R-équivalence sur les familles de variétés rationnelles et méthode de la descente

Alena Pirutka

14 octobre 2011

Résumé

La méthode de la descente a été introduite et développée par Colliot-Thélène et Sansuc. Elle permet d'étudier l'arithmétique de certaines variétés rationnelles. Dans ce texte on montre comment il en résulte que pour certaines familles $f : X \to Y$ de variétés rationnelles sur un corps local k de caractéristique nulle le nombre des classes de R-équivalence de la fibre $X_y(k)$ est localement constant quand y varie dans $Y(k)$.

Introduction

Soit X une variété propre géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro. La question de décrire les propriétés de l'ensemble de ses points rationnels fait l'objet de l'étude des propriétés arithmétiques de X. Dans le cas où X possède beaucoup de courbes rationnelles, en particulier, si X est rationnellement connexe, on peut demander de décrire l'ensemble $X(k)/R$ des classes de R-équivalence. Si k est un corps local et si X est une k-variété projective lisse rationnellement connexe, Kollár [13] montre que l'ensemble $X(k)/R$ est fini. Il est ainsi naturel de se demander comment le nombre $|X(k)/R|$ des classes de R-équivalence varie dans des familles plates de telles variétés. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme projectif et lisse dont les fibres sont des variétés rationnellement connexes. D'après le résultat de Kollár [14], l'application $\rho(f) : Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(k)/R|$ est semi-continue supérieurement pour la topologie induite par celle de k. On s'intéresse alors à savoir si cette application est de fait continue ([14],[1] 10.10). Pour $k = \mathbb{R}$ c'est une conséquence du théorème d'Ehresmann ([22], 9.3). Dans ce texte on montre que l'application $\rho(f)$ est continue pour certaines familles de variétés rationnelles (et a fortiori rationnellement connexes) sur un corps p-adique en utilisant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc ([4],[5]). Pour ce faire, on étudie la continuité en famille d'une relation d'équivalence associée à un torseur. Plus précisément, soit k un corps local et soit X une k-variété projective et lisse. Soit S un k-tore que l'on voit comme un X-tore par changement de base. On associe à un torseur T

sur X sous S une relation d'équivalence $\sim_T$ sur $X(k)$ (cf. section 1.1). Pour k un corps local, l'ensemble $X(k)/\sim_T$ est fini. Lorsqu'on a une famille projective et lisse $f : X \to Y$ de k-variétés, un Y-tore S et un torseur T sur X sous S, on montre que l'application $Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(k)/\sim_{T_y}|$ est localement constante. On en déduit l'énoncé pour la R-équivalence en utilisant que, pour certaines familles de variétés rationnelles, la R-équivalence coïncide avec la relation d'équivalence associée à un torseur particulier, dit *universel.*

Dans la section 1 on rappelle les étapes principales de la méthode de la descente pour les variétés rationnelles sur un corps. Pour appliquer cette méthode à des familles de variétés rationnelles $X \to Y$ on aura besoin de mettre les torseurs universels en familles. Pour ce faire, il est nécessaire d'étudier les propriétés du schéma de Picard $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ pour de telles familles. Cela est fait dans la section 2. Dans la section 3 on étudie la continuité en famille de la relation d'équivalence associée à un torseur (théorème 3.1). Ensuite, on applique la méthode de la descente pour montrer que $\rho(f)$ est localement constante pour certaines familles $f : X \to Y$ de variétés rationnelles sur un corps local (théorème 3.2).

Notations et rappels. Dans tout ce texte sauf dans la section 3 on note k un corps de caractéristique nulle. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et on pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Soit X une $\bar{k}$-variété projective intègre. On dit que X est *$\bar{k}$-rationnelle* si X est birationnelle à $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$. On dit que X est *rationnellement connexe* si pour tout corps algébriquement clos $\Omega \supset \bar{k}$, par deux points quelconques de $X(\Omega)$ il passe une courbe rationnelle : pour tous $x_1, x_2 \in X(\Omega)$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1_\Omega \to X$ tel que $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1_\Omega)$.

Si X est une k-variété projective géométriquement intègre, on dit que X est *rationnelle* si $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est $\bar{k}$-rationnelle et on dit que X est *rationnellement connexe* si $\bar{X}$ l'est. Deux points rationnels $x_1, x_2 \in X(k)$ sont dits *directement R-liés* s'il existe un k-morphisme $p : \mathbb{P}^1_k \to X$ tel que $p(0:1) = x_1$ et $p(1:0) = x_2$. On appelle R-équivalence la relation d'équivalence engendrée (cf. [15]) et on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence.

