שאם G_i יוצרת את $\lambda x.\frac{\chi_{A_i}(k)}{k!}$ $(i = 1, \ldots, n)$,

אז $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n$ יוצרת את $\lambda k.\frac{a_k}{k!}$.

הערה:

כדי לפשט את הניסוח נהוג לקרוא לפונקציה יוצרת של הסדרה $\lambda k.\frac{b_k}{k!}$ בשם *פונקציה יוצרת מעריכית* של הסדרה $\lambda k.\ b_k$. בטרמינולוגיה זו העיקרון שהסברנו זה עתה קובע, שהפונקציה היוצרת מעריכית את $\lambda k.\ a_k$ מהבעיה היא מכפלת הפונקציות היוצרות מעריכית את χ_{A_i}. כדאי לציין, שמהמשפט היסודי על פונקציות יוצרות נובע, שאם F יוצרת בכלל איזו סדרה, אז היא גם פונקציה יוצרת מעריכית של $\lambda n.\ F^{(n)}(0)$, ושלה בלבד. כמו כן, אם F יוצרת את $\lambda k.\ a_k$, אז F יוצרת מעריכית את $\lambda k.\ k!a_k$.

דוגמאות

(1) מהו מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עם חשיבות לסדר (ועם חזרות)?

פתרון:

כאן אין הגבלות, דהיינו $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \mathbf{N}$. לכן $\chi_{A_i}(k) = 1$ לכל $k \in \mathbf{N}$ ולכל $1 \leq i \leq n$. מכאן שהפונקציה היוצרת של $\lambda k.\frac{\chi_{A_i}(k)}{k!}$ היא כאן הפונקציה היוצרת של $\lambda k.\frac{1}{k!}$, דהיינו: $\lambda x.\ e^x$. מכפלת n הפונקציות היוצרות תהיה לכן $\lambda x.\ (e^x)^n = \lambda x.\ e^{nx}$ (n כאן הוא שוב *פרמטר* !).

עתה, $\lambda x.\ e^{nx}$ יוצרת את $\lambda x.\frac{n^k}{k!}$, ולכן היא יוצרת מעריכית את $\lambda k.\ n^k$. מכאן שהתשובה היא n^k (תשובה זו ידועה לנו כבר, כמובן).

(2) $P(n, k)$: זהו מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עם חשיבות לסדר, כשמספר הפעמים שכל עצם יכול להיבחר הוא לכל היותר 1. מכאן, שבבעיה זו $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \{0, 1\}$. לכן פונקציה יוצרת עבור $\lambda k.\frac{\chi_{A_i}(k)}{k!}$ היא כאן $\lambda x.1 + \frac{x}{1!} = \lambda x.1 + x$ (לכל $1 \le i \le n$). ההכפלה של n פונקציות כאלו נותנת את $\lambda x.\ (1 + x)^n$. פונקציה זו יוצרת את $\lambda k.\binom{n}{k}$, ולכן היא יוצרת מעריכית את $\lambda k.k!\binom{n}{k}$. מכאן: $P(n,k) = k!\binom{n}{k}$, דהיינו:

$$P(n,k) = \begin{cases} 0 & k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!} & 0 \le k \le n \end{cases}$$

הערה:

הנוסחה $P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k!$ אינה אלא מקרה פרטי של הזהות: $P(a, b) = C(a, b) \cdot E(b)$.

(3) הבה נפתור עתה בעזרת השיטה האחרונה בעיה, שפתרנו בעבר בעזרת עיקרון ההכלה וההפרדה: כמה מספרים בני k ספרות אפשר להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4 ו- 5, אם 1, 2, 3 חייבים להופיע?

כאן $n = 5$ ו-

$$A_1 = A_2 = A_3 = \{n \mid n \ge 1\} \qquad A_4 = A_5 = \mathbf{N}$$

לכן פונקציה יוצרת מעריכית של χ_{A_i} $(i = 1, 2, 3)$ היא

$$\lambda x.\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = \lambda x.e^x - 1$$

בעוד פונקציה יוצרת מעריכית של χ_{A_4} ו- χ_{A_5} היא $\lambda x.\ e^x$.

מכאן שפונקציה יוצרת מעריכית של $\lambda k.\ a_k$ היא:

$$\lambda x.\ (e^x - 1)^3 \cdot (e^x)^2 = \lambda x.\ (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)e^{2x} =$$
$$= \lambda x.\ e^{5x} - 3 \cdot e^{4x} + 3 \cdot e^{3x} - e^{2x}$$

פונקציה זו יוצרת את $\lambda k.\dfrac{5^k - 3 \cdot 4^k + 3 \cdot 3^k - 2^k}{k!}$.

לכן $a_k = 5^k - 3 \cdot 4^k + 3 \cdot 3^k - 2^k$. (זו גם התשובה, שקיבלנו בפרק ההוא, כמובן).

(4) מהו מספר הרשימות באורך n, שאפשר להרכיב מ- $\{0, 1, 2, 3\}$, ושיש בהן מספר זוגי של אפסים?

פתרון:

כאן $n = 4$. $A_0 = \{2n | n \in \mathbf{N}\}$, $A_1 = A_2 = A_3 = \mathbf{N}$.

פונקציה יוצרת מעריכית של χ_{A_1}, χ_{A_2} ו- χ_{A_3} היא כאן שוב $\lambda x.\ e^x$.

לעומת זאת, פונקציה יוצרת מעריכית של χ_{A_0} היא כאן:

$$\lambda x.\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = \lambda x.\cosh(x) = \lambda x.\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(ראה טבלה ד.5, (11)). לכן, אם a_n מסמן את הפתרון, אז פונקציה מעריכית יוצרת עבור $\lambda n.\ a_n$ היא: $\lambda x.\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot (e^x)^3 = \lambda x.\dfrac{e^{4x} + e^{2x}}{2}$. עתה:

$$\lambda x.\ \frac{e^{4x} + e^{2x}}{2} = \lambda x.\ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n\right) = \lambda x.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{2} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

לכן $a_n = \dfrac{4^n + 2^n}{2}$ לכל n.

הערה:

יכולנו כמובן לקרוא ישירות תשובה זו מ- $\lambda x.\frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{2x}$, כמו שעשינו בדוגמה הקודמת.

ד.5. נוסחאות נסיגה

הקדמה

בפרק זה נציג שיטת טיפול בסדרות, שיש לה חשיבות עצומה בתכנות. כאן ניישם אותה בעיקר לצורך פתרון בעיות קומבינטוריות.
נפתח, כרגיל, בדוגמה:

בעיה
כמה מחרוזות (או רשימות) של "0" ו- "1" שאורכן 30 ניתן להרכיב, בתנאי שלא יהיו בהן שני אפסים רצופים?

ניתוח:
עקרונית, זוהי בעיה מהסוג של בחירת k עצמים מתוך n (כאשר כאן $n = 2$) עם חשיבות לסדר ועם הגבלות. לרוע המזל, ההגבלה כאן היא מסוג שונה מאלו, בהן טיפלנו בפרק הקודם. כך אין כאן הגבלה על מספר הפעמים ש- "0" יכול להופיע: הוא *יכול* להופיע, למשל, בדיוק פעמיים, אך לא פעמיים ברציפות! השיטות של הפרק הקודם לא יועילו לכן כאן.

כיצד בכל זאת נתמודד עם הבעיה? ראשית, ננסה *להכליל* אותה (כבר ראינו יעילות גישה זו בעבר!). נסמן אפוא ב- a_n את מספר הפתרונות עבור n כלשהו, לאו דווקא 30. שנית, ננסה לעשות ניתוח למקרים. ובכן, אם $n > 0$ ונשים בראש המחרוזת "1", אז אחר-כך נצטרך לשים מחרוזת באורך $n - 1$ מאותו סוג בדיוק. לעומת זאת, אם נשים בראש "0", אז אחריו נהיה חייבים (אם $n > 1$) לשים 1, ואחר-כך נהיה חופשיים לשים מחרוזת כלשהי מאותו סוג שאורכה $n - 2$. מספר האפשרויות במקרה הראשון הוא a_{n-1} ובשני הינו a_{n-2} (בהנחה ש- $n \geq 2$). אנו מקבלים אפוא, שאם $n \geq 2$, אז מתקיים הקשר:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

אנו נוכל למצוא אפוא את a_{30} בתנאי שנמצא תחילה את a_{29} ו- a_{28}, ואותם נוכל למצוא, בתנאי שנמצא את אלו שקודמים להם, וכן הלאה. אם נמשיך כך לסגת, נגיע

לבסוף לצורך למצוא את a_0 ו- a_1. אותם, למרבה השמחה, קל למצוא ישירות. $a_0 = 1$ (המחרוזת הריקה עומדת בדרישות!) ו- $a_1 = 2$. מנקודת מוצא זו נוכל לצאת בדרך חזרה: $a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_3 = 3 + 2 = 5$, $a_4 = 5 + 3 = 8$, וכן הלאה. תוך פרק זמן של מספר דקות נגיע (אפילו ידנית!) ל- a_{30}. התהליך אבל קל במיוחד לתכנות, ובעזרת תוכנות מחשב נוכל בקלות ובמהירות למצוא את a_n גם ל- n-ים גדולים.

אם נסכם: מהותית, פתרנו את הבעיה ל- n כלשהו על-ידי גילוי התנאים:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

תנאים אלו מאפשרים מציאת הערך המספרי של a_{30} ביעילות ובקלות. הסדרה $\lambda n.\, a_n$ המתקבלת: $\langle 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \rangle$ היא, אגב, סדרה מפורסמת מאוד, הידועה בשם "סדרת פיבונאצ'י".*

שתי נקודות מהותיות יש להעיר בקשר למה שעשינו:

(א) תיאור הסדרה בצורה שעשינו למעלה הוא, באופן עקרוני ו*מעשי*, פתרון לא רע בכלל של הבעיה המקורית, כיוון שהוא מאפשר חישוב יעיל של ערכי הסדרה – וזה עיקר מטרתנו.

