MÉMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER
LES RECHERCHES DE L'UNIVERSITÉ
PARIS-SUD

Spécialité : Mathématiques

par

Alena Pirutka

Invariants birationnels, cycles algébriques et rationalité

Soutenu le 12 Décembre 2016 devant la Commission d'examen :

M. Antoine Chambert-Loir
M. Jean-Louis Colliot-Thélène
M. David Harari (Rapporteur)
M. Marc Levine (Rapporteur)
M. Emmanuel Peyre (Rapporteur)
M. Alexei Skorobogatov

MATHEMATIQUES
ORSAY

Remerciements

Mes remerciements les plus chaleureux vont à Jean-Louis Colliot-Thélène, pour avoir généreusement partagé ses idées et son enthousiasme avec moi, et pour m'avoir accompagnée dans les mathématiques dépuis le début de ma recherche.

Je suis très reconnaissante à David Harari, Marc Levine et Emmanuel Peyre d'avoir accepté d'écrire des rapports sur ce mémoire. Je suis très heureuse qu'Antoine Chambert-Loir et Alexei Skorobogatov aient accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu beaucoup de chance d'avoir bénéficié de collaborations avec Fedor Bogomolov, François Charles, Jean-Louis Colliot-Thélène, Brendan Hassett, Yuri Tschinkel et Nobuaki Yagita, je les remercie très chaleureusement pour de nombreuses discussions, pour ce qu'ils m'ont appris et ce qu'ils ont rendu possible. L'influence de Claire Voisin a joué un rôle très important dans ma recherche, je tiens à exprimer ici toute l'admiration que j'ai pour son travail.

J'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail et d'une atmosphère agréable et motivante à l'IRMA, à Strasbourg, à l'Université de Zürich, au CMLS, à l'École Polytechnique, et au Courant Institute, à New York. Je remercie particulièrement toute l'équipe du CMLS, où j'ai passé de très heureuses années.

Merci à ma famille et a mes amis, avec qui j'ai partagé les joies de ma recherche et de mon quotidien. Je pense en particulier à Anna, François, Olivier, David, Olivier et Viviane.

Enfin, je voudrais remercier Pascale Fuseau au CMLS et Florence Rey à Orsay pour leur aide dans la préparation de cette soutenance.

Travaux présentés pour l'habilitation

[BPS15] F. Bogomolov, A. Pirutka et A. Silberstein, *Families of disjoint divisors on varieties*, (2015), European Journal of Mathematics, disponible en ligne.

[CP16] F. Charles et A. Pirutka, *La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre sur un corps fini*, Compositio Mathematica **151**, no. 2, (2015), 253–264.

[CTP16] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (2) **49** (2016) 371–397.

[CTP16a] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Revêtements cycliques qui ne sont pas stablement rationnels*, Izvestiya RAN, Ser. Mat. **80**, 4 (2016), 35-47.

[HPT16] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *Stable rationality of quadric surface bundles over surfaces*, arXiv :1603.09262.

[HPT16a] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *A very general quartic double fourfold is not stably rational,* arXiv :1605.03220.

[Pir16] A. Pirutka, *Sur la cohomologie non ramifiée en degré trois d'un produit*, Bulletin de la SMF **144**, no. 1 (2016), 53–75

[Pir16a] A. Pirutka, *On a local-global principle for H3 of function fields of surfaces over a finite field*, à paraître dans "Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic (Palo Alto, 2013)."

[Pir16b] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, arXiv :1603.09261.

[PY15] A. Pirutka et N. Yagita, *Note on the counterexamples for the integral Tate conjecture over finite fields*, Documenta Math. Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday, (2015), 501-511.

Résumé

Ce mémoire a pour but de présenter des résultats que j'ai obtenus depuis ma thèse, en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches. Les travaux présentés dans ce texte portent sur l'étude des propriétés des variétés algébriques, plus précisément, sur des propriétés birationnelles, des invariants qui peuvent les distinguer et des applications à l'étude des cycles algébriques.

Soit X une variété projective intègre définie sur un corps k. Dans ce mémoire on considère deux aspects de l'étude des propriétés de la variété X :

(i) On s'intéresse à déterminer si X est "proche" à un espace projectif, qu'on considère souvent comme une variété "très simple" : on a des notions de variété rationnelle, unirationnelle, stablement rationnelle ou rationnellement connexe. Souvent il est très difficile de déterminer si une variété donnée possède ces propriétés. Pour ce faire, on étudie plusieurs invariants birationnels (resp. invariants birationnels stables) associés à X. Dans les trois dernières années, à la suite d'un travail novateur de Claire Voisin [Voi15], il y a eu des progrès importants dans ce domaine ; les nouveaux résultats sont obtenus par une méthode basée sur la spécialisation et des propriétés des zéro-cycles. La première partie de mes travaux est concacrée aux développements de cette méthode et à l'étude des invariants birationnels, avec les applications à des questions de rationalité stable.

(ii) Dans une autre direction, on associe à la variété X les groupes de Chow $CH^i(X)$ des cycles de codimension i sur X modulo l'équivalence rationnelle, ces groupes reflètent la structure riche de la variété X. Le groupe de Chow des zéro-cycles joue un rôle central dans la méthode de spécialisation ci-dessus. Par ailleurs, les groupes $CH^i(X)$ sont souvent compliqués à comprendre. Une approche pour les étudier consiste à considérer les applications *classe de cycle* vers les objets "linéaires" : les groupes de cohomologie (Betti ou étale) de X. Dans le cas des variétés sur un corps fini, l'énoncé de la surjectivité de ces applications à coefficients $\mathbb{Q}_\ell$ fait l'objet de la conjecture de Tate. La version entière (à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$) de cette conjecture n'est en général pas vraie. Dans le cas des cycles de codimesion 2 le conoyau de l'application classe de cycle est relié à un invariant birationnel (cohomologie non-ramifiée en degré 3) de X. La deuxième partie de mes travaux est consacrée à ces questions.

Nous avons choisi d'organiser ce texte en trois parties. La première partie est une introduction générale aux problèmes abordés dans ce mémoire. Dans la section 1.1 on rappelle les définitions et quelques propriétés des groupes de Chow et des groupes de cohomologie non ramifiée. La section 1.2 est consacrée à l'introduction et l'historique pour la première thématique de ce mémoire : les propriétés de rationalité. Les invariants birationnels qui sont utilisés dans ce mémoire sont introduits dans la partie 1.2.2. Dans la section 1.2.3 on discute les progrès récents dans les problèmes de rationalité stable. La section 1.3 est consacrée au deuxième sujet de ce mémoire, on discute les versions de la conjecture entière de Tate, ainsi que le lien avec le troisième groupe de cohomologie non ramifiée.

Dans le chapitre 2 je décris les travaux :

- [CTP16], [CTP16a] (en commun avec J.-L. Colliot-Thélène), [HPT16], [HPT16a] (en commun avec B. Hassett et Y. Tschinkel) et [Pir16b] sur les problèmes de rationalité. L'article [Pir16b] est un article de survol qui contient une formule originale pour le deuxième groupe de cohomologie non ramifiée dans le cas des fibrations en quadriques de dimension 2 sur une surface.
- [CP15] (en commun avec F. Charles), [PY15] (en commun avec N. Yagita) et [Pir16] sur l'étude des groupes de Chow des cycles de codimension 2 pour des variétés sur un corps fini et le troisième groupe de cohomologie non ramifiée.

Dans la dernière partie de ce texte on discute quelques questions ouvertes, ainsi que des projets.