Pour X un schéma on note $\mathbb{G}_{m,X} = \mathbb{G}_m \times_{\mathbb{Z}} X$ le groupe multiplicatif sur X. On appelle *X-tore* un X-schéma en groupes localement isomorphe à $\mathbb{G}^n_{m,X}$ pour la topologie *fpqc* ([SGA3], VIII et IX). On appelle *X-groupe constant tordu* un X-schéma en groupes localement constant pour la topologie *fpqc* ([SGA3], X). Lorsque l'on considère des groupes de type fini (resp. à engendrement fini), ce qui sera toujours le cas ici, on peut remplacer *fpqc* par *ét.* Lorsque X est localement noethérien connexe et normal, un X-tore est toujours *isotrivial* ([SGA3], X 5.16), c'est-à-dire, qu'il est diagonalisable après un revêtement fini étale (morphisme étale fini surjectif). On a une anti-équivalence de catégories entre les X-tores S et les X-groupes constants tordus sans torsion M ([SGA3], X), via :

$$S \mapsto \hat{S} = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(S, \mathbb{G}_{m,X}),\ M \mapsto D(M) = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(M, \mathbb{G}_{m,X}).$$

On appelle *torseur* sur X sous un X-tore S un espace principal homogène $\mathcal{T} \to X$ sur X sous S ([16], III). Les classes d'isomorphisme de X-torseurs sous S sont paramétrées par le groupe de cohomologie étale $H^1(X,S)$ ([16], III). On note $[\mathcal{T}]$ la classe de $\mathcal{T}$ dans $H^1(X,S)$.

1 Méthode de la descente

Soit X une k-variété rationnelle. La méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc consiste à attacher à la variété X un certain nombre de variétés auxiliaires $(Y_i \xrightarrow{p_i} X)_{i\in I}$ dont l'arithmétique est a priori plus simple, même si leur dimension est plus grande. En particulier, dans les cas que l'on considère, on aura que chaque classe de R-équivalence de X est précisement l'image $p_i(Y_i(k))$ pour un $i \in I$. Donnons la description plus explicite des étapes principales de la méthode, nécessaires pour la suite.

1.1 Idée de la méthode

Soit X une k-variété projective telle que $X(k) \neq \emptyset$. Soit S un k-tore que l'on voit comme un X-tore par changement de base. Un torseur $\mathcal{T} \xrightarrow{p} X$ sur X sous S définit une application

$$\begin{aligned} X(k) &\xrightarrow{\theta} H^1(k,S) \\ x &\mapsto [\mathcal{T}_x]. \end{aligned} \tag{1}$$

Notons que la classe $[\mathcal{T}_x]$ est triviale si et seulement si $\mathcal{T}_x(k) \neq 0$, c'est-à-dire, si $x \in p(\mathcal{T}(k))$.

Si $\alpha \in H^1(k,S)$ on note $\mathcal{T}^\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X$ un torseur sur X de classe $[\mathcal{T}] - \alpha$. On dit que $\mathcal{T}^\alpha$ est un *tordu* de $\mathcal{T}$ par α. Notons que l'image $p_\alpha(\mathcal{T}^\alpha(k))$ ne dépend que de la classe de α dans $H^1(k,S)$. On a les propriétés suivantes :

1. on a une partition (cf. [4])
$$X(k) = \bigsqcup_{\alpha\in \operatorname{im}\theta} p_\alpha(\mathcal{T}^\alpha(k)), \tag{2}$$
ce qui définit la relation d'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ sur $X(k)$ associée à l'application θ ;
2. l'application θ passe au quotient par la R-équivalence ([3], prop. 12) et induit ainsi une application
$$X(k)/R \xrightarrow{\theta} H^1(k,S); \tag{3}$$

On voit ainsi que la partition (2) est moins fine que la partition en classes de R-équivalence. La méthode de la descente permet d'établir que sur certaines variétés rationnelles ces partitions coïncident lorsque $\mathcal{T} \to X$ est un torseur dit *universel*.

1.2 Torseurs universels

Soit X une k-variété projective lisse rationnelle admettant un point rationnel. Le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est un groupe abélien libre de type fini (cf. [5], 2.A.2 ou [23] p.47).