(ב) עם זאת, זוהי בהחלט צורת תיאור/ייצוג חדשה של פונקציות, שהתחום שלהן הוא **N**, בה לא השתמשנו עד כה. עד עתה תיארנו את כל הפונקציות על-ידי תיאור *מפורש*, כלומר: על-ידי ביטוי-λ. חשוב להבין אבל, שאת הכתוב למעלה *אי-אפשר* לכתוב כביטוי λ! בפרט, אם נסמן $f = \lambda n.\, a_n$, אז ה"הגדרה" הבאה של f *אינה* הגדרה על-ידי ביטוי-λ:

$$(**) \quad f = \lambda n \in \mathbf{N}\,.\ \text{If } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else if } n = 1 \text{ then } 2 \text{ else } f(n-1) + f(n-2)$$

הסיבה לכך היא, שהביטוי ה"מוגדר", f, מופיע בהגדרה שלו עצמו. באופן תקין, מחשב שהיה בא ליישם הגדרה זו בחישוב $f(10)$, למשל, היה מגיע לצורך בחישוב $f(9) + f(8)$, ואז הוא היה מפעיל לצורך זה את הערך של f, שהיה לו בזיכרון

* למעשה, סדרת פיבונאצ'י היא לא בדיוק זו אלא $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \rangle$. כלומר, אם $\lambda n.\, F_n$ היא סדרת פיבונאצ'י ה"רשמית", אז הסדרה שמצאנו היא בדיוק $\lambda n.\, F_{n+2}$, ולא $\lambda n.\, F_n$.

לפני הכנסת ה"הגדרה" הזו! (אם אין ערך כזה, אז מה שהוא היה עושה תלוי באימפלמנטציה: הוא יכול לעצור עם הודעת "error" או להפעיל ברירת-מחדל כמו $f = \lambda n.\, 0$). המחשב *לא* היה מקשר בין ה- "f"-ים המופיעים באגף ימין ובין ה- "f" המופיע בצד שמאל של השוויון (באופן דומה במקצת לכך, שבביצוע פקודת ההשמה $x := x + 1$, המחשב משתמש בערך של x *לפני* ביצוע פקודת ההשמה לצורך חישוב ערכו *אחרי* ביצוע הפקודה).

כדי שהנקודה תובן טוב יותר, הבה ננסה לעשות משהו אנלוגי עם צורת ההגדרה המפורשת, המקובלת עלינו עבור קבוצות. ובכן, ה"הגדרה" הבאה גם היא אינה נחשבת כשימוש תקין ב- $\{\_\_|\ldots\}$ לצורך הגדרת קבוצה A :

$$(***)\quad A = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 0 \vee (n \geq 2 \wedge (n-2)) \in A\}$$

העובדה שתיאורים של סדרה כמו ב- (*) למעלה אינם ניתנים לתרגום לביטויי-λ, אין פירושה, שאי-אפשר להשתמש בהם לצורך הגדרת פונקציות. תיאורים כאלה ידועים בשם *הגדרות רקורסיביות* של פונקציות, והם נשמת-אפן של שפות תכנות פונקציונליות (כמו SCHEME). האימפלמנטציה שלהן פשוט לא נעשית דרך ביטויי-λ, אלא דרך אופרטורים מסובכים יותר, שלא כאן המקום והזמן לתאר אותם. (גם דברים כמו (***) מתורגמים לעתים להגדרות רקורסיביות של *קבוצות*, אך גם לכך לא ניכנס כרגע).

אם אי-אפשר להסתכל על (**) ו- (***) בתור הגדרות, אפשר בהחלט להסתכל עליהם בתור *משוואות*. כך, אם נראה ב- (***) משוואה, ש- A הוא הנעלם שלה, הרי למשוואה זו יש פתרון יחיד: $A = \mathbf{N}_{\text{even}}$ (נא לשים לב: מדובר במשוואה, שהנעלם בה הוא *קבוצה*, לא מספר!). בדומה גם את (**) אפשר לראות *כמשוואה*, שסדרת פיבונאצ'י היא הפתרון היחיד שלה (כאן הנעלם הוא *פונקציה* מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$!). למעשה, אנו אומרים, שפונקציה מוגדרת בצורה רקורסיבית, אם היא מוגדרת על-ידי משוואה כמו ב- (**), שיש לה פתרון יחיד, ופתרון זה ניתן לחישוב מתוך המשוואה (כשמדובר בפונקציה f "ניתנות לחישוב" פירושה האפשרות לחשב את ערכי $f(x)$ לכל x בתחום הפונקציה). לא תמיד, אומנם, כשרושמים משוואה בסגנון (**) ברור אם זה המצב או לא. לכן, לא לכל תכנית שכותבים ב- SCHEME אפשר תמיד להכריע, אם היא מגדירה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$, או לא. ברם, במקרים רבים זה אפשרי ואפילו קל, ומיד נציין מקרה אחד כזה, שהוא חשוב במיוחד!

נתחיל אבל בלימוד של סימונים מקובלים בנושא. את (**) אפשר לרשום גם בצורה:

$$X = \lambda n \in \mathbf{N}. \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ X(n-1)+X(n-2) & n \ge 2 \end{cases}$$

(צורה זו מחזקת את האינטואיציה, שמדובר למעשה ב*משוואה*).

במקום זאת מקובל יותר לכתוב:

$$\begin{cases} n \ge 2 \Rightarrow \qquad X(n) = X(n-2) + X(n-1) \\ \qquad\qquad\quad X(0) = 1 \\ \qquad\qquad\quad X(1) = 2 \end{cases}$$

(צורה זו הופכת למעשה את המערכת המקורית ל*מערכת* של משוואות, שאחת מהן היא בבירור העיקרית – והשאר פשוטות ביותר. עוד נשוב לכך).

עתה, ברוב המקרים מקובל לכתוב a_n (או b_n , או c_n ...) במקום $X(n)$, וכותבים, כמו ב- (*) למעלה:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \ge 2) \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

בצורה זו מְטשטשת במקצת המשוואה, ומודגשת יותר פתירותה, דהיינו: האפשרות לחשב $\lambda n.\, a_n$ מתוך המשוואות הללו.
חשוב לזכור שכל הצורות הללו הן שקולות![*]

העובדה, שלמשוואה (או מערכת משוואות) כנ"ל יש פתרון יחיד, היא מקרה פרטי של המשפט הבא:

---

[*] צורה שקולה נוספת היא לכתוב $a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n-2}$ במקום "$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ עבור $n \ge 2$".

משפט:

תהי A קבוצה. יהיו $c_0, \ldots, c_{k-1}$ איברים של A, ותהי F פונקציה $(k+1)$-מקומית מ- $\mathbf{N} \times A \times A \times \ldots \times A$ ל- A. אז ***קיימת*** פונקציה X ***יחידה*** מ- $\mathbf{N}$ ל- A כך ש-

(א) $X(n) = c_n$ ל- $n = 0, \ldots, k-1$

(ב) $X(n) = F(n, X(n-1), \ldots, X(n-k))$ ל- $n \geq k$.

בדוגמה שלנו, למשל, $A = \mathbf{N}$ (זה יהיה המצב ברוב הדוגמאות), $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ ו- $F = \lambda n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}.\ x + y$.

הגדרה

משוואה כללית מהצורה $X(n) = F(n, X(n-1), \ldots, X(n-k))$ נקראת ***נוסחת נסיגה***, או "משוואת נסיגה", כי היא מאפשרת חישוב ערכי $X(n)$ ל- $n \geq k$ על-ידי "נסיגה" לערכים קודמים של X. המספר k נקרא ***הסדר*** של נוסחת הנסיגה (או "משוואת הנסיגה"). תנאים מהצורה $X(n) = c_n$ (עבור n ו- c_n ***קונקרטיים***) נקראים ***תנאי התחלה***.

הערה:

למעשה, משוואת נסיגה היא משוואה מהצורה:

$$X / \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq k\} = \lambda n \in \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq k\}.\ F(n, X(n-1), \ldots, X(n-k))$$

בה הפונקציה X מ- $\mathbf{N}$ ל- A היא ***הנעלם***.

דוגמאות נוספות

(1) ניקח $A = \mathbf{N}$, $c_0 = 1$, $F = \lambda n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}.\ nx$. המשפט אומר שיש $X : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ יחידה כך ש-:

$$\begin{cases} X(0) = 1 \\ X(n) = n \cdot X(n-1) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

הפונקציה X היא כמובן $\lambda n.\ n!$. נשים לב, שכאן החישוב בעזרת נוסחת הנסיגה הוא הדרך היחידה, המוכרת לנו לחישוב פונקציה זו. כך לצורך חישוב $7!$ חייבים אנו לחשב תחילה את $6!$, ולהכפיל את התוצאה ב- 7.

(2) ניקח $A = R$, $c_0 = 3.5$, $F = \lambda n \in N,\ x \in \mathbf{R}^+ . \frac{x + 3/x}{2}$. לפי המשפט קיימת סדרה יחידה $\lambda n.\ a_n$, כך ש-

$$\begin{cases} a_0 = 3.5 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + 3/a_{n-1}}{2} \qquad (n \geq 1) \end{cases}$$

המיוחד בסדרה זו הוא ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ (כמו שמוכיחים בחדו"א).

הוכחת המשפט:

הוכחת היחידות היא קלה: אם G_1 ו- G_2 הם שני פתרונות, אז מוכיחים באינדוקציה על n ש- $G_1(n) = G_2(n)$ לכל n. מכאן ש- $G_1 = G_2$.

ניסוח *מדויק* של הוכחת הקיום מסובך יותר. נסתפק פה ב***אינטואיציה*** הברורה, שנוסחת הנסיגה יחד עם תנאי ההתחלה מאפשרים את חישוב $G(n)$ לכל n, ומכאן ש- G קיימת.

השימוש בקומבינטוריקה

לעתים קרובות, כשיש לנו בעיה קומבינטורית של מציאת מספר מסוים a_n (התלוי בפרמטר n), קשה לנו למצוא באופן ישיר נוסחה ל- a_n , או אפילו לחשב את ערכו באופן ספציפי. במקרה כזה ניתן לנסות לתאר את $\lambda n.\ a_n$ באופן רקורסיבי, כלומר: על-ידי נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה. הצלחה בכך פירושה, בדרך-כלל, שמצאנו דרך אפקטיבית לחישוב a_n לכל n שנחפוץ (בעיקר אם עומד לרשותנו מחשב). במלים אחרות: פתרנו, למעשה, את הבעיה.

דוגמאות:

(1) הדוגמה של סדרת פיבונאצ'י בה התחלנו פרק זה.