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Rappels 11

1.1.1 Groupes de Chow 11

1.1.2 Cohomologie non ramifiée 12

1.2 Rationalité 14

1.2.1 Notions 14

1.2.2 Invariants 16

1.2.3 Rationalité stable et méthode de spécialisation 18

1.3 Conjecture de Tate entière 21

2 Contributions **25**

2.1 Groupe de Chow des zéro-cycles et H2 non ramifié 25

2.1.1 Développement de la méthode de spécialisation de Voisin ([CTP16]) 25

2.1.2 Exemples de variétés qui ne sont pas stablement rationnelles ([CTP16, CTP16a, HPT16a]) 27

2.1.3 La rationalité n'est pas constante dans une famille projective lisse ([HPT16]) 29

2.1.4 Comment calculer H^2_{nr} ([Pir16b]) 31

2.2 Cycles de codimension 2 et H3 non ramifié. 34

2.2.1 La conjecture de Tate entière pour les cycles de codimension 2 sur une hypersurface cubique de dimension 4 ([CP15]) 35

2.2.2 Contre-exemples à la conjecture de Tate entière pour les cycles de codimension 2 ([PY15]) 37

2.2.3 Sur la cohomologie non ramifiée en degré 3 d'un produit ([Pir16]) 40

3 Questions et projets **45**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappels

1.1.1 Groupes de Chow

Soit k un corps et soit X une variété intègre de dimension d sur k. On associe à X les groupes de Chow $CH^i(X)$ des cycles de codimension i définis comme suit : on considère

$$Z^i(X) = \oplus_{x \in X^{(i)}} \mathbb{Z}$$

le groupe abélien libre sur les sous-variétés intègres de X de codimenion i et on pose

$$CH^i(X) = Z^i(X)/\sim_{rat}$$

le quotient de ce groupe par la relation d'équivalence rationnelle [Ful98]. On pose $Z_i(X) = Z^{d-i}(X)$ et $CH_i(X) = CH^{d-i}(X)$.

Dans le cas des zéro-cycles on dispose d'une application degré

$$Z_0(X) \to \mathbb{Z},\ \sum n_i P_i \mapsto \sum n_i [\kappa(P_i) : k],$$

où l'on écrit $\kappa(P_i)$ pour le corps résiduel du point P_i. Si X est propre, cette application se factorise par l'équivalence rationnelle et donne l'application

$$deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z},$$

On écrit $A_0(X)$ pour le noyau de cette application.

Supposons que X est projective et lisse, connexe, de dimension d. Pour H une théorie cohomologique de Weil sur k, on dispose des applications *classe de cycle* à valeurs dans $H(X)$. Pour $k = \mathbb{C}$, on considère la cohomologie de Betti, les applications

$$cl^i : CH^i(X) \to H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$$

généralisent l'application

$$Pic(X) \to H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$$

qui vient de la suite exacte exponentielle. Pour $i = d$ l'application cl^d coïncide avec l'application degré.

L'image de l'application

$$cl^i_{\mathbb{Q}} : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(i))$$

est incluse dans le sous-groupe $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Q})$ des classes de Hodge : ce sont les classes dans $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(i))$ dont l'image dans $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}(i))$ est de type (i, i) pour la décomposition de Hodge. La conjecture de Hodge affirme que l'application

$$cl^i_{\mathbb{Q}} : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \to Hdg^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

est surjective.

Pour k un corps fini (resp. k de type fini sur son sous-corps premier), et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k, on considère la cohomologie ℓ-adique étale (resp. cohomologie continue). Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $G = Gal(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k. On considère les applications

$$cl^i : CH^i(X) \to H^{2i}_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^G \tag{1.1}$$

où $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. La conjecture de Tate affirme que l'application classe de cycle à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$:

$$cl^i_{\mathbb{Q}_\ell} : CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^G$$

est surjective.

La conjecture de Hodge pour les variétés complexes et la conjecture de Tate pour les variétés sur un corps fini sont des conjecture extrêmement difficiles, elles sont établies dans très peu de cas. La conjecture de Hodge vaut pour les diviseurs (le théorème de Lefschetz sur les classes de type (1,1)). On n'a pas de résultat analogue pour la conjecture de Tate. Dans le cas des surfaces K3 la conjecture de Tate a été démontrée récemment par D. Maulik [Mau14], F. Charles [Cha13] et K. Madapusi Pera [Per15].

1.1.2 Cohomologie non ramifiée

Soit k un corps et soit X une k-variété intègre. On associe à X ([BO74], [CTO89], [CT92]) les groupes de cohomologie non ramifiée définis de la manière suivante.

Pour n un entier inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour i un entier positif on note $\mu_n^{\otimes i} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ (i fois). On pose $\mu_n^{\otimes i} = Hom_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-i)}, \mathbb{Z}/n)$ si i est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$.

Pour F un corps de fonctions sur k, $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif on définit

$$H^j_{\mathrm{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_A} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application ∂_A est l'application résidu. En pratique, on peut exprimer les valeurs de ces applications résidus explicitement.

Pour X une k-variété intègre, on considère ainsi les groupes $H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i})$, où $k(X)$ est le corps des fonctions de X. On utilise aussi les groupes $H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ (resp. $H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i))$ pour l un nombre premier) obtenus par passage à la limite inductive.

Lorsque X est propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus [BO74] permettent d'identifier le groupe $H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie de Zariski $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j_{\acute{e}t}(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT92] 4.1.1). En particulier, pour X propre et lisse, pour vérifier qu'un élément de $H^j(k(X), \mu_n^{\otimes i})$ est non ramifié, il suffit de le faire pour les anneaux de valuation discrète associés aux points de codimension 1 de X :

$$H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Ker}\, \partial_{\mathcal{O}_{X,x}}.$$

On dispose d'une description explicite des groupes H^1_{nr} et H^2_{nr}. Pour X une variété intègre, projective et lisse sur un corps k et pour tout entier $n > 0$, on a ([CT92] 4.2.1 et 4.2.3) :

$$\begin{aligned} H^1_{\acute{e}t}(X, \mu_n) &\xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n) \\ \mathrm{Br}(X)[n] &\xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n). \end{aligned}$$

On n'a pas de formule analogue pour le groupe de cohomologie non ramifiée en degré 3.

1.2 Rationalité

1.2.1 Notions

Soient k un corps et X/k une variété projective intègre. On dit que

1. X est k-**rationnelle** si X est birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$;
2. X est k-**stablement rationnelle** si $X \times \mathbb{P}^m_k$ est k-rationnelle, pour certain m ;
3. X est k-**rétracte rationnelle** s'ils existent des ouverts Zariski $U \subset X$ et $V \subset \mathbb{P}^n_k$, pour certain n, et deux applications $f : U \to V$ et $g : V \to U$ telles que $g \circ f = id_U$;
4. X est k-**unirationnelle** s'il existe une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^n_k \dashrightarrow X$;
5. X est **rationnellement connexe** si pour tout corps algébriquement clos $\Omega \supset k$, pour deux points généraux $x, y \in X(\Omega)$ il existe une courbe rationnelle qui passe par x et y : il existe $f : \mathbb{P}^1_\Omega \to X_\Omega, 0 \mapsto x, \infty \mapsto y$.

Si le corps k est algébriquement clos, on peut omettre k dans les notions ci-dessus : on dit que X est rationnelle (resp. stablement rationnelle etc.).

D'après les définitions, on a

$$\begin{array}{c} X \text{ est } k\text{-rationnelle} \\ \Downarrow ① \\ X \text{ est } k\text{-stablement rationnelle} \\ \Downarrow ② \\ X \text{ est } k\text{-rétracte rationnelle} \\ \Downarrow ③ \\ X \text{ est } k\text{-unirationnelle} \\ \Downarrow ④ \\ X \text{ est rationnellement connexe.} \end{array}$$

Soit X une variété complexe, projective et lisse. Si $\dim X = 1$ ou 2, les notions ci-dessus sont équivalentes (théorème de Lüroth pour la dimension 1, classification de Castelnuovo-Enriques pour la dimension 2).