On pose $S = \mathcal{H}om_{k\text{-gr}}(\operatorname{Pic}\bar{X}, \mathbb{G}_{m,k})$ le tore dual. On dispose d'une suite exacte (cf. [5], 2.2.8) :

$$0 \to H^1(k,S) \to H^1(X,S) \xrightarrow{\chi} \operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(\hat{S}, \operatorname{Pic}\bar{X}) \to 0, \qquad (4)$$

où l'application χ associe à un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S et à un caractère $\lambda : \bar{S} \to \bar{\mathbb{G}}_m$ le torseur sur $\bar{X}$ sous $\bar{\mathbb{G}}_m$ déduit de $\bar{\mathcal{T}}$ par λ. Cela donne un élément de $\operatorname{Pic}\bar{X} = H^1(\bar{X}, \bar{\mathbb{G}}_m)$. On dit qu'un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S est *universel* si $\chi([\mathcal{T}])$ est l'application identité sur $\operatorname{Pic}\bar{X}$.

Définition 1.1. On dit que *les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels*, si la partition (2), obtenue à l'aide d'un torseur universel $\mathcal{T}$, coïncide avec la partition en classes de R-équivalence.

Notons que cette définition ne dépend pas de choix du torseur universel car les classes de deux tels torseurs dans $H^1(X,S)$ diffèrent par un unique élément de $H^1(k,S)$. On peut montrer (cf. [5] 2.8.5, ceci utilise l'hypothèse car.$k = 0$) que les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels si les torseurs universels $\mathcal{T}$ sur X qui possèdent un point rationnel sont des variétés k-rationnelles, c'est-à-dire, si leurs corps de fonctions sont transcendants purs sur k.

1.3 Cas auxquels la méthode s'applique

On sait que les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels dans les cas suivants :

1. X est une surface de Châtelet : une surface projective, lisse, birationnelle à la surface affine d'équation
$$y^2 - az^2 = P(x)$$
avec $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ séparable de degré 3 ou 4 ([5]). Plus généralement, on peut prendre X une surface projective lisse admettant un morphisme dominant $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ avec au plus quatre fibres géométriques singulières et la fibre générique lisse de genre zéro (cf. [6]).
2. X une compactification lisse d'un k-tore (cf. [3] théorème 2 ou [4]).
3. Sous des hypothèses supplémentaires sur k, en particulier pour k un corps local, ceci vaut plus généralement si X est une compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe (cf. [2] 8.4. et 5.4). Ce dernier cas est plus délicat. Les torseurs universels avec un point rationnel ne sont pas ici en général des variétés k-rationnelles, alors que c'est le cas pour les exemples précédents.

En général, si X est une surface rationnelle, la question de savoir si les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels reste ouverte.

2 Torseurs universels en famille

On commence par rappeler quelques résultats de Grothendieck sur le schéma de Picard. Soit Y un schéma noethérien connexe et soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse, à fibres géométriquement intègres. Supposons que f admet une section. Alors le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/Y}$:

$$\mathrm{Pic}_{X/Y}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_Y T)/\mathrm{Pic}(T)$$

est un faisceau pour la topologie étale (cf.[11], 9.2.5) qui est représentable par un Y-schéma $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ ([11] 9.4.8). La formation de ce schéma est compatible avec le changement de base (cf. [11] 9.4.4). De plus, les composantes connexes de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ sont des Y-schémas projectifs, qui sont ouverts et fermés dans $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ (cf. [11] 9.6.25 et 9.5.7 pour la projectivité).

Proposition 2.1. *Soit Y un schéma noethérien connexe. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse, à fibres géométriquement intègres, tel que f admet une section. Supposons que $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout point géométrique y de Y. Alors $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu.*

Démonstration. Soit y_0 un point fermé de Y de corps résiduel κ. Soit $\bar{\kappa}$ une clôture algébrique de κ et soit $\bar{X}_{y_0} = X_{y_0} \times_\kappa \bar{\kappa}$.

La fibre de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ en y_0 est le schéma $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}$. Soit $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ la composante connexe de l'identité (i.e. de $\mathcal{O}_{X_{y_0}}$). Les $\bar{\kappa}$-points de ce schéma correspondent aux classes de faisceaux inversibles sur $\bar{X}_{y_0}$ algébriquement équivalents à $\mathcal{O}_{\bar{X}_{y_0}}$ ([11], 5.10). Soit $NS(\bar{X}_{y_0}) = \mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})/\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})$ le groupe de Néron-Severi. Ce dernier groupe est un groupe de type fini ([SGA6], XIII.5.1).