(2) הדוגמה מהפרק הקודם של מספר המחרוזות באורך n שאפשר לבנות מ- $\{0, 1, 2, 3\}$, שיש בהן מספר זוגי של אפסים:

פתרון רקורסיבי:
אם נשים בהתחלה 1, 2 או 3, הרי אחר-כך נוכל להשלים את המחרוזות בכל מקרה ב- a_{n-1} דרכים. אם נשים 0 בהתחלה, הרי אחר-כך נצטרך לשים מחרוזת באורך $n-1$ שיש בה מספר ***אי-זוגי*** של אפסים. מספר האפשרויות הוא $4^{n-1}-a_{n-1}$ (המספר הכללי של מחרוזות באורך $n-1$, המורכבות מ- $\{0, 1, 2, 3\}$, פחות מספר אלה מתוכן, שיש בהן מספר זוגי של אפסים). לכן, אם $n \geq 1$, אז

$$a_n = 3a_{n-1} + (4^{n-1} - a_{n-1})$$

כיוון ש- $a_0 = 1$ (המחרוזת הריקה היא כשרה), נקבל:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

אם נרצה את התשובה באופן ספציפי כש- $n = 5$, נקבל:

$a_3 = 2 \cdot 10 + 4^2 = 36$ $\quad$ $a_2 = 2 \cdot 3 + 4^1 = 10$ $\quad$ $a_1 = 2 \cdot 1 + 4^0 = 3$

$a_5 = 2 \cdot 136 + 4^4 = 528$ $\quad$ $a_4 = 2 \cdot 36 + 4^3 = 136$

(3) **מגדלי-האנוי**: זוהי בעיית תכנות קלאסית. הסיפור הוא, שיש לנו שלושה מוטות: א', ב' ו-ג'. על מוט א' מסודרות n טבעות שונות בגודלן, כשכל טבעת מונחת על טבעת גדולה ממנה. צעד חוקי הוא העברת הטבעת העליונה ממוט מסוים x אל מוט אחר y, בתנאי שהטבעת העליונה במוט y גדולה יותר מזו, שאנו מעבירים לשם, ובתנאי שהטבעת המועברת תושם על הטבעת העליונה הקודמת של y. הבעיה היא להעביר, בצעדים חוקיים בלבד, את כל הטבעות ממוט א' למוט ב' (כשאפשר, כמובן, להשתמש במוט ג' כעזר).
הפתרון הקלאסי הוא העברת $n-1$ טבעות ממוט א' למוט ג' בצעדים חוקיים בלבד (כאשר $n > 1$ ובהנחה שעבור $n-1$ טבעות אנו כבר יודעים לפתור). אחר-כך העברת הטבעת שנשארה ממוט א' למוט ב' (זה יהיה הצעד היחיד כש- $n = 1$), ולבסוף העברת $n-1$ הטבעות ממוט ג' למוט ב' בצעדים חוקיים בלבד.
הבעיה הקומבינטורית: כמה צעדים שיטה זו דורשת? (זה יותר בעיה באנליזה של אלגוריתמים/תכניות מאשר בקומבינטוריקה, אבל הגבול הינו מטושטש למדי).

מהתיאור למעלה ברור ש-:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad (n > 1) \end{cases}$$

(במקום להתחיל ב- $a_1 = 1$ אפשר להתחיל ב- $a_0 = 0$, ונוסחת הנסיגה תישאר נכונה!).

(4) בכמה אופנים ניתן להרכיב מחרוזות באורך n של "0" ו- "1", שלא מופיע בהן הצירוף "101"?

פתרון:

נסמן ב- a_n את המספר המבוקש, ובאופן זמני ב- b_n את מספר המחרוזות המותרות שמתחילות ב- "01".

ברור שאם $n \geq 1$, אז $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - b_{n-1})$ (או שהמחרוזת מתחילה ב- 0 (a_{n-1} אפשרויות), או שהיא מתחילה ב- 1, ואז אפשר לשים אחריה כל מחרוזת אחרת מותרת באורך $n-1$, בתנאי ***שאינה*** מתחילה ב- 01 ($a_{n-1} - b_{n-1}$ אפשרויות!).

כמו-כן, אם $n \geq 2$, אז

$$b_n = a_{n-2} - b_{n-2} \quad \text{(למה?)}$$

סך-הכל:

$$\begin{cases} n \geq 1 \;\Rightarrow\; a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1} & (1) \\ n \geq 2 \;\Rightarrow\; b_n = a_{n-2} - b_{n-2} & (2) \end{cases}$$

מ- (1) נובע ש- $a_{n+1} = 2a_n - b_n$ לכל n , ולכן $b_n = 2a_n - a_{n+1}$ לכל n .
מכאן שאם $n \geq 2$, אז $b_{n-2} = 2a_{n-2} - a_{n-1}$. הצבת הנוסחאות ל- b_n ול- b_{n-2} ב- (2) נותנת: $2a_n - a_{n+1} = a_{n-2} - (2a_{n-2} - a_{n-1})$ עבור $n \geq 2$, ומזה נקבל:

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{עבור } n \geq 2$$

לכן: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ לכל $n \geq 3$, וזוהי נוסחת נסיגה עבור $\lambda n.\, a_n$.
עבור $n = 0, 1, 2$ אפשר לראות ישירות ש- $a_2 = 4$, $a_1 = 2$, $a_0 = 1$. מפה נקבל בקלות, למשל, ש- $a_6 = 37$.

פתרון משוואות נסיגה בעזרת פונקציות יוצרות

כאמור למעלה, את ההגדרה של פונקציה בעזרת נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה, אפשר לראות גם *כמשוואה*. למרות שההצגה הרקורסיבית היא הצגה אפקטיבית של הפונקציה (ומספקת דרך אפקטיבית לחישובה), מעוניינים אנו לפעמים בהצגה *מפורשת*; דהיינו *הצגה בעזרת ביטוי-*λ. בז'רגון, המקובל בטקסטים בנושא, קוראים אכן בשם "פתרון" של משוואה רקורסיבית רק להצגה מפורשת, בעזרת ביטוי-λ, של הסדרה המספקת משוואה זו (רק לא משתמשים בהם בסימון-λ!).

עם זאת, העניינים אינם כה פשוטים. לא די לדרוש "ביטוי-λ". השאלה הנשאלת היא: באילו פונקציות נתיר להשתמש בביטוי-λ זה? התשובה היא, שאנו נחפש ביטוי-λ, המשתמש בפונקציות האלמנטריות הידועות מחדו"א, בפעולות המוכרות מחדו"א (כמו חיבור, כפל וכו'), בהרכבת פונקציות, וכן בפונקציה $\lambda n.\,n!$ – שהיא התוספת המיוחדת כאן. למעשה, כמו שציינו למעלה, פונקצית העצרת בעצמה מוגדרת על-ידי נוסחת נסיגה – אך לצורך המטרה של "פתרון" משוואות נסיגה נתייחס אליה כאל פונקציה בסיסית.

אחד מכלי הנשק העיקריים שלנו למציאת פתרון כזה הוא חיפוש פונקציה יוצרת עבור הסדרה $\lambda n.\,a_n$, המוגדרת על-ידי נוסחת הנסיגה ותנאי ההתחלה. חיפוש זה מתחיל בהנחה, ש-F היא פונקציה יוצרת כזו, ואחר-כך בא שימוש במה שידוע על $\lambda n.\,a_n$, בשביל למצוא *מועמדת* עבור F . אם הצלחנו, הרי בדרך-כלל אפשר להראות בקלות, ש-F זו שמצאנו אכן יוצרת סדרה, המקיימת את המשוואה (כולל תנאי ההתחלה). כיוון שמשפט הקיום והיחידות למעלה קובע, שלכל משוואה כזו יש רק סדרה אחת, שמקיימת אותה, הרי בהכרח F יוצרת את $\lambda n.\,a_n$ המבוקש. מה שנותר עוד לעשות הוא למצוא נוסחה מפורשת עבור הסדרה, ש-F יוצרת. בעיות מסוג זה פתרנו כבר בעבר.

נביא עתה מספר דוגמאות, שמהן יהיה ברור התהליך.

1) נתחיל בדוגמה של מגדלי האנוי. הסדרה $\lambda n.\,a_n$ שאנו מחפשים מקיימת:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 2a_{n-1}+1 & n>0 \end{cases}$$

נניח ש- F פונקציה יוצרת של $\lambda n.\, a_n$, אז $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

נציב את תנאי ההתחלה $a_0=0$. נקבל:

$$F(x)=0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

נציב עתה את נוסחת הנסיגה $a_n=2a_{n-1}+1$ (ל- $n\geq 1$). נקבל, של- x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(x)=2x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(x)=2x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$ (שינוי גבולות הסכום)

$$\Leftrightarrow \qquad F(x)=2x\cdot F(x)+\frac{x}{1-x}$$ (בהנחה ש- $|x|<1$)

$$\Leftrightarrow \qquad F(x)(1-2x)=\frac{x}{1-x}$$

ולכן בהכרח

$$F=\lambda x.\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

מה שמצאנו עד כה הוא, ש- $\lambda x.\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$ היא המועמדת האפשרית היחידה להיות פונקציה יוצרת של $\lambda n.\, a_n$. עתה, מכיוון שזו פונקציה רציונלית, אנו יודעים שהיא יוצרת סדרה כלשהי $\lambda n.\, b_n$. אם נלך אחורה בחישוב שעשינו, נקבל

שבהכרח $b_0 = 0$ וש- $b_n = 2b_{n-1} + 1$ ל- $n > 0$, דהיינו: $\lambda n.\, b_n = \lambda n.\, a_n$. לכן F זו אכן יוצרת את הסדרה, שאנו מחפשים. הבה נמצא עתה סדרה זו. בשלב ראשון עלינו למצוא, כזכור, A ו- B כך ש-

$$\frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

$$x = A(1-x) + B(1-2x)$$

קל לברר שכאן $A = 1$ ו- $B = -1$. לכן

$$\lambda x.\frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \lambda x.\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

ממה שלמדנו בפרק הקודם ברור, שפונקציה זו יוצרת את הסדרה $\lambda n.\, 2^n - 1$. מספר הצעדים הדרוש להעברת n טבעות בשיטה (אלגוריתם) שהוצעה למעלה הוא לכן $2^n - 1$ (לא קשה, אגב, להוכיח, שזהו מספר *אופטימלי*, דהיינו: אי-אפשר לעשות זאת בפחות צעדים, ולא משנה באיזו שיטה נקוט).