En général, la première implication est stricte : il existe des exemples de variétés complexes de dimension 3 qui sont stablement rationnelles, non rationnelles (Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [BCTSSD]). Si le corps k admet une extension F telle que $Gal(F/k)$ est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, il y a aussi des exemples de surfaces qui sont k-stablement rationnelles mais qui ne sont pas k-rationnelles (*loc.cit.*).

La question de savoir si l'implication ② est stricte reste ouverte dans le cas $k = \mathbb{C}$. Pour k non algébriquement clos il y a des exemples de k-tore T tel que T n'est pas k-stablement rationnel mais $T \times_k T$ est k-stablement rationnel.

Dans les années 1970, on a trouvé des exemples de variétés complexes qui sont unirationnelles, non rationnelles :

1. Toute cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^4_\mathbb{C}$ est unirationnelle. Clemens and Griffiths ont établi [CG72] que X n'est jamais rationnelle, ils utilisent le critère de la jacobienne intermédiaire. Cet invariant ne permet pas de distinguer la rationalité stable.

2. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ un solide quartique lisse. Par une méthode dite 'de rigidité', Iskovskikh et Manin [IM71] ont montré que la variété X n'est jamais rationnelle. Ils existent des exemples où un solide quartique lisse est une variété unirationnelle (*loc. cit.*) La méthode de rigidité ne permet pas non plus de comprendre la rationalité stable.
   En utilisant un raffinement de la méthode de spécialisation de Voisin [Voi15], dans un travail en commun avec J.-L. Colliot-Thélène [CTP16] nous montrons qu'un solide quartique très général n'est pas stablement rationnel.
3. L'exemple d'Artin-Mumford [AM72] est un solide double
$$X : z_4^2 - f(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0$$
   ramifié le long d'une quartique (particulière) $f(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0$. On peut aussi voir ces variétés comme fibrations en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2$. On voit facilement que X est unirationnelle. Artin et Mumford montrent que pour toute résolution $\tilde{X}$ de X le groupe $H^3(\tilde{X}, \mathbb{Z})_{tors}$ n'est pas nul (dans ce cas, ce groupe est aussi isomorphe à $Br(\tilde{X})[2]$). Il s'agit ici d'un invariant qui distingue la rationalité stable. Plus généralement, on conclut que $\tilde{X}$ n'est même pas rétracte rationnelle. Ainsi, cet exemple montre que l'implication ③ est stricte.

Distinguer les notions de variété unirationnelle et de variété rationnellement connexe (l'implication ④) pour les variétés complexes est considéré comme une question très difficile, on ne dispose d'aucun invariant qui peut distinguer ces classes. Par ailleurs, dans tous les cas où l'on sait montrer l'unirationalité, on utilise des constructions géométriques explicites (cf. [Kol02], [IM71]). Toute variété de Fano lisse complexe est rationnellement connexe [KMM92], [Cam92]. En particulier, une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de degré $d \leq n$ est rationnellement connexe.

On ne sait pas si toutes les quartiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ (resp. toutes hypersurfaces lisses de degré n dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$) sont unirationnelles.

Toujours dans le cas des hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ on dispose de plusieurs problèmes ouverts. En particulier, la question de savoir s'il existe une hypersurface lisse X de degré $d \geq 4$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ pour certains d et n, telle que X est une variété rationnelle ([Kol96, p.282]), est toujours ouverte. Pour une hypersurface X très générale de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$, on sait que X n'est pas rationnelle si d est au moins $\lceil 2(n+3)/3 \rceil$ [Kol95]. Pour obtenir ce résultat, Kollár a utilisé la spécialisation en caractéristique positive et les propriétés de faisceaux des formes différentielles.

Dans une autre direction, on s'intéresse à comprendre comment les notions de rationalité ci-dessus se comportent en familles de variétés complexes, projectives et lisses : soit B un schéma intègre de type fini sur $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{X} \to B$ un morphisme projectif et lisse. Supposons qu'il existe un point $b_0 \in B(\mathbb{C})$ tel que $\mathcal{X}_{b_0}$ est une variété rationnelle. Que peut-on dire sur d'autres fibres $\mathcal{X}_b$ pour $b \in B(\mathbb{C})$? Autrement dit, est-ce que la rationalité est invariante par déformation dans les familles de variétés projectives et lisses ? Ce problème est resté ouvert depuis longtemps. Il est facile à voir que la réponse est positive dans le cas de dimension relative 1 et 2 : dans ces cas, la rationalité est détectée par des invariants cohomologiques qui sont constants en familles projectives et lisses (le genre pour les courbes, critère de Castelnuovo pour les surfaces). On a facilement un contrexemple pour des variétés singulières (une courbe elliptique peut se spécialiser sur une cubique nodale rationnelle). **Dans un travail en commun avec Hassett et Tschinkel [HPT16], on a construit une famille explicite $\mathcal{X} \to B$ de variétés projectives et lisses de dimension 4, telle qu'une fibre très générale (i.e. en dehors d'un ensemble dénombrable de fermés dans B) n'est pas stablement rationnelle, et l'ensemble des fibres rationnelles est dense pour la topologie euclidienne sur la base.**

1.2.2 Invariants

Dans les problèmes de rationalité il est très important de construire et de comprendre les invariants birationnels, respectivement, les invariants birationnels stables. Dans ce texte, on étudie deux types d'invariants ci-dessous.

Cohomologie non ramifiée
D'après la définition, on voit que les groupes de cohomologie non ramifiée sont des invariants k-birationnels des k-variétés intègres : ils ne dépendent que du corps des fonctions de X. On montre [CTO89] que ce sont aussi des invariants birationnels stables : si X/k est une variété stablement rationnelle, alors les applications naturelles

$$H^i(k, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$$

sont des isomorphismes pour tout $i \geq 1$. Plus généralement, pour tout corps F contenant k on a des isomorphismes $H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{nr}}(F(X)/F, \mu_n^{\otimes j})$, $i \geq 1$.

Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO89] ont utilisé les groupes de cohomologie non ramifiée pour introduire une nouvelle méthode pour trouver des exemples de variétés complexes, fibrés en quadriques au-dessus d'un espace projectif, où le groupe H^2_{nr} ou H^3_{nr} est non nul. En général, on comprend assez bien les propriétés de la cohomologie galoisienne des corps des fonctions de quadriques, ce qui permet d'analyser explicitement les applications résidus dans ces exemples. Ces variétés donnent ainsi de nouveaux types d'exemples de variétés unirationnelles non rationnelles sur $\mathbb{C}$, et en particulier une autre explication de l'exemple d'Artin-Mumford [AM72].

Cette méthode est assez flexible, elle a été utilisée dans d'autres travaux, en particulier :

— E. Peyre [Pey93] a construit des exemples de corps des fonctions K sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0 tels que K est un sous-corps d'une extension transcendante pure de k et que le groupe $H^i_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_p^{\otimes i})$ n'est pas nul, pour $i = 2, 3$ ou 4 et p un nombre premier. Dans ces exemples les groupes $H^j_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mu_p^{\otimes i})$ sont triviaux pour $j < i$.

— A. Asok [Aso13] a donné des exemples de fibrations en quadriques de dimension supérieure, où le groupe $H^n_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Z}/2)$ n'est pas trivial, mais les groupes $H^i_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Z}/2)$ sont triviaux pour tout $i < n$.

On revient à la méthode ci-dessus dans la section 2.1.4, où l'on donne des formules combinatoires précises pour le groupe $H^2_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Z}/2)$ dans le cas des fibrations en quadriques de dimension 1 ou 2 au-dessus d'une surface rationnelle sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

Groupes de Chow

Le groupe $A_0(X)$ est un invariant birationnel des k-variétés intègres, propres et lisses [CTC79, Prop. 6.3], [Ful98, Ex. 16.1.11].