Puisque $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout point géométrique y de Y, le schéma $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est lisse sur Y et ses composantes connexes sont finies étales sur Y ([11], 5.13 et 5.19). En particulier, $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ est un κ-schéma fini (et étale). Comme il est connexe et contient un κ-point correspondant à $\mathcal{O}_{X_{y_0}}$, alors $\mathbf{Pic}^0_{X_{y_0}/\kappa}$ est réduit à un point. Ainsi $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa}) = NS(\bar{X}_{y_0})$ est de type fini. Quitte à remplacer Y par $Y' \to Y$ étale, on peut alors supposer que les éléments $l_1 \dots l_m$ qui engendrent le groupe $M = \mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}(\bar{\kappa})$ sont tous définis sur κ. Autrement dit, on peut supposer que la fibre $\mathbf{Pic}_{X_{y_0}/\kappa}$ de $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ en y_0 est formée de κ-points. On l'identifie alors avec $\coprod_M \mathrm{Spec}\,\kappa$.

Montrons qu'il existe un morphisme étale $Y' \to Y$ dont l'image contient le point y_0, tel que $\mathbf{Pic}_{X/Y} \times_Y Y' = \mathbf{Pic}_{X'/Y'}$, où $X' = X \times_Y Y'$, est isomorphe à $M_{Y'}$. Comme $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est lisse, il existe un morphisme étale $Y' \to Y$ avec un κ-point au-dessus de y_0, tel qu'on a des sections $s_{l_i} : Y' \to \mathbf{Pic}_{X'/Y'}$, $i = 1, \dots m$ passant par l_i (cf. le lemme ci-dessous). On peut supposer que Y' est connexe. Comme $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ représente le foncteur $\mathrm{Pic}_{X'/Y'}$, chaque section s_{l_i} correspond à un faisceau inversible $\mathcal{L}_i$ sur X', défini à un isomorphisme et à un élément de $\mathrm{Pic}Y'$ près. Inversement, pour tout $m = \sum_i a_i l_i$, le faisceau $\otimes_i \mathcal{L}_i^{\otimes a_i}$ correspond à une section s_m telle que

$s_m(y_0) = m$. On a ainsi un morphisme de schémas en groupes

$$\phi : M_{Y'} \to \mathbf{Pic}_{X'/Y'},$$
$$\phi|_{m\times Y'} = s_m.$$

Le noyau de ϕ est un sous-groupe fermé de $M_{Y'}$ car $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ est séparé. Comme $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ et $M_{Y'}$ sont des Y'-schémas en groupes étales, le morphisme ϕ est étale et son noyau est aussi un sous-groupe ouvert de $M_{Y'}$ (cf. [SGA1] 4.3, 5.3). Puisque $M_{Y'}$ est constant, le noyau de ϕ est donc l'union disjointe de copies de Y'. C'est donc la section unité de M'_Y car sa fibre en y_0 est nulle. Comme ϕ est étale, c'est donc une immersion ouverte. Puisque chaque composante connexe de $\mathbf{Pic}_{X'/Y'}$ est surjective sur Y', elle rencontre la fibre en y_0. On en déduit que ϕ est un isomorphisme. □

Lemme 2.2. *Soit Y un schéma. Soit $X \to Y$ un morphisme lisse. Soit x un point de X de corps résiduel κ et soit y son image dans Y. Supposons que κ est une extension finie séparable du corps résiduel de y. Il existe alors un morphisme étale $Y' \to Y$, un κ-point $y' \in Y'$ au-dessus de y et un Y-morphisme $g : Y' \to X$ tels que $g(y') = x$.*

Démonstration. D'après la description locale des morphismes lisses on peut supposer que X est étale sur $\mathbb{A}^n_Y$. Prenons une section $Y \to \mathbb{A}^n_Y$ qui envoie $y \in Y$ sur l'image de point x. Alors $Y' = Y \times_{\mathbb{A}^n_Y} X$ convient : il est étale sur Y, le morphisme $g : Y' \to X$ est donné par projection et le point $y' = (y, x)$ s'envoie sur x. □

Remarque 2.3. Dans la proposition 2.1 il suffit de demander que les groupes $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$, $i = 1, 2$ s'annulent pour un point géométrique y de Y. En effet, dans ce cas les fonctions $h^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$ sont constantes sur Y (cf. [19] section 5, p. 50).