הערה חשובה:
השיקול, שהפעלנו בדוגמה האחרונה, מדוע F שמצאנו אכן יוצרת את הפונקציה המבוקשת, עובד באופן כללי. אומנם, כאשר אנו *מתחילים*, אנו אומרים *שנניח* ש- F יוצרת את $\lambda n.\, a_n$. אין לנו אז ביטחון, ש- F כזו אכן קיימת. ברם, אם הצלחנו למצוא מועמדת, ואנו יודעים שמועמדת זו אכן יוצרת סדרה כלשהי, אז בדרך-כלל היפוך השיקולים, שהביאו למציאת המועמדת, מראה, שהסדרה הנוצרת על ידה אכן מקיימת את נוסחת הנסיגה ואת תנאי ההתחלה. לכן סדרה זו היא הסדרה המבוקשת. *בדוגמאות הבאות לא נטרח לחזור על שיקול זה.*

2) מצא בעזרת פונקציות יוצרות נוסחה מפורשת לסדרה $\lambda n.\, a_n$ המוגדרת על-ידי:

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & n \ge 2 \\ a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \end{cases}$$

פתרון:

שוב, נניח ש- F פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\, a_n$, כלומר ש-

$$F = \lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אז ל- x בתחום ההתכנסות:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$F(x) = 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (5a_{n-1} - 6a_{n-2}) x^n$$

$$F(x) = 1 - 2x + 5x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$F(x) = 1 - 2x + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כיוון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - a_0$ ו- $a_0 = 1$, נקבל:

$$F(x) = 1 - 2x + 5x(F(x) - 1) - 6x^2 F(x)$$

$$(1 - 5x + 6x^2)\, F(x) = 1 - 2x - 5x$$

$$F(x) = \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}$$

מכאן ש- $\lambda x. \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}$ פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\, a_n$. בשביל לראות מה פונקציה זו יוצרת, נפרק תחילה את המכנה:

$$1 - 5x + 6x^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

ואם נלך לפי הנוסחה:

$$ax^2+bx+c=c(1-\frac{1}{x_1}x)(1-\frac{1}{x_2}x)$$

נקבל:

$$1-5x+6x^2=(1-2x)(1-3x)$$

בשלב הבא עלינו למצוא A ו- B כך שלכל x

$$\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-3x}$$

נקבל $A=5$, $B=-4$. לכן $\lambda x.\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$ פונקציה יוצרת עבור $\lambda n.\,a_n$,
ולכן לכל n :

$$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n$$

(3) פתור:

$$\begin{cases} a_n=4(a_{n-1}-a_{n-2}) & n\geq 2 \\ a_0=3 \quad a_1=8 \end{cases}$$

פתרון:

נסמן $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. אז:

$$F(x)=3+8x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$

$$F(x)=3+8x+\sum_{n=2}^{\infty}4(a_{n-1}-a_{n-2})x^n$$

$$F(x)=3+8x+4x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}-4x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$

$$F(x) = 3 + 8x + 4x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$F(x) = 3 + 8x + 4x(F(x) - 3) - 4x^2 F(x)$$

$$(1 - 4x + 4x^2) \cdot F(x) = 3 - 4x$$

$$F(x) = \frac{3-4x}{(1-2x)^2}$$

כאן עלינו לחפש A ו- B כך ש-

$$\frac{3-4x}{(1-2x)^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{(1-2x)^2}$$

כלומר,

$$3 - 4x = A(1 - 2x) + B$$

נקבל ש- $A = 2$ ו- $B = 1$.
לכן, פונקציה יוצרת כאן היא

$$\lambda x.\ \frac{2}{1-2x} + \frac{1}{(1-2x)^2}$$

והסדרה הנוצרת היא:

$$\lambda n.\ 2 \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^n$$

כלומר:

$$\lambda n.\ 2^n(n+3)$$

(4) נפתור לבסוף את הדוגמה על מספר המחרוזות, שאפשר להרכיב מ- $\{0,1,2,3\}$, שיש בהן מספר זוגי של אפסים. כזכור, אם a_n הוא התשובה עבור מחרוזת באורך n, אז:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1} \quad (n > 0) \end{cases}$$

נניח אפוא ש- F פונקציה יוצרת. אז $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ולכן:

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 4^{n-1}) x^n$$

$$F(x) = 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} (4x)^{n-1}$$

$$F(x) = 1 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$$

$$F(x) = 1 + 2x \cdot F(x) + \frac{x}{1-4x}$$

לכן:

$$(1-2x)F(x) = 1 + \frac{x}{1-4x} = \frac{1-3x}{1-4x}$$

ו-

$$F = \lambda x.\ \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)} = \lambda x.\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-4x}$$

F זו יוצרת את הסדרה $\lambda n.\ \frac{2^n + 4^n}{2}$, ולכן $a_n = \frac{2^n + 4^n}{2}$ (כמו שמצאנו בעבר בדרך אחרת).

ד.6 משוואות נסיגה ליניאריות עם מקדמים קבועים

לצורך מתן מוטיבציה למה שייעשה בפרק זה, הבה נחזור לדוגמה כלשהי מאלה שפתרנו בסעיף הקודם, למשל ל-

$$\begin{cases} a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) & n \geq 2 \\ a_0 = 3 \quad a_1 = 8 \end{cases}$$

נניח שבמקום תנאי ההתחלה $a_0 = 3$ ו- $a_1 = 8$, היינו מקבלים, למחרת היום, תרגיל דומה עם תנאי התחלה אחרים, למשל $a_0 = -1$ ו- $a_2 = \sqrt{3}$. על מנת לפתור בעיה חדשה זו היה עלינו לחזור על כל העבודה מחדש – וזהו בזבוז רב של משאבים ואנרגיה! יתר על כן, ישנן אכן בשימוש משוואות, שחוזרות על עצמן במקרים רבים, כאשר כל השינוי הוא בתנאי ההתחלה. לפתור כל פעם מחדש אינו רעיון משובב נפש.

אפשר, כמובן, להתגבר על הבעיה בצורה, שנעשה הדבר בזמנו לגבי משוואות ריבועיות בבית-ספר תיכון: נפתור את המשוואה $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ עם *פרמטרים* כמו a ו- b במקום ה- 3 ו- 8 למעלה, ובאותה שיטה (פונקציות יוצרות), בה נעשה הדבר למעלה. זה אפשרי בהחלט ולא לגמרי בלתי מומלץ. עם זאת, החישוב כאן עם פרמטרים לא כל-כך נוח.

בסעיף זה נציג שיטה אלטרנטיבית, שהולכת בכיוון הפוך. היא מאפשרת (במקרים רבים) מציאה נוחה של פתרון *כללי* למשוואת הנסיגה (*בלא* שייננתנו תנאי התחלה), בעוד שמציאת פתרון לבעיה ספציפית, *עם* תנאי התחלה, דורשת עבודה נוספת של פתרון משוואות ממעלה ראשונה.

כדי להבין למה אנו חותרים, הבה ניקח דוגמה מתחום אחר.

בעיה

מצא פונקציה F כך ש- $F' = \lambda x.\, x^2$ ו- $F(2) = 7$.

פתרון:

תחילה נפתור פתרון כללי את הבעיה של מציאת פונקציה F כך ש- $F' = \lambda x.\, x^2$ (זה מה שנקרא מציאת "אינטגרל לא מסוים" של $\lambda x.\, x^2$). התשובה היא, כידוע, $\lambda x. \frac{x^3}{3} + c$ (בעצם, התשובה באמת היא *קבוצה* של פונקציות: הקבוצה $\{\lambda x. \frac{x^3}{3} + c \mid c \in \mathrm{R}\}$!). כדי למצוא את הפתרון של הבעיה הספציפית שלנו, נציב את תנאי ההתחלה $F(2) = 7$ ונקבל $\frac{2^3}{3} + c = 7$ ולכן $c = \frac{13}{3}$. מכאן שפתרון הבעיה הוא $F = \lambda x. \frac{x^3 + 13}{3}$.

לצורך התיאוריה אותה נפתח כאן, יהיה נוח להציג את משוואת הנסיגה בצורה שונה במקצת מזו, שבה עבדנו עד כה (אם כי שקולה לחלוטין). במקום לכתוב אותה בצורה:

$$a_n = F(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \qquad \text{ל-}\ n \geq k$$

או

$$X(n) = F(n, X(n-1), X(n-2), \dots, X(n-k)) \qquad \text{ל-}\ n \geq k$$

נעדיף כאן את הצורה:

$$a_{n+k} = F(n, a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n)$$ (*לא* אותה F !)

או

$$X(n+k) = F(n, X(n+k-1), X(n+k-2), \dots, X(n))$$

כך, לדוגמה, משוואת פיבונאצ'י תיכתב עכשיו בצורה $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (במקום $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$), והמשוואה שמגדירה את פעולת העצרת תיכתב בצורה $a_{n+1} = (n+1)a_n$ (במקום $a_n = n \cdot a_{n-1}$. נשים לב, שבמקרה זה ה- F המקורי הוא $\lambda n,x.\, nx$, בעוד שה- F בצורה החדשה הינו $\lambda n,x.\, (n+1)x$).

היתרון הוא, שבצורה החדשה המשוואה אמורה להיות נכונה *לכל* n , וזה מועיל לצרכים מסוימים.

בעוד שאת טכניקת הפתרון עם פונקציות יוצרות ניתן לנסות להפעיל עבור כל משוואת נסיגה (אם כי לא תמיד היא תישא פירות), הרי את התיאוריה של סעיף זה נקדיש רק לסוג מיוחד, חשוב ביותר, של משוואות: משוואות לינאריות עם מקדמים

קבועים. הכוונה למשוואות כמו שתיארנו למעלה, בהן יש ל- F הצורה המיוחדת הבאה:

$$F(n, a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n) = d_{k-1}a_{n+k-1} + d_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + d_0a_n + h(n)$$

כאשר $d_0, \ldots, d_{k-1} \in \mathbf{R}$ הם קבועים, ו- $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.

כשל- F צורה מיוחדת זו, משוואת הנסיגה נראית כך:

$$X(n+k) = d_{k-1}X(n+k-1) + \ldots + d_0X(n) + h(n) \qquad (\text{לכל } n)$$

ואפשר לכתוב אותה גם כך:

$$X(n+k) - d_{k-1}X(n+k-1) - \ldots - d_0X(n) = h(n) \qquad (\text{לכל } n)$$

(לדוגמה: משוואת פיבונאצ'י תיראה אז כך: $X(n+2) - X(n+1) - X(n) = 0$, ומשוואת מגדלי האנוי: $X(n+1) - 2X(n) = 1$. בשני המקרים זה צריך להיות נכון לכל n).

הכללה נוחה, שאינה מוסיפה ואינה גורעת, היא להרשות גם ל- $X(n+k)$ מקדם כלשהו *שונה מאפס* (ולא רק המקדם 1). כך, למשל, את המשוואה

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n + n^2$$

נוח להעביר לצורה:

$$6a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 6n^2$$

(או: $6 \cdot X(n+2) - 3 \cdot X(n+1) + 2 \cdot X(n) = 6n^2$).

נקבל אז את הצורה הכללית:

$$c_kX(n+k) + c_{k-1}X(n+k-1) + \ldots + c_0X(n) = h(n) \qquad \text{לכל } n \quad (c_k \neq 0)$$

(כיוון ש- $c_k \neq 0$, נוכל תמיד לחלק בו ולחזור לצורה הקודמת!).