Définition 1.2.1. On dit que X est **universellement CH_0-triviale** si pour tout corps F qui contient k l'application degré induit un isomorphisme $CH_0(X_F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Par exemple :

- Si X est une variété projective et lisse, rétracte rationnelle, alors X is universellement CH_0-triviale [CTP16, Lemma 1.5].
- Certaines variétés singulières sont universellement CH_0-triviales. C'est le cas en particulier si $X = \cup_{i=1}^n X_i$ est une variété connexe sur un corps algébriqement clos, telle que X_i est géométriquement irréductible, universellement CH_0-triviale et que chaque intersection $X_i \cap X_j$ est soit vide, soit contient un zéro-cycle de degré 1 [CTP16a, Lemma 2.4].
- Si $X/\mathbb{C}$ est une surface de Barlow, alors X est universellement CH_0-triviale (cf. [ACTP16, Corollary 1.10]). On a ainsi un exemple d'une variété universellement CH_0-triviale qui n'est pas rationnelle.

Soit X une variété propre, universellement CH_0-triviale, définie sur un corps k. D'après la définition on dispose d'un zéro-cycle x dans $CH_0(X)$ de degré 1. On considère $F = k(X)$ le corps des fonctions de X. Soit $\eta \in X_F(F)$ le point générique de X. On a alors que le zéro-cycle $\eta - x \in CH_0(X_F)$ est de degré zéro. Ainsi $\eta - x = 0$ dans $CH_0(X_F)$. On peut étendre cette égalité sur $X \times X$, on obtient :

$$[\Delta_X] = [X \times x] + [Z] \in CH_{dim\,X}(X \times X), \tag{1.2}$$

où $\Delta_X = \{x, x\} \subset X \times X$ est la diagonale, Z est supporté sur $D \times X$, où $D \subset X$ est une sous-variété fermée de codimension au moins 1.

Définition 1.2.2. On dit qu'une variété projective X de dimension n définie sur un corps k admet **une décomposition de Chow de la diagonale** si la décomposition (1.2) vaut sur X.

On a ainsi que si X est une variété universellement CH_0-triviale, alors X admet une décomposition de Chow de la diagonale. Cette propriété ne dépend pas du choix de zéro-cycle $x \in CH_0(X)$. Les propriétés de décomposition de la classe $N[\Delta_X]$, $N > 0$ sont déjà utilisées dans le travail de Bloch et Srinivas [BS83]. Ici on considère la décomposition entière, i.e. avec $N = 1$. Si X est une variété lisse, on dispose de l'action des correspondances sur plusieurs invariants, en particulier, sur des invariants cohomologiques de X. L'action de la diagonale $[\Delta_X]_*$ est l'application identité. Par ailleurs, la décomposition de Chow de la diagonale permet dans certains cas de montrer que $[\Delta_X]_*$

est l'application nulle. Cette stratégie permet de montrer que la trivialité universelle du groupe de Chow des zéro-cycles implique la trivialité de plusieurs autres invariants :

Théorème 1.2.3. *Soit X une variété projective et lisse, géométriquement connexe, définie sur un corps k. Supposons que X admet une décomposition de Chow de la diagonale. Alors*

(i) X est universellement CH_0-triviale ;

(ii) pour tout corps F contenant k, l'application naturelle $Br(F)[n] \to Br(X_F)[n]$ est un isomorphisme pour tout n premier à la caractéristique de k ;

(iii) pour tout corps F contenant k, l'application naturelle $H^i_{nr}(F, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i_{nr}(F(X)/F, \mu_n^{\otimes j})$ est un isomorphisme pour tout n premier à la caractéristique de k ;

(iv) plus généralement, pour tout module de cycles de Rost M^i sur k et pour tout corps F contenant k, l'application naturelle $M^i(F) \to M^i_{nr}(F(X)/F)$ est un isomorphisme.

(v) $H^0(X, \Lambda^i \Omega_X) = 0$ pour tout $i > 0$.

Dans les applications, on utilise ce théorème dans deux contextes :

— si X est une variété complexe, projective et lisse, telle que $BrX \neq 0$ (resp. X est une variété projective et lisse, telle que $H^0(X, \Lambda^i \Omega_X) \neq 0$), alors X n'est pas universellement CH_0-triviale ;

— si l'on montre qu'une variété X, projective et lisse, n'est pas universellement CH_0-triviale, alors X n'est pas stablement rationnelle, ni même rétracte rationnelle.

On revient sur l'étude des variétés universellement CH_0-triviales dans la section 2.1.

1.2.3 Rationalité stable et méthode de spécialisation

Récemment la non rationalité stable a été établie dans beaucoup de nouveaux cas. Ces nombreux développements ont été obtenus à la suite du travail de Voisin [Voi15]. Dans les énoncés ci-dessous, 'une variété très générale' signifie qu'on enlève une union dénombrable de conditions fermées sur les paramètres dans les familles que l'on considère :

— La méthode de spécialisation a été introduite dans [Voi15], où C. Voisin a montré qu'un solide double très général $X \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, ramifié le long d'une quartique avec au plus 7 singularités quadratiques ordinaires n'est pas stablement rationnel. Ce premier cas d'application des arguments de spécialisation est fondamental pour les développements qui ont suivi. Notons que l'exemple d'Artin-Mumford est un solide double ramifié le long d'une quartique avec 10 singularités quadratiques ordinaires. Par ailleurs, pour X une résolution d'un solide double ramifié le long d'une quartique avec au plus 7 singularités quadratiques ordinaires, l'invariant topologique d'Artin Mumford s'annule : si les singularités sont dans une position générale, la variété X n'a pas de torsion dans la cohomologie à coefficients entiers. Dans le cas de 7 singularités, même la non rationalité n'était pas connue : en effet, dans ce cas, la Jacobienne intermédiaire de X est de dimension 3, c'est donc une variété abélienne principalement polarisée isomorphe à une Jacobienne d'une courbe. Dans ce cas, le critère de Clemens-Griffiths ne distingue pas non plus la non ratinalité.

— **Dans un travail en commun avec J.-L. Colliot-Thélène [CTP16] on a démontré qu'un solide quartique très général $X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ n'est pas stablement rationnel.**
— Beauville [Bea14] a montré la non rationalité stable pour un solide double très général X de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ramifié le long d'une sextique.
— Totaro [Tot15] a montré qu'une hypersurface très générale $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$, de degré $d \geq 2\lceil (n+2)/3 \rceil$ n'est pas stablement rationnelle. Cet énoncé est plus fort que le résultat de Kollár [Kol95].
— **Dans un travail en commun avec J.-L. Colliot-Thélène [CTP16a] on a démontré qu'un revêtement cyclique X de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de degré premier p ramifié le long d'une hypersurface de degré mp avec $m(p-1) < n+1 \leq mp$ n'est pas stablement rationnel.** Ce résultat à été récemment étendu par Okada [Oka16] au cas de revêtements de degré quelconque (non nécessairement premier).
— Hassett, Kresch et Tschinkel [HKT15] ont établi la non rationalité stable pour certains fibrés en coniques, en particulier, un fibré très général au-dessus de $\mathbb{P}^2_k$ avec $k = \bar{k}$, *char* $k \neq 2$, et le discriminant de degré $d \geq 6$. Böhning et von Bothmer [BvB16] ont étendu ce résultat pour les fibrés en coniques spéciaux, que l'on peut réaliser comme des hypersurfaces de degré $(2, n)$, $n \geq 2$, dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
— Plus généralement, Hassett et Tschinkel [HT16] ont montré qu'un solide de Fano très général qui n'est pas rationnel, et qui n'est pas birationnel à un solide cubique, n'est pas stablement rationnel.
— **Dans un travail en commun avec Hassett et Tschinkel [HPT16a] on a montré qu'un revêtement double de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ ramifié le long d'une quartique, très général, n'est pas stablement rationnel.**

Dans ces exemples on a en fait une conclusion (a priori) plus forte : les variétés ci-dessus ne sont pas rétractes rationnelles. Les invariants stables classiques, essentiellement de nature cohomologique (par exemple, le groupe de Brauer comme dans l'exemple d'Artin-Mumford), sont souvent triviaux ou difficiles à calculer dans ces cas. Pour établir les résultats ci-dessus, on a utilisé des variantes et extensions de la méthode de spécialisation introduite par C. Voisin dans [Voi15].