La proposition 2.1 s'applique en particulier aux familles de variétés rationnellement connexes :

Corollaire 2.4. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés, dont les fibres sont des variétés rationnellement connexes. Supposons que f admet une section. Alors $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu sans torsion.*

Démonstration. Si Z est une k-variété projective lisse rationnellement connexe, les groupes de cohomologie $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ s'annulent pour tout i positif. En effet, comme k est un corps de caractéristique nulle, il suffit de le montrer sur $\mathbb{C}$. D'après la décomposition de Hodge, $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à $H^0(Z, \Omega^i_Z)$ (cf.[22], 6.12). Or $H^0(Z, \Omega^i_Z) = 0$ pour une variété rationnellement connexe ([12], IV.3.8), on voit que $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ pour tout $i > 0$. En particulier, $H^i(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$, $i = 1, 2$ pour tout $y \in Y$. D'après la proposition 2.1, $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est alors un Y-groupe constant tordu. Il est sans torsion car les groupes $\mathbf{Pic}_{X_y/k(y)}$ le sont (cf. [8], 4.18). □

On introduit ensuite les torseurs universels en famille exactement de la même manière que sur un corps. On montre d'abord

Lemme 2.5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés qui admet une section $s : Y \to X$. Soit S un Y-tore qu'on voit comme un X-tore par changement de base. On a une suite exacte, fonctorielle en S et en Y*

$$0 \to H^1(Y, S) \to H^1(X, S) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}) \to 0. \tag{5}$$

Démonstration. D'après [5], 1.5.1, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_Y(\hat{S}, f_*\mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_Y(\hat{S}, f_*\mathbb{G}_{m,X}) \to \mathrm{Ext}^1_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X}).$$

En effet, il s'agit de la suite des termes de bas degré de la suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{Y_{\acute{e}t}}(\mathcal{F}, R^q f_* \mathcal{G}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{X_{\acute{e}t}}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

appliquée à $\mathcal{F} = \hat{S}$ et $\mathcal{G} = \mathbb{G}_{m,X}$. Comme f est un morphisme projectif à fibres géométriques intègres, on a $f_*\mathbb{G}_{m,X} = \mathbb{G}_{m,Y}$. On applique ensuite [5], 1.4.3 qui donne des isomorphismes $H^i(X, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_X(\hat{S}, \mathbb{G}_{m,X})$ et de même pour Y. On obtient ainsi une suite

$$0 \to H^1(Y, S) \to H^1(X, S) \to \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}) \xrightarrow{\partial} H^2(Y, S) \to H^2(X, S).$$

Comme le morphisme $f : X \to Y$ admet une section, cette suite est scindée et donc $\partial = 0$. On obtient ainsi la suite de l'énoncé du lemme. □

Remarque 2.6. D'après [11] 2.11, on peut identifier le faisceau étale $R^1 f_* \mathbb{G}_{m,X}$ avec $\mathrm{Pic}_{X/Y}$. Si Y est le spectre d'un corps, ce dernier correspond au module galoisien $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$ et on a donc la même construction que dans la partie 1.2.

Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés dont les fibres sont des variétés rationnelles. Supposons que f admet une section. D'après le corollaire 2.4, $\mathrm{Pic}_{X/Y}$ est représentable par un Y-schéma en groupes constant tordu. On note S le Y-tore dual.

Définition 2.7. On dit qu'un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S est *universel* si l'application $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_Y(\hat{S}, \mathrm{Pic}_{X/Y})$ déduite de la suite (5), est l'application identité.

Notons que par fonctorialité en Y de la suite exacte (5), le torseur $\mathcal{T}_y$ est aussi un torseur universel sur X_y sous S_y pour tout $y \in Y(k)$.

3 Relation d'équivalence associée à un torseur en famille

Soit k un corps. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés. Soit S un Y-tore, que l'on voit comme un X-tore par changement de base. Soit $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur sur X sous S. De la même manière que dans la section 1.1 on associe à $\mathcal{T}$ une relation d'équivalence sur $X(k)$ compatible avec f. Plus précisément, pour $y \in Y(k)$ et $x_1, x_2 \in X_y(k)$ on a

$$x_1 \sim_{\mathcal{T}} x_2$$

si x_1, x_2 appartiennent à $p_\alpha(\mathcal{T}_y^\alpha(k))$ pour un élément $\alpha \in H^1(k, S_y)$.