המספר k נקרא *הסדר* של משוואה מסוג זה.

עתה, במקום לציין בכל מקום "לכל n", נוכל גם להציג את המשוואה כך:

$$\lambda n.\ c_k X(n+k) + c_{k-1} X(n+k-1) + \ldots + c_0 X(n) = h$$

צורת כתיבה זו מאפשרת לנו להסתכל על המשוואה מזווית אחרת:
בהינתן $\vec{c} = \langle c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle \in \mathrm{R}^{k+1}$, נוכל להגדיר פונקציה $L^{\vec{c}} : (\mathrm{N} \to \mathrm{R}) \to (\mathrm{N} \to \mathrm{R})$ על-ידי:

$$L^{\vec{c}} = \lambda g \in \mathbf{N} \to \mathbf{R}.\, \lambda n \in \mathbf{N}. \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\, g(n+k-i)$$

מה שאנו מחפשים הוא פונקציה $X : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ כך ש-

$$L^{\vec{c}}(X) = h$$

(כאשר h היא פונקציה נתונה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$).

כדוגמה לפעולת $L^{\vec{c}}$ הבה ניקח $k=2$ ו- $\vec{c} = \langle \frac{1}{2}, 3, -1 \rangle$. אז ל- $g : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ מתקיים:

$$L^{\vec{c}}(g) = \lambda n \in \mathrm{N}. -g(n+2) + 3g(n+1) + \frac{1}{2} g(n)$$

בפרט

$$L^{\vec{c}}(\lambda n.2^n) = \lambda n \in \mathrm{N}. -2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

וזוהי אכן פונקציה חדשה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$.

הערות:

(1) הסימון $L^{\vec{c}}$ בא להדגיש, כי זהותה של הפונקציה L תלויה בערכם של k ושל $c_0, \ldots, c_k$. עם זאת, לצורך מניעת סרבול בכתיבה, נכתוב מעתה בדרך-כלל פשוט "L" במקום "$L^{\vec{c}}$".

(2) כאשר במקום קבועים $c_0, c_1, \ldots, c_k$ מרשים להשתמש כמקדמים ב*פונקציות* $h_0, \ldots, h_k$ מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$ (בתנאי ש- $h_k(n) \neq 0$ לכל n), אז המשוואות $L(X) = h$ המתקבלות נקראות *משוואות ליניאריות*. משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

הן מקרה פרטי, חשוב במיוחד, של משוואות לינאריות; זהו, בעצם, המקרה בו המקדמים הם פונקציות קבועות.

(3) עד כה הנחנו כל הזמן, שהמקדמים הקבועים הם מספרים *ממשיים*, ש- h (ב- $L(X) = h$) היא סדרה של מספרים ממשיים, וש- $L : (\mathbf{N} \to \mathbf{R}) \to (\mathbf{N} \to \mathbf{R})$. למעשה, ניתן ורצוי לפתח וליישם את התיאוריה, כאשר במקום סדרות של מספרים ממשיים ומקדמים ממשיים נדבר על סדרות של מספרים *מרוכבים* ונרשה גם מקדמים מרוכבים. מכאן ואילך נניח אפוא, ש- $c_0, \ldots, c_k \in \mathbf{C}$ ו- $h : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$. על L נסתכל אז כפונקציה מ- $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ אל $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

עם כל-כך הרבה טרמינולוגיה חדשה וסימונים חדשים כדאי אולי לנסח מחדש את המשפט מהפרק הקודם על קיום ויחידות פתרונות. בשביל זה נצטרך אבל להכניס סימון נוסף, שנשתמש בו הרבה בהמשך.

הגדרה:
אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ היא סדרה של מספרים מרוכבים, אז ה- k-רישא שלה, $f[k]$, מוגדרת על-ידי:

$$f[k] = \langle f(0), f(1), \ldots, f(k-1) \rangle \in \mathbf{C}^k$$

(בצורה אחרת: ה- k-רישא של סדרה $\lambda n.\ a_n$ היא הווקטור $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle$).

משפט 1 (משפט הקיום והיחידות):
תהי $L(X) = h$ משוואות נסיגה לינארית מסדר k. אז לכל $\vec{v} = \langle v_0, \ldots, v_{k-1} \rangle \in \mathbf{C}^k$ קיים פתרון יחיד $X_{\vec{v}}$ למשוואה $L(X) = h$, המקיים:

$$X_{\vec{v}}[k] = \vec{v}$$

(במלים פשוטות יותר: יש סדרה יחידה $X_{\vec{v}} : \mathrm{N} \to \mathrm{C}$ כך ש- $L(X_{\vec{v}}) = h$ וכך ש- $X_{\vec{v}}(i) = v_i$ ל- $i = 0, 1, \ldots, k-1$).

מסקנה 1:
אם f ו- g שני פתרונות של משוואה לינארית $L(X) = h$ מסדר k, כך ש- $f[k] = g[k]$, אז $f = g$.

לצורך ההמשך נגייס לעזרתנו את האלגברה הלינארית (לא ייתכן לקפח קורס חשוב זה, אחרי שבנושא הפונקציות היוצרות הסתמכנו כה הרבה על חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי!). ההבחנה הראשונית לה אנו זקוקים היא, שאם נגדיר חיבור סדרות ומכפלת סדרה בקבוע בצורה הרגילה:

$$f+g=\lambda n.\, f(n)+g(n) \qquad\qquad \alpha\cdot f=\lambda n.\ \alpha f(n)$$

אז $\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbf{C}$ עם פעולות אלו. וקטור האפס של מרחב זה $(0_{\mathbf{N}\to\mathbf{C}})$ הוא הסדרה $\lambda n.\ 0$.

הבחנה שנייה, זו שמכניסה את האלגברה הלינארית לתמונה, היא הטענה הבאה:

משפט 2:

בהינתן $\vec{c}=c_0,\dots,c_k\in\mathrm{C}$, הפונקציה $L^{\vec{c}}$ מ- $\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ אל $\mathbf{N}\to\mathbf{C}$, שהוגדרה לעיל, היא העתקה לינארית מהמרחב הווקטורי $\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ אל עצמו.

הוכחה:

אם $f,g\in\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$, אז:

$$\begin{aligned}
L^{\vec{c}}(\alpha f+\beta g)&=\lambda n.\ \sum_{i=0}^{k}c_{k-i}(\alpha f+\beta g)(n+k-i)\\
&=\lambda n.\ \sum_{i=0}^{k}c_{k-i}(\alpha f(n+k-i)+\beta g(n+k-i))\\
&=\lambda n.\ \alpha\cdot\sum_{i=0}^{k}c_{k-i}f(n+k-i)+\beta\cdot\sum_{i=0}^{k}c_{k-i}g(n+k-i)\\
&=\lambda n.\ \alpha\cdot(L^{\vec{c}}(f))(n)+\beta\cdot(L^{\vec{c}}(g))(n)\\
&=\alpha L^{\vec{c}}(f)+\beta L^{\vec{c}}(g)
\end{aligned}$$

מסקנה 2:

לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\in\mathrm{C}$ ו- $g_1,\dots,g_\ell\in\mathrm{N}\to\mathrm{C}$ מתקיים:

$$L\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i g_i\right)=\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i L(g_i)$$

מסקנה 3:

$\ker(L)$, הגרעין של L (כלומר: $\{g \in \mathbf{N} \to \mathbf{C} \mid L(g) = \lambda n.\ 0\}$) הינו תת-מרחב של $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

הוכחה:

זהו מקרה פרטי של משפט כללי על העתקות לינאריות (וגם עניין של שתי שורות להוכיח באופן ישיר).

המסקנה האחרונה מובילה לעניין מיוחד בסוג המשוואות הבא:

הגדרה:

משוואת נסיגה לינארית נקראת *הומוגנית* אם היא מהצורה $L(X) = \lambda n.\ 0$. אחרת היא *לא הומוגנית*.

הערה:

בצורה יותר סטנדרטית נכתבת משוואה לינארית הומוגנית מסדר k עם מקדמים קבועים בצורה הבאה:

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

יש לזכור, כשכותבים את המשוואה כך, שהנעלם בה הוא *סדרות* $\lambda n.\ a_n$, שמקיימות את המשוואה המספרית *לכל* n (k הינו קבוע כאן). מקובל גם לכתוב $L(X) = 0$ במקום $L(X) = \lambda n.\ 0$. יש לזכור אבל, שבצורת כתיבה זו "0" אינו המספר 0, אלא וקטור האפס של $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ (כלומר: $\lambda n.\ 0$).

את מסקנה 3 נוכל עכשיו לנסח כך:

משפט 3:

אוסף הפתרונות של המשוואה ההומוגנית $L(X) = \lambda n.\ 0$ מהווה תת-מרחב של $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

מסקנה 4:

אם $X_1,\dots,X_\ell$ פתרונות של משוואה הומוגנית כנ"ל, אז כך גם כל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i X_i$ שלהם.

אנו יכולים עתה לנסח ולהוכיח את המשפט המרכזי על משוואות לינאריות הומוגניות:

משפט 4:

תהי $L(X) = \lambda n.\ 0$ משוואה לינארית הומוגנית מסדר k, ויהיו $X_1, \dots, X_k$ פתרונות שלה, כך שהווקטורים $X_1[k], \dots, X_k[k]$ מהווים בסיס של $\mathbf{C}^k$. אז $X_1, \dots, X_k$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות של $L(X) = \lambda n.\ 0$.

הערה:

המשפט יהיה נכון, גם אם במקום $\mathbf{C}$ היינו מדברים לכל אורך הדרך על $\mathbf{R}$.

הוכחה:

עלינו להראות, ש- $X_1, \dots, X_k$ בלתי-תלויים לינארית, ושהם פורשים את מרחב הפתרונות.

אי-תלות:

נניח $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i = \lambda n.0$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$). עלינו להראות שלכל i $\alpha_i = 0$.

עתה, פירוש ההנחה הוא, שלכל $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i(n) = 0$. בפרט נכון הדבר ל- $0 \le n \le k-1$. מזה נובע מיידית ש- $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i[k] = \vec{0}_k$ (כאשר $\vec{0}_k = \langle 0,0,\dots,0\rangle$ הוא וקטור האפס של $\mathbf{C}^k$). נתון אבל, שהווקטורים $X_1[k], \dots, X_k[k]$ הם בלתי תלויים לינארית (כי הם בסיס של $\mathbf{C}^k$). מכאן, שאכן $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

פרישה:

יהי Y פתרון כלשהו של המשוואה. כיוון ש- $X_1[k], \ldots, X_k[k]$ פורשים את $\mathbf{C}^k$, קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ כך ש- $Y[k] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i[k]$.