On peut diviser cette méthode en trois parties :

Invariants : on trouve des invariants qui possèdent des «bonnes propriétés» de spécialisation ;

Obstruction : on produit des variétés qui possèdent des invariants nontriviaux. Ces variétés sont en général singulières, pour pouvoir appliquer la méthode on a aussi une condition sur les singularités autorisées. Cette partie est en général la plus technique à réaliser et elle nécessite souvent de construire explicitement une résolution des singularités.

Construction d'une famille : on déduit qu'une variété qui se spécialise sur une variété dans l'étape précédente ne peut pas être stablement rationnelle.

Dans cette méthode et ses extensions on utilise comme invariant la trivialité universelle du groupe de Chow des zéro-cycles ou des propriétés de décomposition de la diagonale dans le groupe de Chow. Dans [Voi15] Claire Voisin obtient le résultat suivant pour des familles de variétés avec des singularités quadratiques ordinaires :

Théorème 1.2.4. [Voi15, Thm. 2.1] *Soit $\pi : \mathcal{X} \to B$ un morphisme projectif et plat de dimension relative $n \geq 2$, où B est une courbe lisse. Supposons que la fibre $\mathcal{X}_t$ est lisse pour $t \neq 0$ et que pour $t = 0$ la fibre $\mathcal{X}_0$ a des singularités doubles ordinaires. Si pour $t \in B$, la fibre $\mathcal{X}_t$ admet une décomposition de Chow de la diagonale, on en a de même pour tout modèle projectif et lisse $\tilde{\mathcal{X}_0}$ de $\mathcal{X}_0$. En particulier, si $\tilde{X}_0$ n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale, alors une fibre très générale $\mathcal{X}_t$ n'est pas stablement rationnelle.*

Pour les survols sur la méthode de spécialisation, voir [Bea15], [Pir16b], [Voi15b]. On revient sur le développement de la méthode dans la partie 2.1.

1.3 Conjecture de Tate entière

Il est bien connu que les versions entières de la conjecture de Hodge et de la conjecture de Tate ne sont en général pas vérifiées. Pour comprendre les propriétés des applications classe de cycle, on s'intéresse à décrire le défaut des applications cl^i à coefficients entiers.

Considérons d'abord le cas où $k = \mathbb{C}$. Soit

$$Z^{2i} = coker[cl^i : CH^i(X) \to Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z})]$$

où $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2i}(X, \mathbb{Z}(i))$ consiste en les classes qui sont de type (i, i) dans $H^{2i}(X, \mathbb{C}(i))$. On sait que $Z^{2i} = 0$ pour $i = 1$ (théorème de Lefschetz). On sait aussi que les groupes $Z^{2i}(X)$ sont des invariants birationnels des variétés projectives et lisses pour $i = 2$ et $i = dim\, X - 1$ [Voi07a, Lemme 15]. Dans le cas $i = 2$ on dispose de plusieurs types d'exemples (voir [CTV12] pour les énoncés précis) où le groupe $Z^{2i}(X)$ n'est pas nul. Les exemples d'Atiyah-Hirzebruch [AH62], revisités par Totaro [Tot97] donnent des classes non triviales dans $Z^4(X)$, qui proviennent d'une classe de torsion dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$. Dans ces exemples on construit X comme une «approximation algébrique» de l'espace classifiant pour le groupe fini $(\mathbb{Z}/\ell)^3$.

Kollár [Kol90] montre que pour les hypersurfaces très générales dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ de degré suffisamment divisible, toute classe d'une courbe est un multiple d'un premier ℓ dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}$. On obtient ainsi une classe non algébrique qui reste non algébrique modulo la torsion dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ (qui est nulle dans ce cas).

Dans le problème entier pour la conjecture de Tate, on peut distinguer des versions différentes ([CTS10]). Soit k un corps fini. On s'intéresse à la surjectivité des applications

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2i}_{ét}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)) \tag{1.3}$$

ou

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2i}_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^G \tag{1.4}$$

ou

$$CH^i(\bar{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_U H^{2i}_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^U, \tag{1.5}$$

où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts de G.

Le deuxème (resp. troisième) énoncé de surjectivité est a priori plus faible que le premier (resp. le deuxième). Un argument de poids montre que ces énoncés sont tous équivalents à coefficients $\mathbb{Q}_\ell$. En utilisant la suite de Kummer et le groupe de Brauer, on montre que pour $i = 1$ la surjectivité de l'application (1.3) pour une variété X est équivalente à la conjecture de Tate à coefficients $\mathbb{Q}_\ell$, et même à la bijectivité du morphisme (1.1). On s'intéresse ainsi à des cycles de codimension 2.

Les exemples d'Atiyah-Hirzebruch [AH62] s'adaptent ici pour produire des exemples où l'application (1.5) n'est pas surjective. Dans les exemples de Kollár il y a un choix d'une variété 'très générale', son argument ne fonctionne pas pour des variétés sur un corps fini. **Dans un travail en commun avec Yagita [PY15], on a construit des**

premiers exemples de variétés sur un corps fini où l'application

$$CH^2(\bar{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_U H^4(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^U/torsion \tag{1.6}$$

n'est pas surjective. Comme dans la méthode d'Atiyah et Hirzebruch, ces exemples sont obtenus à partir des espaces classifiants de groupes algébriques, dans notre cas ce sont des groupes de type exceptionnel. Cette méthode a été aussi reprise par B. Antieau [Ant15] pour construire d'autres contrexemples, en utilisant plus d'arguments de la théorie des représentations.

On a aussi très peu de résultats où l'on sait qu'une version entière de la conjecture de Tate est satisfaite :

— Schoen [Sch98] montre que si la conjecture de Tate (à coefficients rationnels) est vraie pour les diviseurs, alors l'application (1.5) est surjective pour $i = d - 1$.

— Parimala et Suresh [PS10] montrent que l'application (1.3) est surjective pour les cycles de codimension 2 pour X une fibration en coniques au-dessus d'une surface géométriquement réglée.

— **Dans un travail en commun avec F. Charles [CP15] on a établi la surjectivité de l'application (1.5) pour X une hypersurface cubique de dimension 4 définie sur un corps fini (resp. un corps de type fini sur son sous-corps premier) de caractéristique au moins 5.**

De façon générale, on peut décrire le conoyau de l'application

$$CH^2(X) \to H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$$

pour $k = \mathbb{C}$ et

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4_{ét}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

pour k un corps fini en termes de certains invariants birationnels, et plus précisément avec le groupe de cohomologie non ramifiée en degré 3 [CTV12], [Kah11], [CTK13]. Pour X une variété complexe connexe, projective et lisse, on a une suite exacte ([CTV12, Thm. 3.7], [Kah11])

$$0 \to H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}(2))/n \to H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mu_n^{\otimes 2}) \to Z^4(X)[n] \to 0.$$

Si le groupe de Chow des zéro-cycles $CH_0(X)$ est supporté sur une surface, on a un isomorphisme

$$H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} Z^4(X)[n]$$

(cela vaut par exemple pour X une variété rationnellement connexe, dans ce cas $CH_0(X)$ est supporté sur un point). Pour établir la suite ci-dessus, on utilise des techniques et des résultats très profonds, en particulier, la théorie de Bloch-Ogus pour la cohomologie de Betti, ainsi que la conjecture de Bloch-Kato en K-théorie.