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit k un corps local*[1]*. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés. Soit S un Y-tore et soit $\mathcal{T}$ un torseur sur X sous S. Alors chaque classe d'équivalence de la relation $\sim_{\mathcal{T}}$ définie ci-dessus est un ouvert de $X_y(k)$ pour $y \in Y(k)$, et l'application induite $f_{\mathcal{T}} : X(k)/_{\sim_{\mathcal{T}}} \to Y(k)$ est une fibration à fibres finies, localement triviale pour la topologie du corps k.*

On obtient comme conséquence :

Théorème 3.2. *Soit k un corps local de caractéristique nulle. Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif et lisse de k-variétés dont les fibres sont des variétés rationnelles. Supposons que pour tout $y \in Y(k)$ les classes de R-équivalence sur $X_y(k)$ sont paramétrées par des torseurs universels. Alors la fonction*

$$\rho(f) : Y(k) \to \mathbb{N},\ y \mapsto |X_y(k)/R|$$

est localement constante.

Démonstration. Soit $y_0 \in Y(k)$. Pour montrer que l'application $\rho(f)$ est continue en y_0 on peut remplacer Y par $Y' \to Y$ étale avec un k-point au-dessus de y_0 et X par $X' = X \times_Y Y'$. Cela provient du fait que les applications étales induisent des applications ouvertes sur les points rationnels. D'après le lemme 2.2, on peut donc supposer que f admet une section.

D'après le lemme 2.4, sous l'hypothèse que k est un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est un Y-schéma en groupes constant tordu. Soit S un Y-tore dual. Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel sur X sous S. Par fonctorialité de la suite exacte (5), pour tout point $y \in Y(k)$, le torseur $\mathcal{T}_y$ est un torseur universel sur X_y sous S_y. Ainsi la R-équivalence sur $X_y(k)$ coïncide avec la relation d'équivalence associée à $\mathcal{T}_y$. On obtient alors l'énoncé comme conséquence du théorème 3.1. $\square$

1. i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p((t))$

Remarque 3.3. Sous les hypothèses du théorème, soit R_f la relation d'équivalence sur $X(k)$ engendrée par la R-équivalence dans les fibres de f. D'après la preuve du théorème, on obtient que la fibration $X(k)/R_f \to Y(k)$ est une fibration localement triviale à fibres finies.

Remarque 3.4. Plus généralement, dans le théorème 3.2 il suffit de demander que les fibres de f soient des variétés rationnellement connexes. Dans les cas où l'on sait que les classes de R-équivalence sur $X_y(k)$ sont parametrées par des torseurs universels, il s'agit des variétés rationnelles (cf. section 1.3). En particulier, le résultat s'applique pour les familles de surfaces de Châtelet, pour les compactifications lisses de familles de tores algébriques ou de groupes réductifs connexes (cf. 1.3). Notons que pour ces familles on démontre la continuité de R-équivalence uniquement à partir de propriétés de torseurs, sans utiliser le résultat de Kollár que $\rho(f)$ est semi-continue.

Pour montrer le théorème 3.1 on montre d'abord deux lemmes préliminaires.

Lemme 3.5. *Soit k un corps valué hensélien. Soient X une k-variété, S un X-tore et $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur sur X sous S. Alors $p(\mathcal{T}(k))$ est ouvert et fermé dans $X(k)$ pour la topologie définie par la valuation.*

Démonstration. Posons $W = p(\mathcal{T}(k))$. Notons que $\mathcal{T}$ est lisse sur X comme torseur sous un X-schéma en groupes lisse (cf. [16], III 4.2). Puisque k est hensélien, W est ouvert (cf. [17], 2.2.1(i) et 2.2.2). Pour montrer que W est fermé, on va remplacer $p : \mathcal{T} \to X$ par un morphisme propre dont l'image dans $X(k)$ est encore W.

Supposons d'abord que S est un tore isotrivial. On dispose alors d'une compactification lisse équivariante S^c de S (cf. par exemple [7]). Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c$ le produit contracté (cf. [21], 2.2.3), ce qui compactifie dans les fibres $\mathcal{T} \to X$. C'est-à-dire, $p^c : \mathcal{T}^c \to X$ est un morphisme propre et lisse, et $\mathcal{T}$ est dense dans chaque fibre. On a de plus :

$$W = p(\mathcal{T}(k)) = p^c(\mathcal{T}^c(k)).$$

En effet, pour tout $x \in X(k)$ les k-points de la fibre $\mathcal{T}^c_x$ sont Zariski denses, car $\mathcal{T}^c_x$ est lisse et k est un corps fertile[2]. En particulier, si $\mathcal{T}^c_x(k)$ est non vide, alors il en est de même pour $\mathcal{T}_x(k)$. Puisque p^c est propre, W est fermé dans $X(k)$ (cf. [18], 1.4).