עתה, לפי מסקנה 4, $Z = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i$ גם הוא פתרון של המשוואה. יתר-על-כן, לכל $0 \le j \le k-1$ מתקיים ש- $Z(j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i(j) = Y(j)$ (כיוון שזו בדיוק משמעות הטענה ש- $Y[k] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i[k]$). לכן $Y[k] = Z[k]$, וממילא $Y = Z$ לפי מסקנה 1 למעלה. מכאן $Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i$ (בניסוח אחר: Y ו- Z הם שני פתרונות של המשוואה, שמקיימים אותם תנאי התחלה, ולכן הם שווים).

שים לב: הטענה ש- $Y[k] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i[k]$ פירושה ש-

$$\begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ \vdots \\ Y(k-1) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ \vdots \\ X_1(k-1) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \\ \vdots \\ X_2(k-1) \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{bmatrix} X_k(0) \\ X_k(1) \\ \vdots \\ X_k(k-1) \end{bmatrix}$$

היעזרות בכך תסייע בהבנת ההוכחה האחרונה.

מסקנה 5:

הממד של מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר k הוא k.

הוכחה:

יהי $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ בסיס כלשהו של $\mathbf{C}^k$ (למשל, הבסיס הקנוני). לפי משפט 1, קיים לכל $1 \le i \le k$ פתרון X_i למשוואה, המקיים $X_i[k] = \vec{e}_i$. לפי המשפט האחרון $X_1, \ldots, X_k$ אלו מהווים בסיס של מרחב הפתרונות, ולכן הממד שלו הוא k.

מסקנה 6:

א. אם $X_1, \ldots, X_k$ הם k פתרונות בלתי תלויים של משוואה לינארית הומוגנית מסדר k, אז הם מהווים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

ב. אם $X_1, \ldots, X_k$ הם k פתרונות של משוואה כנ"ל, כך ש- $X_1[k], \ldots, X_k[k]$ הם בלתי תלויים (ב- $\mathbf{C}^k$), אז $X_1, \ldots, X_k$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

הוכחה

א. מיידי ממסקנה 5.

ב. נובע ממשפט 4 או מהתרגיל הבא:

תרגיל

אם $X_1,\ldots,X_\ell$ הם פתרונות של משוואה הומוגנית מסדר k, אז $X_1,\ldots,X_\ell$ בלתי תלויים (ב- $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$) אם"ם $X_1[k],\ldots,X_\ell[k]$ בלתי תלויים (ב- $\mathbf{C}^k$).

מסקנה 7:

אם $X_1, \ldots, X_k$ כמו במסקנה 6 (א או ב), אז כל פתרון של המשוואה הוא מהצורה $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k$ עבור $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ יחידים.

במלים אחרות: כל פתרון הוא מהצורה $\lambda n. \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i(n)$.

הגדרה:

אם $X_1, \ldots, X_k$ הם פתרונות בלתי תלויים של משוואה לינארית הומוגנית מסוימת מסדר k, אז לביטוי $\lambda n.\ \alpha_1 X_1(n) + \ldots + \alpha_k X_k(n)$ (כש- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ משתנים חופשיים) קוראים ***פתרון כללי של המשוואה.***

ממה שראינו נובע, שכל פתרון ספציפי מתקבל מפתרון כללי על-ידי הצבת ערכים קונקרטיים במקום $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

דוגמה:

נתבונן במשוואה הלינארית $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, או:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

קל לברר ש- $X_1 = \lambda n.\ 2^n$ ו- $X_2 = \lambda n.\ 3^n$ הם פתרונות שלה. למשל, אם נציב את X_2 באגף השמאלי נקבל לכל n:

$$3^{n+2} - 5 \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot 3^n = 3^n(9 - 15 + 6) = 3^n \cdot 0 = 0$$

בדוגמה זו $k = 2$ ו-

$$X_1[2] = \langle X_1(0), X_1(0)\rangle = \langle 2^0, 2^1\rangle = \langle 1, 2\rangle \qquad X_2[2] = \langle 3^0, 3^1\rangle = \langle 1, 3\rangle$$

עתה $\langle 1, 3\rangle$ ו- $\langle 1, 2\rangle$ הם בלתי-תלויים לינארית, כי $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1\neq 0$ ולכן, לפי מסקנה 6ב, X_1 ו- X_2 אלו מהווים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה הנ"ל.

הפתרון הכללי הוא אפוא:

$$\lambda n.\ \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 3^n \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C})$$

נניח עתה שנתונים תנאי התחלה כמו בפרק הקודם (שם פתרנו משוואה זו עם תנאי התחלה קונקרטיים בעזרת פונקציות יוצרות): $a_0 = 1$, $a_1 = -2$. עלינו למצוא את ה- α_1 וה- α_2 המתאימים. מה ש- α_1 ו- α_2 אלו צריכים לקיים הוא:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 2^0 + \alpha_2 \cdot 3^0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 3^1 = -2 \end{cases}$$

במלים אחרות, עלינו לפתור את מערכת המשוואות:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -2$$

הפתרון של מערכת זו הוא $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -4$. מכאן שפתרון המשוואה עם תנאי ההתחלה הנ"ל הוא $\lambda n.\ 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 4^n$, כמו שקיבלנו בסעיף הקודם.

טוב ויפה, אך איך מוצאים בדוגמה זו את הפתרונות הבסיסיים $\lambda n.\ 2^n$ ו- $\lambda n.\ 3^n$? ובאופן כללי יותר: איך מוצאים בסיס $X_1, \ldots, X_k$ למרחב הפתרונות של משוואת נסיגה הומוגנית לינארית מסדר k ? זהו הנושא הבא שלנו.

ההגדרה הבאה מכילה את המפתח לפתרון הבעיה.

הגדרה:

תהי $\lambda n.\sum_{i=0}^{k} c_{k-i}X(n+k-i) = \lambda n.0$ (או $\sum_{i=0}^{k} c_{k-i}a_{n+k-i} = 0$) משוואה לינארית הומוגנית. הפולינום האופייני של משוואה זו הוא הפולינום:

$$c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

דוגמה:

הפולינום האופייני של המשוואה $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ מהדוגמה האחרונה הוא $x^2 - 5x + 6$.

משפט 5:

אם α הוא שורש של הפולינום האופייני של משוואה לינארית הומוגנית מסוימת עם מקדמים קבועים, אז $\lambda n.\ \alpha^n$ הוא פתרון של המשוואה.

הוכחה:

נניח שהמשוואה היא:

$$\lambda n.\ c_k X(n+k) + c_{k-1}X(n+k-1) + \ldots + c_1 X(n+1) + c_0 X(n) = \lambda n.\ 0$$

הנתון ש- α שורש של הפולינום האופייני פירושו ש:

$$c_k\alpha^k + c_{k-1}\alpha^{k-1} + \ldots + c_1\alpha + c_0 = 0$$

נציב עתה $\lambda n.\ \alpha^n$ באגף השמאלי של משוואת הנסיגה. נקבל:

$$\lambda n.\ c_k\alpha^{n+k} + c_{k-1}\alpha^{n+k-1} + \ldots + c_1\alpha^{n+1} + c_0\alpha^n =$$

$$= \lambda n.\ \alpha^n(c_k\alpha^k + c_{k-1}\alpha^{k-1} + \ldots + c_1\alpha + c_0) = \lambda n.\ \alpha^n \cdot 0 = \lambda n.\ 0$$

כי α שורש של הפולינום האופייני

דוגמה:

השורשים של הפולינום $x^2 - 5x + 6$ (שהינו הפולינום האופייני של המשוואה בדוגמה, שפתרנו למעלה) הם 2 ו- 3. לכן, לפי משפט 5, $\lambda n.\ 2^n$ ו- $\lambda n.\ 3^n$ הם פתרונות של משוואה זו (כלומר, של $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$).

עתה, בדוגמה זו שני פתרונות אלו יצאו בלתי תלויים ופורשים את מרחב הפתרונות. המשפט הבא מראה, שזה איננו מקרי.

משפט 6:

נניח $x_1, \ldots, x_k$ הם k שורשים שונים של הפולינום האופייני של משוואה לינארית הומוגנית מסדר k עם מקדמים קבועים. אז $\lambda n.\ \alpha_1 x_1{}^n + \ldots + \alpha_k x_k{}^n$ הוא פתרון כללי של המשוואה.

הוכחה:

אנו יודעים כבר ש- $\lambda n.\ x_1{}^n, \ldots, \lambda n.\ x_k{}^n$ הם k פתרונות שונים של המשוואה. נותר לכן לראות שהם בלתי-תלויים, כלומר: שה- k-רישות שלהן הן בלתי-תלויות. k-רישות אלה יוצרות את המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

מטריצה זו ידועה בשם מטריצת ואנ-דר-מונדה של $x_1, \ldots, x_k$. הדטרמיננטה שלה שווה ל-* $(x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \ldots (x_k - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \ldots (x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})$, והיא שונה לכן מאפס אם"ם $x_1, \ldots, x_k$ שונים כולם זה מזה. כיוון שזוהי ההנחה שלנו, פירוש הדבר, שה- k-רישות אכן בלתי-תלויות לינארית.

דוגמאות נוספות:

(1) סדרת פיבונאצ'י:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

או

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

* זהו תרגיל סטנדרטי באלגברה לינארית.

הפולינום האופייני כאן הוא x^2-x-1 . השורשים שלו (פתרונות המשוואה $x^2-x-1=0$) הם $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, והם שונים זה מזה. סדר המשוואה הוא 2. לכן פתרון כללי של המשוואה הוא:

$$\lambda n.\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

עתה, בסדרת פיבונאצ׳ הקלאסית $a_0=0$ ו- $a_1=1$. אם נציב, נקבל:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1.\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\alpha_2.\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\end{cases}$$

פתרון המערכת הוא: $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

לכן נוסחת האיבר הכללי של סדרת פיבונאצ׳ הקלאסית היא:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

הערות:

1. בתרגיל בו התחלנו סעיף זה היו תנאי ההתחלה $a_0=1$ ו- $a_1=2$, ויכולנו למצוא α_1 ו- α_2 מתאימים באותה שיטה. אפשר גם לשים לב,שהסדרה שם היא בדיוק $\lambda n.\,F_{n+2}$, ולכן התשובה שם היא:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

2. כדאי לשים לב, שלמרות שסדרת פיבונאצ׳ היא סדרה של מספרים טבעיים, הנוסחה המפורשת עבורה משתמשת במספר אי-רציונלי ($\sqrt{5}$) !