Si k est un corps fini, X est une variété projective et lisse sur k et ℓ est un premier différent de la caractéristique de k, la torsion dans le conoyau de l'application classe de cycle

$$cl^2 : CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4_{ét}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est isomorphe au quotient du groupe $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal ([Kah11, CTK13]). Notons que la conjecture de Tate implique que le conoyau de cl^2 est de torsion, le groupe $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est aussi conjecturalement fini. Pour établir ce résultat on utilise la cohomologie motivique.

On s'intéresse ainsi aux propriétés du groupe de cohomologie non ramifiée en degré 3 pour les variétés sur un corps fini. Dans certains cas, on arrive à déterminer le groupe $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ (ou déterminer si ce groupe est non nul). Ainsi les résultats de comparaison ci-dessus permettent d'obtenir des applications pour l'étude des cycles algébriques. En utilisant la méthode de Colliot-Thélène et Ojanguren ([CTO89]), on arrive à comprendre ce groupe dans le cas des fibrations en quadriques. En particulier, **dans [Pir11], j'ai construit un exemple d'une variété géométriquement rationnelle sur un corps fini k, de dimension 5, où le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Z}/2)$ est non nul. En utilisant les méthodes de la K-théorie algébrique (ou la cohomologie motivique comme dans [CTK13, Kah11]), cela implique que l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^{Gal(\bar{k}/k)}$ n'est pas surjective.**

Les propriétés du troisième groupe de cohomologie non ramifiée sont aussi liées aux questions arithmétiques : on a le principe local-global suivant pour des variétés projectives et lisses V de dimension 3, définies sur un corps fini k, qui admettent une fibration $V \to C$ vers une courbe :

Théorème 1.3.1. ([CTK13]) *Supposons que la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur V et que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(V)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. S'il existe sur la surface V_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de V_η via l'accouplement de Brauer-Manin, alors il existe sur V_η un zéro-cycle de degré premier à l.*

Par conséquent, on s'intéresse à savoir si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(V)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour une telle variété V. On conjecture ([CTK13] Conjecture 5.6), que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour une k-variété projective et lisse, de dimension 3, géométriquement uniréglée définie sur un corps fini k. Pour une variété fibrée en coniques au-dessus d'une surface, et $car(k) \neq 2$, c'est un théorème de Parimala et Suresh [PS10]. Pour V comme ci-dessus, le premier cas à examiner est celui d'une fibration triviale $V = X \times C$ où X est une surface géométriquement rationnelle sur $\mathbb{F}$. **Dans [Pir16] j'ai établi la conjecture pour de telles variétés V.**

Pour montrer que le groupe H^3_{nr} est nul pour une variété fibrée en coniques au-dessus d'une surface S sur un corps fini k, Parimala et Suresh utilisent une analyse fine sur le groupe de Brauer d'une surface sur un corps fini, en suivant aussi des travaux de Saltman. Un ingrédient important est un principe local-global de divisibilité d'un élément de $H^2(k(S), \mathbb{Z}/2)$ par un symbole dans $H^2(k(S), \mathbb{Z}/2)$. **Dans [Pir16a], j'ai établi ce principe local-global pour tout élément dans $H^2(k(S), \mathbb{Z}/2)$ (non nécessairement un symbole), en utilisant les mêmes techniques.**

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, on revient plus en détail sur les techniques nécessaires pour comprendre les groupes de cohomologie non ramifiée en degré 2 et 3 pour les applications discutées ci-dessus.

Chapitre 2

Contributions

2.1 Groupe de Chow des zéro-cycles et H2 non ramifié

Cete partie est consacrée à la méthode de spécialisation, que nous avons introduite dans la section 1.2.3, dans le cadre des problèmes de rationalité. On commence par décrire le développement de la méthode et ensuite on donne des applications pour construire des exemples de variétés qui ne sont pas stablement rationnelles d'après la série de travaux [CTP16], [CTP16a], [HPT16] et [HPT16a].

2.1.1 Développement de la méthode de spécialisation de Voisin ([CTP16])

Dans cette section on décrit les développements de la méthode de Voisin [Voi15]. Plus précisément, on considère les propriétés de spécialisation des variétés universellement CH_0-triviales, ce qui rend la méthode plus flexible. On a besoin de la notion relative suivante :

Définition 2.1.1. Un morphisme propre $f : X \to Y$ de variétés sur k est **universellement CH_0-trivial** si pour tout corps F contenant k l'application induite $f_* : CH_0(X_F) \to CH_0(Y_F)$ est un isomorphisme.

Dans les applications on demande que cette propriété soit vérifiée dans le cas où f est une résolution des singularités de Y. En général, on dispose d'un critère pour vérifier qu'un morphisme f est universellement CH_0-trivial : il suffit de vérifier que pour tout point schématique M de Y, de corps résiduel $\kappa(M)$, la fibre $Z_{\kappa(M)}$ est universellement CH_0-triviale [CTP16, Prop. 1.7]. En particulier, si Y a des singularités quadratiques isolées, alors la résolution de singularités $Z \to Y$ obtenue par éclatement des points singuliers, est un morphisme universellement CH_0-trivial.

Le point de vue des zéro-cycles permet d'établir la propriété de spécialisation suivante ([CTP16, Thm. 1.12, Thm. 1.14]), dans le cas local :

Théorème 2.1.2. *Soient A un anneau de valuation discrète, K le corps des fractions de A et k le corps résiduel. Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma propre fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres. Soit X/K la fibre générique de $\mathfrak{X}$ et soit Y/k la fibre spéciale. Supposons qu'on a une résolution des singularités $f : Z \to Y$ de Y telle que f soit un morphisme universellement CH_0-trivial. Supposons qu'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) X est lisse, universellement CH_0-triviale et Z a un zéro-cycle de degré 1 ;

(ii) k est algébriquement clos et la variété $X_{\bar{K}}$, où $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, est universellement CH_0-triviale.

Alors la variété Z est universellement CH_0-triviale.

La preuve de ce théorème utilise l'application de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ de Fulton. En général, les applications de spécialisation pour les groupes de Chow sont assez subtiles à construire, mais dans le théorème ci-dessus Y est un diviseur de Cartier dans $\mathfrak{X}$, ce qui est le cas le plus simple pour définir ces applications.

Pour appliquer le théorème ci-dessus, on procède en général comme suit : supposons que Y/k est une variété singulière, telle que Y admette une résolution $f : Z \to Y$, où f est un morphisme universellement CH_0-trivial. Supposons qu'on a trouvé qu'un invariant birationnel (par exemple, le groupe de Brauer) est non nul pour tout modèle projectif et lisse de Y (en particulier, pour Z). On déduit alors que toute variété X qui se spécialise sur Y (i.e. X et Y sont les fibres d'une famille locale $\mathfrak{X}$ comme ci-dessus) n'est pas stablement rationnelle.

On a aussi l'énoncé général suivant pour la propriété de décomposition de la diagonale ([Voi15, Thm.2.1], voir aussi [CTP16, Thm. 2.3]) :

Théorème 2.1.3. *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle. Soit $f : \mathfrak{X} \to B$ un morphisme projectif et plat. S'il existe un point $b_0 \in B(k)$ tel que $\mathfrak{X}_{b_0}$ n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale, alors pour un point très général $b \in B(k)$ la fibre $\mathfrak{X}_b$ n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale.*

Pour démontrer ce résultat, la stratégie est la suivante : on voit la décomposition (1.2)

$$[\Delta_X] = [X \times x] + [Z]$$

comme une équation qui définit une condition fermée sur les espaces qui paramètrent la donnée de Z et les cycles dans $CH_{dim\, X}(X \times X)$. En particulier, on utilise des résultats profonds d'existence des schémas de Hilbert, ainsi que des schémas de Chow [Kol96]. La condition 'très générale' vient du fait que ces schémas ont un nombre dénombrable de composantes irréductibles. Une difficulté supplémentaire vient du fait qu'on doit utiliser et des schémas de Hilbert, et des schémas de Chow, car l'égalité (1.2) est une égalité entre les cycles algébriques, mais dans l'inclusion $Z \subset D \times X$ il s'agit de sous-schémas de X et de $X \times X$. Le point de vue des zéro-cycles n'utilise que l'existence de l'application de spécialisation pour les groupes de Chow.