Dans le cas général, pour montrer que $p(\mathcal{T}(k))$ est un fermé de $X(k)$, il suffit de le faire localement[3]. Soit $x \in X(k)$. D'après [SGA3] X 4.5, il existe un morphisme étale $\pi : X' \to X$ avec un k-point x' au-dessus de x, tel que le tore $S_{X'}$ soit isotrivial. Soit $p' : \mathcal{T}_{X'} \to X'$. Soit $\pi_k : X'(k) \to X(k)$ l'application induite par π. Comme π

2. C'est-à-dire, si V est une k-variété lisse connexe telle que $V(k)$ est non vide, alors l'ensemble $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski.

3. Si $X(k) = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ où les U_i, $i = 1, \ldots, r$, sont des ouverts de $X(k)$ et si $W_i = p(\mathcal{T}(k)) \cap U_i$ est un fermé de U_i, alors $p(\mathcal{T}(k)) = \bigcap_{i=1}^{r} (W_i \cup (X(k) \setminus U_i))$ est un fermé de $X(k)$. En effet, $U_i \setminus W_i$ est un ouvert de $X(k)$, son complémentaire $W_i \cup (X(k) \setminus U_i)$ est donc fermé.

est un morphisme étale, on a que $U \stackrel{\text{def}}{=} \pi_k(X'(k))$ est un ouvert de $X(k)$; de plus, $F \subset U$ est un fermé de U si et seulement si $\pi_k^{-1}(F)$ est un fermé de $X'(k)$ (cf. [17] 2.2.1(i)). Comme $S_{X'}$ est un tore isotrivial, $p'(\mathcal{T}_{X'}(k))$ est un fermé de $X'(k)$. Or $\pi_k^{-1}(p(\mathcal{T}(k))) = p'(\mathcal{T}_{X'}(k))$, on déduit que $p(\mathcal{T}(k)) \cap U$ est un fermé de U. Ainsi $p(\mathcal{T}(k))$ est un fermé de $X(k)$ car on vient de l'établir localement.

□

Fin de la preuve du théorème 3.1.

Fixons un point $y_0 \in Y(k)$. Soit r le nombre des classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ de $X_{y_0}(k)$. Ce nombre est fini d'après le lemme 3.5 puisque $X_{y_0}(k)$ est compact. Prenons un point $x_{0,j}$ dans chacune des classes, $j = 1, \ldots, r$.

Pour montrer le théorème, on peut remplacer Y par $Y' \to Y$ étale avec un k-point au-dessus de y_0 et X par $X' = X \times_Y Y'$. D'après le lemme 2.2, on peut donc supposer qu'il existe r sections $s_j : Y \to X$, $j = 1, \ldots, r$ telles que $s_j(y_0) = x_{0,j}$.

Soient $\mathcal{A}_j = s_j^*\mathcal{T}$, $j = 1, \ldots, r$; on note encore $\mathcal{A}_j$ leurs images réciproques sur X. Soient $p_j : \mathcal{T}_j \to X$ les tordus de $\mathcal{T}$ par les $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \ldots, r$, et soient $\Omega_j = p_j(\mathcal{T}_j(k))$. D'après cette construction, pour tout k-point y de Y, la fibre $\Omega_{j,y}$ est la classe de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ sur $X_y(k)$ contenant le point $s_j(y)$. Ainsi, pour $y \in Y(k)$ et pour $i \neq j$, soit $\Omega_{i,y}$ et $\Omega_{j,y}$ sont disjoints, soit ils coïncident.

D'après la construction, les Ω_{j,y_0}, $j = 1, \ldots, r$ forment les r classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ sur $X_{y_0}(k)$. D'après le lemme 3.5, les Ω_j sont ouverts dans $X(k)$. Comme f est propre et k est un corps local, l'image par f du fermé complémentaire de $\bigcup_j \Omega_j$ est un fermé de $Y(k)$ qui ne contient pas le point y_0. Ainsi, les $\Omega_{j,y}$ recouvrent les fibres voisines $X_y(k)$. Pour y dans un voisinage assez petit de y_0, on a aussi que les $\Omega_{i,y}$ et $\Omega_{j,y}$, $i \neq j$ sont disjoints. En effet, il suffit de montrer que $s_i(y) \notin \Omega_{j,y}$, ce qui résulte du fait que le complémentaire de Ω_j dans $X(k)$ est un ouvert (cf. 3.5) qui contient le point $s_i(y_0)$.