(2) סדרות הנדסיות:

נמצא, למשל, נוסחה לסדרה הנדסית, שבה $q = 3$ ו- $a_1 = 7$. הסדרה מוגדרת על-ידי:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$$

משוואת הנסיגה כאן היא: $\lambda n.\ X(n+1) - 3X(n) = \lambda n.\ 0$.

הפולינום האופייני שלה הוא $x - 3$. השורש היחיד שלו הוא 3.

לכן פתרון כללי של המשוואה הינו: $\lambda n.\ \alpha \cdot 3^n$.

כדי למצוא את α נציב $n = 1$ ונקבל:

$$\alpha \cdot 3 = 7$$

$$\alpha = \frac{7}{3}$$

ולכן הסדרה היא $\lambda n. \frac{7}{3} \cdot 3^n = \lambda n. 7 \cdot 3^{n-1}$

הערה:

אנו רואים בדוגמה, שתנאי התחלה לא חייב להיות דווקא מהצורה $X(0) = c_0$!

מה קורה כאשר מספר השורשים של הפולינום האופייני קטן ממעלת הפולינום? לפני שניגש לטפל במקרה זה להלן קצת חומר רקע: לפי מה שידוע כ"משפט היסודי של האלגברה" (אותו מוכיחים רק בשנה ב), כל פולינום p (אפילו כזה שמקדמיו מרוכבים) ניתן לפרק בצורה הבאה:

$$p(x) = a_k (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_\ell)^{r_\ell} \qquad r_1, \ldots, r_k \geq 1$$

כאשר מעלת הפולינום היא $k = \sum_{i=1}^{\ell} r_i$, a_k הוא המקדם של x^k $(a_k \neq 0)$ ו- $x_1, \ldots, x_\ell$ הם שורשיו של הפולינום (שיכולים, כמובן, להיות מספרים מרוכבים!). המספר הטבעי r_i נקרא *הריבוי* של השורש x_i. המשפט הבא עונה על השאלה, איך לפתור את המשוואה, כאשר הריבוי של חלק מהשורשים גדול מאחד. משפט זה מהווה הכללה של המשפט הקודם, ועל ההוכחה שלו נוותר כאן.

משפט 7:

נניח שהפולינום האופייני של משוואת נסיגה הומוגנית מסדר k הוא:

$$p(x) = a(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_\ell)^{r_\ell} \qquad \left(k=\sum_{i=1}^{\ell} r_i\right)$$

אז בסיס למרחב הפתרונות ניתן על-ידי:

$$\{\lambda n.x_1^n, \lambda n.nx_1^n, \dots, \lambda n.n^{r_1-1}x_1^n, \lambda n.x_2^n, \dots, \lambda n.n^{r_2-1}x_2^n, \dots, \lambda n.x_\ell^n, \dots, \lambda n.n^{r_\ell-1}x_\ell^n\}$$

במלים אחרות: פתרון כללי של המשוואה הוא:

$$\lambda n.\alpha_1 x_1^n + \alpha_2 n\cdot x_1^n + \dots + \alpha_{r_1} n^{r_1-1}x_1^n + \alpha_{r_1+1}x_2^n + \alpha_{r_1+2} n\cdot x_2^n + \dots +$$

$$+ \dots + \alpha_{r_1+r_2} n^{r_2-1}\cdot x_2^n + \dots + \alpha_k n^{r_\ell-1}\cdot x_\ell^n$$

הערה:

הרעיון הוא, שכל שורש x_i תורם r_i פתרונות לבסיס הנ"ל:

$$\lambda n.x_i^n,\ \lambda n.nx_i^n,\ \lambda n.n^2x_i^n, \dots, \lambda n.n^{r_i-1}x_i^n$$

דוגמה:

נפתור את המשוואה:

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$$

כלומר:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

הפולינום האופייני הינו:

$$p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

יש פה שורש אחד $(x_1 = 2)$, והריבוי שלו הוא 2. לכן פתרון כללי למשוואה הוא:

$$\lambda n.\ \alpha_1\cdot 2^n + \alpha_2 n\cdot 2^n$$

או

$$\lambda n.\ 2^n(\alpha_1 + \alpha_2 n)$$

בפרט אם ניקח את תנאי ההתחלה $a_0 = 3$ ו- $a_1 = 8$ (כמו בפרק הקודם), נקבל:

$$\alpha_1 = 3$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) = 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1$$

והפתרון לכן הוא:

$$\lambda n.\ 2^n(3 + n)$$

אין ספק, שבמקרה זה הפתרון נמצא באופן קל ומהיר יותר מאופן מציאת הפתרון בעזרת פונקציות יוצרות (אותו ביצענו בפרק הקודם)!

טבלה ד.6 מסכמת את העובדות המרכזיות הקשורות בפתרון משוואות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים.

טבלה ד.6
משוואות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

נניח כי $L(X) = h$ היא משוואה כנ"ל מסדר k.

משפט: לכל $\vec{V} \in \mathbf{C}^k$ קיים פתרון $X_{\vec{v}}$ יחיד למשוואה, המקיים $X_{\vec{v}}[k] = \vec{v}$.

מסקנה: אם X_1 ו- X_2 שני פתרונות של המשוואה כך ש- $X_1[k] = X_2[k]$, אז $X_1 = X_2$.

משפט: א. L היא העתקה לינארית מ- $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ אל $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$.
ב. קבוצת הפתרונות של $L(X) = \lambda n.\ 0$ היא תת-מרחב של $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

משפט: אם $X_1, \ldots, X_k$ פתרונות של $L(X) = \lambda n.\ 0$, ו- $X_1[k], \ldots, X_k[k]$ בסיס של $\mathbf{C}^k$, אז: $X_1, \ldots, X_k$ בסיס למרחב הפתרונות של $L(X) = \lambda n.\ 0$.

מסקנה: ממד מרחב הפתרונות של $L(X) = \lambda n.\ 0$ הוא k.

משפט: אם α שורש של הפולינום האופייני של משוואת נסיגה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, אז $\lambda n.\ \alpha^n$ פתרון של המשוואה הנ"ל.

משפט: אם הפולינום האופייני של משוואה כנ"ל הוא:

$$p(x) = a(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\ldots(x-\alpha_\ell)^{r_\ell} \qquad \left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i = k\right)$$

אז פתרון כללי למשוואה הוא:

$$\lambda n.c_1\alpha_1^n + c_2 n\alpha_1^n + \ldots + c_{r_1} n^{r_1-1}\alpha_1^n + \ldots + c_{k-r_\ell+1}\alpha_\ell^n + \ldots \quad + c_k n^{r_\ell -1}\alpha_\ell^n$$

%%

בעיה:

מה נעשה אם כל מקדמי המשוואה הם מספרים ממשיים, תנאי ההתחלה קשורים רק במספרים ממשיים, אנו מתעניינים רק בפתרונות, שהם סדרות של מספרים ממשיים (בקיצור: כאשר מספרים מרוכבים לא מעניינים אותנו בכלל), אבל לפולינום האופייני יש שורשים לא-ממשיים?

תשובה:

עקרונית, אין בזה כל רע. כבר ראינו למעלה, שבסדרת פיבונאצ'י, בה כל המקדמים הם טבעיים, תנאי ההתחלה קשורים במספרים טבעיים, והפתרון הינו סדרה של טבעיים – הנוסחה עבור פתרון זה מתבססת על חזקות של מספרים, שלא רק שאינם טבעיים – הם אפילו אינם מספרים רציונליים ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$). אין אפוא שום פסול בכך, שנוסחה עבור סדרות של מספרים ממשיים (ואפילו טבעיים) תשתמש במספרים מרוכבים. עם זאת, אם מתעקשים, אפשר כאן לעשות רדוקציה לשימוש בפתרונות ממשיים על-סמך העובדה הבאה: אם מקדמיו של פולינום הם ממשיים, ו- $z = \alpha + \beta i$ הוא שורש של אותו פולינום, אז כך גם $\bar{z} = \alpha - \beta i$, והריבוי של שניהם הינו שווה. עתה, אם $\alpha + \beta i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, אז

$$(\alpha + \beta i)^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$
$$(\alpha - \beta i)^n = r^n(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$r^n \cos n\theta = \frac{(\alpha + \beta i)^n + (\alpha - \beta i)^n}{2}$$

$$r^n \sin n\theta = \frac{(\alpha + \beta i)^n - (\alpha - \beta i)^n}{2i}$$

מכאן ש- $\{\lambda n.\,(\alpha + i\beta)^n,\ \lambda n.\,(\alpha - i\beta)^n\}$ ו- $\{\lambda n.\ r^n\cos n\theta,\ \lambda n.\ r^n\sin n\theta\}$ פורשים אותו מרחב, ואפשר להשתמש בזוג השני במקום בזוג הראשון. בזוג זה אכן אין כל התייחסות למספרים מרוכבים.

דוגמה:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$$

הפולינום האופייני הוא:

$$x^2 - 2x + 2$$

שורשיו:

$$1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

לכן פתרון כללי של המשוואה הינו:

$$\lambda n.\sqrt{2}^{n}\left(\alpha_1\cos\frac{\pi}{4}n + \alpha_2\sin\frac{\pi}{4}n\right)$$

%%

פתרון משוואות לא הומוגניות

נעבור עתה לדיון במשוואות מהצורה $L(X) = f$ כש- $f \neq \lambda n.\ 0$, דהיינו: במשוואות לא-הומוגניות. משפט המפתח כאן הוא המשפט הבא:

משפט 8:

יהי X_p פתרון כלשהו של המשוואה הלינארית $L(X) = f$ (L – כמו למעלה), ותהי H קבוצת הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה $L(X) = \lambda n.\ 0$, אז:

$$\{X \in \mathbf{N} \to \mathbf{C} \mid L(X) = f\} = \{Y + X_p \mid \ Y \in H\}$$

הוכחה:

נסמן את אגף שמאל של השוויון למעלה ב- A, ואת אגף ימין ב- B.

הוכחה ש- $\boldsymbol{A \subseteq B}$:

נניח $X \in A$. אז $L(X) = f$. נגדיר $Y_0 = X - X_p$. אז:

$$L(Y_0) = L(X) - L(X_p) = f - f = \lambda n.\ 0$$

(כי L העתקה לינארית). לכן $Y_0 \in H$. כמו-כן $X = Y_0 + X_p$. לכן $X \in B$.

הוכחה ש- $\boldsymbol{B \subseteq A}$:

נניח $Z \in B$. אז קיים $Y \in H$ (כלומר: $L(Y) = \lambda n.\ 0$) כך ש- $Z = Y + X_p$. לכן:

$$L(Z) = L(Y) + L(X_p) = \lambda n.\ 0 + f = f$$

מכאן ש- Z פתרון של $L(X) = f$, ולכן $Z \in A$.