Soit $f : \mathfrak{X} \to B$ comme dans le théorème 2.1.3. Supposons qu'une fibre générale de f est lisse. L'application des deux énoncés de spécialisation ci-dessus donne la méthode suivante pour montrer qu'une fibre très générale $\mathfrak{X}_b$ de f n'est pas stablement rationnelle (plus généralement, n'est pas rétracte rationnelle) : il suffit de trouver une fibre $Y = \mathfrak{X}_{b_0}$ de f telle que

(O) obstruction : on a un invariant birationnel de Y qui n'est pas trivial (par exemple, $H^2_{nr}(k(Y)/k, \mathbb{Z}/2) \neq 0$) ;

(R) résolution : il existe une résolution de singularités $f : Z \to Y$ qui est un morphisme universellement CH_0- trivial.

L'énoncé local 2.1.2 permet aussi d'utiliser une spécialisation en caractéristique positive. Cela a été utilisé dans [CTP16] pour construire des exemples sur $\bar{\mathbb{Q}}$. La spécialisation en caractéristique positive est aussi cruciale dans [Tot15] et [CTP16a].

2.1.2 Exemples de variétés qui ne sont pas stablement rationnelles ([CTP16, CTP16a, HPT16a])

Dans cette section on décrit les applications de la méthode de spécialisation de Claire Voisin [Voi15], en suivant les travaux [CTP16, CTP16a] (en commun avec J.-L. Colliot-Thélène) et [HPT16a] (en commun avec B. Hassett et Y. Tschinkel).

Solides quartiques ([CTP16]).

Soit $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ une hypersurface quartique. Nous montrons que pour un choix très général des coefficients, la variété X n'est pas stablement rationnelle.

Dans l'introduction de ce mémoire on a déjà mentionné un exemple d'une variété unirationnelle qui n'est pas stablement rationnelle, donné par Artin-Mumford [AM72] : on peut voir cet exemple comme un solide double

$$V : z_4^2 - \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 - \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 - \gamma(z_0, z_1, z_2) = 0$$

ramifié le long d'une quartique $\alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) = 0$ avec un choix particulier des formes homogènes α, β, γ de degrés $2, 3$ et 4 respectivement.

La variété

$$Y : z_0^2 z_4^2 - \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 - \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 - \gamma(z_0, z_1, z_2) = 0$$

est birationnelle à la variété V d'Artin-Mumford (il suffit de prendre $z_0 = 1$.) Notons qu'ici on peut aussi prendre α, β, γ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Ainsi, d'après Artin-Mumford, pour toute résolution $f : Z \to Y$ on a $Br(Z)[2] \neq 0$. Les singularités de Y sont plus compliquées que les points doubles ordinaires. Dans [CTP16, Appendice A] on construit une résolution f qui est un morphisme universellement CH_0-trivial.

On a ainsi que les conditions (O) et (R) dans la méthode de spécialisation sont satisfaites : le théorème 2.1.2 donne que toute variété lisse qui se spécialise sur Y n'est pas stablement rationnelle ; ensuite une application du théorème 2.1.3 donne qu'un solide quartique très général n'est pas stablement rationnel.

Avec un choix plus précis, on peut aussi donner un exemple sur $\bar{\mathbb{Q}}$. En effet, on a $Br(Z) = H^3_{ét}(Z, \mathbb{Z}_2)[2] \neq 0$. Puisqu'on peut choisir les variétés Y et Z définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on peut construire une famille $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ sur un ouvert de $Spec\, \mathcal{O}_K$ d'un corps de nombres K, telle que la fibre générique de g est $Z \to Y$. Sur un ouvert $S \subset Spec\, \mathcal{O}_K$, les fibres de g sont de même type que la fibre générique $Z \to Y$, i.e. on peut supposer que pour tout $s \in S$ le morphisme $\mathcal{Z}_s \to \mathcal{Y}_s$ est universellement CH_0-trivial, et que $H^3_{ét}(\mathcal{Z}_s, \mathbb{Z}_2)[2] \neq 0$. On en déduit que toute quartique lisse (sur $\bar{\mathbb{Q}}$) qui se spécialise sur une des variétés $\mathcal{Y}_s$ pour $s \in S$ n'est pas stablement rationnelle.

Totaro [Tot15] a produit des exemples sur $\mathbb{Q}$.

Revêtements cycliques ([CTP16a]).

Soit p un nombre premier et soit $f(x_0, \dots, x_n)$ un polynôme homogène de degré mp à coefficients dans un corps algébriquement clos k.

Définition 2.1.4. Un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^n_k$, ramifié le long de

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0$$

est une sous-variété de $\mathbb{P}(m, 1, 1, \dots, 1)$ définie par

$$y^p - f(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Si k est un corps de caractéristique p, ces variétés possèdent des invariants non triviaux ([Kol96, V.5.7, V.5.11]) : si $q : Y \to \mathbb{P}^n_k$ est un revêtement cyclique de degré p de $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$, ramifié le long d'une hypersurface $f = 0$, alors pour un choix général des coefficients de f, il existe une résolution des singularités $\pi : Z \to Y$ de Y obtenue par des éclatements successifs des points singuliers, telle que $\pi^* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$ est un sous-faisceau de $\Lambda^{n-1}\Omega_Z$. En particulier, si $mp - n - 1 \geq 0$, alors $H^0(Z, \Lambda^{n-1}\Omega_Z) \neq 0$. D'après [CTP16a, Thm. 3.7], on peut aussi supposer que π est un morphisme universellement CH_0-trivial.

On obtient encore les conditions (O) et (R), cette fois-ci, pour une spécialisation en caractéristique positive. On déduit qu'un révêtement cyclique lisse, défini sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, qui se spécialise sur Y défini comme ci-dessus, n'est pas stablement rationnel, puis qu'un revêtement cyclique X de $\mathbb{P}^n$ de degré p, ramifié le long d'une hypersurface de degré $mp \geq n + 1$, très général, n'est pas stablement rationnel. Ce résultat a été récemment étendu par Okada [Oka16] dans le cas où le degré n'est pas nécessairement premier.

Revêtements doubles de $\mathbb{P}^4$ ramifiés le long d'une quartique ([HPT16a]).

Dans le travail [HPT16a] on considère d'autres revêtement cycliques : on s'intéresse à des hypersurfaces X_f dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(2, 1, 1, 1, 1, 1)$ à coordonnées homogènes (s, x, y, z, t, u) définies par

$$s^2 + f(x, y, z, t, u) = 0. \tag{2.1}$$

où f est une forme homogène de degré 4. Ces variétés sont unirationnelles, ce sont aussi des variétés de Fano de rang de Picard 1. Nous montrons que pour un choix très général des coefficients de f la variété X_f n'est pas stablement rationnelle. On obtient ainsi les premiers exemples des variétés de Fano de dimension au moins 4, de rang de Picard 1, unirationnelles non (stablement) rationnelles.