Ainsi, pour y assez proche de y_0, on obtient que les classes de l'équivalence $\sim_{\mathcal{T}}$ de $X_y(k)$ sont précisément les $\Omega_{j,y}(k)$, $j = 1, \ldots, r$. On termine ainsi la preuve du théorème. □

Remarque 3.6. Dans la preuve du théorème 3.1, on peut même se ramener au cas d'un tore constant sur Y. Cette astuce est due à L. Moret-Bailly. Avec les notations du théorème, soit $y_0 \in Y(k)$ et soit $S_0 = S_{y_0} \times_k Y$ un tore constant sur Y. D'après [SGA3] X 5.10,

$$\underline{\mathrm{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathrm{Isom}}_{Y-\mathrm{gr}}(S_0, S)$$

est un Y-schéma constant tordu. Ce schéma a un point rationnel y' au-dessus de y_0. Soit Y' un voisinage de y' dans $\underline{\mathrm{I}}$ qui est de type fini sur Y. L'immersion $Y' \hookrightarrow \underline{\mathrm{I}}$ correspond à un isomorphisme $S_{y_0} \times_k Y' \xrightarrow{\sim} S \times_Y Y'$ de Y'-tores, ainsi le tore S devient constant sur Y'. Comme Y' admet un point rationnel y' au-dessus de Y et est étale sur Y, dans la preuve du théorème 3.1 on peut remplacer Y par Y' et X par $X' = X \times_Y Y'$.

Quant aux applications pour la R-équivalence, cet argument et le corollaire 2.4

impliquent immédiatement le cas des compactifications lisses de familles de tores algébriques ou de groupes réductifs connexes (cf. section 1.3). En effet, si k est un corps de caractéristique nulle et si X est une compactification lisse d'un k-tore, alors $X(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$ où S est le tore dual de Pic$\bar{X}$ (cf. [3] théorème 2 et proposition 13). Sous des hypothèses supplémentaires sur k, en particulier pour k un corps local, si X est une compactification lisse d'un k-groupe réductif connexe, on a encore $X(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$ où S est le tore dual de Pic$\bar{X}$ (cf. [2] 8.4. et 5.4). Néanmoins, si X est une surface de Châtelet, on dispose d'une application injective $X(k)/R \to H^1(k, S)$ mais elle n'est pas nécessairement surjective ([5]).

Remerciements. Je voudrais remercier le rapporteur pour des corrections très utiles. Cela a permis d'obtenir des résultats plus généraux avec la méthode de la version initiale et de beaucoup améliorer la présentation de l'article.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène, *Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences*, in "Arithmetic Algebraic Geometry, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, September 10-15, 2007", 1–44, Lecture Notes in Mathematics **2009**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. **618** (2008), 77–133.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 2, 175–229.

[4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (Juillet 1979), édité par A.Beauville, Sijthof et Noordhof (1980) pp. 223–237.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J.54 (1987), no. 2, 375–492.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, *R-equivalence on conic bundles of degree 4*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 671–677.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)*, Expo. Math. 23 (2005), no. 2, 161–170.

[8] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[9] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, I, II, III. Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris 1968.

[10] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[11] S. Kleiman, *The Picard scheme*, Fundamental algebraic geometry, 235–321, Math. Surveys Monogr., **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[12] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Annals of Math. **150** (1999), no. 1, 357–367.

[14] J. Kollár, *Specialization of zero-cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 3, 689–708.

[15] Yu. I. Manin, *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1972.

[16] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.

[17] L. Moret-Bailly, *Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos*, arXiv :1010.0341v3.

[18] L. Moret-Bailly, *An extension of Greenberg's theorem to general valuation rings*, arXiv :1106.0984.

[19] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London 1970.

[20] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[21] A.N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[22] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, **10**, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[23] V.E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Transl. Math. Monogr. **179**, Amer. Math. Soc., 1998.

[SGA1] A. Grothendieck et M. Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie SGA 3, Lecture Notes in Math. **151, 152, 153**, Springer, Berlin-Heildelberg-New York, 1977.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lect. Notes Math. **225**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

Alena Pirutka
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE
alena.pirutka@ens.fr