משמעות המשפט האחרון היא, שכדי למצוא פתרון כללי למשוואה הלא-הומוגנית $L(X) = f$, עלינו לעשות שני דברים:

(א) למצוא פתרון *כללי* למשוואה ההומוגנית המתאימה $L(X) = \lambda n.\ 0$.

(ב) למצוא פתרון *פרטי* כלשהו למשוואה $L(X) = f$.

הסכום של מה שמוצאים ב-(א) וב-(ב) נותן, לפי המשפט, פתרון כללי ל- $L(X) = f$.

בסעיפים הקודמים טיפלנו כבר בשאלה, כיצד לבצע את שלב (א). אשר לשלב (ב) – כאן אנו חוזרים בעצם לבעיה של פתירת $L(X) = f$. החידוש הוא, שכעת מסתפקים אנו במציאת פתרון *אחד*, בכל דרך שהיא. בקשר לעניין זה יש חדשות טובות וחדשות רעות:

החדשות *הרעות* הן, שאין שיטה כוללת לעשות זאת, שתעבוד עבור כל f.

החדשות *הטובות* הן, שעבור מספר סוגים חשובים ונפוצים של פונקציות f *יש* שיטה איך למצוא פתרון פרטי יחיד כלשהו למשוואה $L(X) = f$. אנו נסתפק כאן במחלקה רחבה אחת: קבוצת הפונקציות מהצורה:

$$\lambda n.\ a^n P(n)$$

כאשר $a \in \mathbf{C}$ (ייתכן גם ש- $a = 1$!) ו- P פולינום (אולי ממעלה 0, כלומר קבוע).

העיקרון (אותו לא נוכיח) הוא:

עיקרון:

אם P פולינום ממעלה ℓ ו- a שורש מריבוי i של הפולינום האופייני (כולל המקרה $i = 0$, כלומר: כש- a *אינו* שורש של הפולינום האופייני), אז יש פתרון למשוואה $L(X) = \lambda n.\ a^n P(n)$ מהצורה $f = \lambda n.\ n^i a^n Q(n)$, כאשר Q פולינום ממעלה ℓ לכל היותר. את המקדמים של הפולינום Q מוצאים על-ידי הצבה במשוואה וחילוץ.

דוגמה 1: משוואת מגדלי האנוי:

$$a_{n+1} - 2a_n = 1$$

כאן $a = 1$, ו- P הוא הפולינום $P(n) = 1$, שמעלתו $\ell = 0$. הפולינום האופייני של המשוואה הוא $x - 2$. לכן פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה הוא: $\lambda n.\ \alpha \cdot 2^n$. עתה a כאן אינו שורש של הפולינום האופייני. לכן יש פתרון פרטי מהצורה $\lambda n.\ n^0 \cdot 1^n \cdot d$ כש- $d \in \mathbf{C}$ (מעלת Q היא 0, כמו זו של P !). במלים אחרות, יש קבוע d כך ש- $\lambda n.\ d$ פתרון של המשוואה.

נציב במשוואה הרקורסיבית (דהיינו, במשוואות הנסיגה). נקבל:

$$d-2d=1$$
$$-d=1$$
$$d=-1$$

לכן פתרון כללי של משוואת הנסיגה כאן הוא $\lambda n.\ \alpha\cdot 2^n-1$. במקרה של מגדלי האנוי אנו יודעים ש- $a_0=0$. לכן:

$$\alpha\cdot 2^0-1=0 \ \Rightarrow\ \alpha=1$$

והתשובה הסופית היא לכן:

$$a_n=2^n-1$$

הערה:
תשובה זהה קיבלנו קודם בעזרת פונקציות יוצרות. נזכיר בהזדמנות זו, שהשימוש בפונקציות יוצרות הוא כלי נשק אלטרנטיבי להתקפה על משוואות לא-הומוגניות.

דוגמה 2:

נחזור לדוגמה של מספר המחרוזות באורך n שאפשר לבנות מ- $\{0, 1, 2, 3\}$, שיש בהן מספר זוגי של אפסים. משוואת הנסיגה ותנאי ההתחלה היו, כזכור:

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+4^n \\ a_0=1 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} a_{n+1}-2a_n=4^n \\ a_0=1 \end{cases}$$

שוב, הפולינום האופייני הוא $x-2$, 2 הוא השורש היחיד שלו, והפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא $\lambda n.\ 2^n\alpha$. לעומת זאת, $a=4$ כאן, והוא שוב אינו שורש

של הפולינום האופייני. לפי העיקרון המרכזי אנו יודעים שיש d כך ש- $\lambda n.\ 4^n d$ פתרון של המשוואה. נציב, ונקבל שלכל n צריך להתקיים:

$$d \cdot 4^{n+1} - 2d \cdot 4^n = 4^n$$

ואם נחלק ב- 4^n, נקבל:

$$d = ½ \quad \Leftarrow \quad 4d - 2d = 1$$

פתרון כללי של המשוואה הוא לכן: $\lambda n.\alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n$. אם נציב $a_0 = 1$ נקבל ש- $\alpha = ½$, והפתרון לכן הינו $\lambda n.\frac{2^n + 4^n}{2}$.

דוגמה 3:

$$a_{n+1} - 2a_n = 4^n(n+1)$$

הפולינום האופייני נשאר כמו בדוגמאות הקודמות. לעומת זאת, בדוגמה זו $a = 4$, ו- $P(n) = n + 1$ הוא פולינום ממעלה ראשונה. לפי העיקרון יש לכן A ו- B כך ש- $\lambda n.\ 4^n(An + B)$ פתרון של המשוואה. הצבה תיתן:

$$4^{n+1}(A(n+1) + B) - 2 \cdot 4^n(An + B) = 4^n(n+1)$$

נחלק ב- 4^n:

$$4(A(n+1) + B) - 2(An + B) = n + 1$$

זו צריכה להיות *זהות*, ולכן מהשוואת מקדמים נובע:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4A + 2B = 1 \end{cases}$$

ונקבל לכן ש- $A = ½$ ו- $B = -½$.

מכאן, שפתרון פרטי למשוואה הוא: $\lambda n.\frac{1}{2}4^n(n-1)$.

ופתרון כללי: $\lambda n.\alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2}4^n(n-1)$.

דוגמה 4:

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n\,(2n + 3)$$

ההבדל בין דוגמה זו ובין הקודמות הוא, שכאן $a = 2$, ולכן a *הינו* פתרון של הפולינום האופייני. הריבוי של a הוא 1. אנו מחפשים לכן עתה A ו- B , כך ש- $\lambda n.\, n \cdot 2^n\,(An + B)$ הינו פתרון של המשוואה. הצבה תיתן כאן:

$$(n + 1) \cdot 2^{n+1}(A(n + 1) + B) - 2n \cdot 2^n(An + B) = 2^n(2n + 3)$$

$$\Rightarrow \qquad 2(n + 1)(An + A + B) - 2n(An + B) = 2n + 3$$

אפשר להמשיך כאן כמו בדוגמה הקודמת: לפתוח סוגריים, לכנס ולהשוות מקדמים (כדאי לשים לב, שהגורם עם n^2 מתבטל!). אלטרנטיבית, אפשר להציב ערכים:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & \Rightarrow \\ n = 1 & \Rightarrow \end{array} \begin{cases} 2(A+B) = 3 \\ 4(2A+B) - 2(A+B) = 5 \end{cases}$$

פתרון המשוואות נותן $A = ½$, $B = 1$. לכן פתרון כללי למשוואה הוא:

$$\lambda n.\alpha \cdot 2^n + n \cdot 2^n\left(\frac{1}{2}n + 1\right) = \lambda n.\, 2^n\left(\frac{1}{2}n^2 + n + \alpha\right)$$

הערה:

נוכל להרחיב במידה ניכרת את אוסף הפונקציות f , עבורן יש לנו דרך ישירה לפתור את $L(X) = f$, בעזרת האבחנה הבאה:

אם $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_j$ ו- $X_1, \ldots, X_j$ פתרונות של $L(X_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, j)$, אז $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ פתרון של $L(X) = f$.

הוכחה:

$$L(X_1 + \ldots + X_j) = L(X_1) + \ldots + L(X_j) = f_1 + \ldots + f_j = f$$

(יש כאן שימוש חזק בעובדה, ש- L הינה העתקה לינארית!).

דוגמה 5:

יש לפתור:

$$a_{n+1} - 2a_n = 4^n(n + 1) + 2^n(2n + 3)$$

משתי הדוגמאות האחרונות נובע, שפתרון משוואה זו הוא:

$$\lambda n.\alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2}4^n(n-1) + n \cdot 2^n\left(\frac{1}{2}n + 1\right) =$$

$$= \lambda n.\,\frac{1}{2}4^n(n-1) + 2^n\left(\frac{1}{2}n^2 + n + \alpha\right)$$

דוגמה 6:

נחזור לסיום לבעיה של מציאת נוסחה ל- $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, הפעם בעזרת משוואות נסיגה. מתקיים כאן:

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 = 1^n(n^2 + 2n + 1)$$

זוהי משוואה לא הומוגנית מהסוג שאנו *יודעים* לפתור! כאן $a = 1$ ו- $\ell = 2$. הפולינום האופייני הוא $x - 1$, והשורש שלו, 1, הוא מריבוי 1 (ושווה ל- a !). לכן יש פתרון פרטי מהצורה $\lambda n.\ 1^n \cdot n^1(An^2 + Bn + C)$, כלומר $\lambda n.\ n(An^2 + Bn + C)$.
הצבה במשוואה תיתן:

$$(n + 1)(A(n + 1)^2 + B(n + 1) + C) - n(An^2 + Bn + C) = (n + 1)^2$$

זה אמור להיות נכון לכל n טבעי, ולכן (השיקול הפולינומיאלי!) לכל $x \in R$. נציב את הערכים $-1, 0, 1$ ונקבל:

$$\begin{aligned} n = -1 &\Rightarrow A - B + C = 0 \\ n = 0 &\Rightarrow A + B + C = 1 \\ n = 1 &\Rightarrow 2(4A + 2B + C) - (A + B + C) = 4 \end{aligned}$$

פתרון מערכת זו הוא: $C = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{3}$.

לכן פתרון פרטי של המשוואה הוא:

$$\lambda n.n\left(\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\right)=\lambda n.\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$=\lambda n.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $a_{n+1}-a_n=0$ הוא $\lambda n.\ \alpha$.
לכן, פתרון כללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא:

$$\lambda n.\alpha+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

הצבת תנאי ההתחלה $a_1=1$ (או אפילו $a_0=0$) תראה ש- $\alpha=0$. לכן התשובה הסופית היא:

$$\lambda n.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$