Pour appliquer la méthode de spécialisation, on s'intéresse à spécialiser les variétés X_f en des variétés 'types', pour lesquelles on sait calculer les obstructions (O) et pour lesquelles on peut espérer obtenir une résolution, pour avoir la condition (R). Dans la section 2.1.4 on considère les fibrations en quadriques de dimension 4 et on construit de nombreux exemples où la condition (O) est satisfaite. On s'intéresse aux cas où l'on peut voir X_f comme une fibration en quadriques. Cette stratégie est réalisée ici en deux étapes de spécialisation :

1. On observe d'abord que si l'hypersurface f est singulière le long d'une droite ℓ, alors l'éclatement $\tilde{X} \to X$ de la droite ℓ admet une structure de fibration en quadriques, de plus, par cette construction on peut obtenir que la fibre générique est une quadrique générale, dont la forme bilinéaire symétrique correspondante est donnée par :
$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & G_1 \\ 0 & F_2 & F_3 & G_2 \\ 0 & G_1 & G_2 & H \end{pmatrix} \tag{2.2}$$
où c est une constante, F_1, F_2, F_3 sont de degré 2, G_1, G_2 sont de degré 3 et H est de degré 4. Par ailleurs, on voit facilement que le morphisme $\tilde{X} \to X$ est universellement CH_0-trivial.
2. La deuxième étape est de spécialiser les quadriques (2.2) en
$$X' : s^2 + xyt^2 + xzu^2 + yz(x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz))v^2 = 0 \tag{2.3}$$
(ce qui correspond au cas $F_2 = G_1 = G_2 = 0$).
D'après les techniques de la section 2.1.4, on a $H^2_{nr}(\mathbb{C}(X')/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2) \neq 0$. La difficulté technique principale est de montrer ensuite qu'il existe une résolution universellement CH_0-triviale $\tilde{X}' \to X'$, on la construit explicitement dans [HPT16a].

Pour terminer la preuve, on utilise d'abord que X' satisfait les propriétés (O) et (R), ce qui implique que pour un choix très général de formes dans (2.2) on a que $\tilde{X}$ n'est pas universellement CH_0-triviale. La deuxième application de la méthode (théorèmes 2.1.2 et 2.1.3) donne que X_f n'est pas stablement rationnelle pour f une forme très générale.

2.1.3 La rationalité n'est pas constante dans une famille projective lisse ([HPT16])

L'article [HPT16], est consacré à l'étude de propriétés de rationalité en famille (travail en commun avec B. Hassett et Y. Tschinkel). On établit :

Théorème 2.1.5. *Il existe une famille lisse de variétés projectives complexes de dimension* 4

$$\phi : \mathcal{X} \to B$$

sur une base connexe B, telle que pour tout $b \in B$ la fibre $\mathcal{X}_b = \phi^{-1}(b)$ est un fibré en quadriques au-dessus de $\mathbb{P}^2$, et qui vérifie

(i) pour $b \in B$ très général, la fibre $\mathcal{X}_b$ n'est pas stablement rationnelle ;

(ii) l'ensemble des points $b \in B$ tels que $\mathcal{X}_b$ est rationnelle est dense dans B pour la topologie euclidienne.

Plus précisément, on considère les hypersurfaces

$$X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$$

de bidegré $(2, 2)$; on a que X admet une structure de fibration en quadriques via la projection sur le premier facteur. L'espace des paramètres pour les hypersufaces de bidegré $(2, 2)$ dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ est de dimension 59. Soit B l'ouvert qui paramètre les hypersurfaces lisses et soit $\mathcal{X} \to B$ la famille correspondante.

Les fibres non stablement rationnelles

Pour établir la partie (i) on utilise la méthode de spécialisation. Dans la section 2.1.4 on explique une formule pour calculer le groupe $H^2_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ pour $X \to \mathbb{P}^2$ une fibration en quadriques de dimension 2 de discriminant non carré. On dispose alors de nombreux exemples où ce groupe n'est pas trivial, i.e. où la condition d'obstruction (O) est satisfaite. La difficulté est de trouver des exemples où la résolution des singularités n'est pas trop complexe, ainsi que des exemples où X est une hypersurface dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$. Cette dernière condition est importante pour établir (ii).

On considère X définie par une équation :

$$yzs^2 + xzt^2 + xyu^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz))v^2 = 0.$$

On établit (voir section 2.1.4) que $H^2_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2) \neq 0$. La condition sur la résolution est vérifiée explicitement par des calculs assez lourds dans [HPT16].

Ainsi les conditions (O) et (R) sont satisfaites pour la variété X. La méthode de spécialisation donne l'énoncé (i) du théorème 2.1.5.

Les fibres rationnelles

Pour établir (ii), on applique la méthode des variations de structures de Hodge, comme expliqué par Voisin dans ([Voi07, 5.3.4]). On observe d'abord qu'une fibration en quadriques $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ est rationnelle si elle admet une section rationnelle. Ceci permet de conclure déjà qu'on a des fibres rationnelles dans la famille $\phi : \mathcal{X} \to B$.

Pour avoir l'énoncé de densité (ii), on exprime le fait d'avoir une section rationnelle en termes de la théorie de Hodge. Pour $\phi : X \to \mathbb{P}^2$ une fibration en surfaces quadriques, on voit que ceci est équivalent au fait que X a une classe de Hodge entière, de type $(2, 2)$, qui intersecte les fibres de π en degré impair. Cela résulte en particulier du fait que la conjecture de Hodge entière est satisfaite pour X (cf. [CTV12]), mais on peut aussi le voir directement, en utilisant la correspondance d'incidence avec la variété de Fano de X.

Pour étudier les classes entières de Hodge en famille, on utilise un critère infinitésimal ([Voi07, 5.3.4]) :

Théorème 2.1.6. *Soit $Y \to B$ une famille de variétés projectives et lisses sur $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $b_0 \in B$ et $\gamma \in H^{2,2}(Y_{b_0})$ tels que l'application infinitésimale des périodes, évaluée en γ*

$$\bar{\nabla}(\gamma) : T_{B,b_0} \to H^{1,3}(Y_{b_0})$$

est surjective. Alors pour tout $b \in B$ et pour tout voisinage ouvert (pour la topologie euclidienne) $b \in B' \subset B$, l'image de l'application naturelle (composition de l' inclusion avec la trivialisation locale) :

$$T_b : H^{2,2}(Y_{B'}, \mathbb{R}) \to H^4(Y_b, \mathbb{R})$$

contient un ouvert $V_b \subset H^4(Y_b, \mathbb{R})$.

Puisque X est une hypersurface dans un produit d'espaces projectifs, on peut décrire les nombres de Hodge, ainsi que l'application des périodes ci-dessus explicitement, les calculs se font dans l'anneau

$$Jac(F) = \mathbb{C}[x, y, z; s, t, u, v]/I(G),$$

où G est l'équation de X et $I(G)$ est l'idéal des dérivées partielles de G (voir [HPT16, Section 6]). On déduit :

Théorème 2.1.7. *Les lieux de Noether-Lefschetz :*

$$\{b \in B : \mathcal{X}_b \text{ admet une } (2,2)\text{-classe de Hodge entière qui intersecte les fibres de } \mathcal{X}_b \to \mathbb{P}^2 \text{ en degré impair}\}$$

sont denses pour la topologie euclidienne sur B, de codimension au plus 3.

Cela termine la preuve de (ii). Les lieux de Noether-Lefschetz ci-dessus donnent une union dénombrable de sous-variétés fermées de B, correspondant aux fibres rationnelles. Il est possible qu'on ait aussi d'autres fibres rationnelles dans la famille $\phi : \mathcal{X} \to B$, mais d'après (i) une fibre très générale n'est pas stablement rationnelle.

2.1.4 Comment calculer H^2_{nr} ([Pir16b])

Artin et Mumford [AM72] ont construit des exemples de variétés projectives et lisses X admettant une structure de fibration en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ avec $Br(X)[2] \neq 0$. Dans le travail de Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO89] ces exemples ont été expliqués en utilisant la cohomologie non ramifiée ; on peut résumer leurs stratégie comme suit :

1. Soit S une surface rationnelle complexe, projective et lisse, soit K le corps des fonctions de S. Soit X une variété projective munie d'un morphisme $\pi : X \to S$ à fibre générique une quadrique lisse Q/K de dimension 1 ou 2. On veut comprendre le groupe $H^2_{\mathrm{nr}}(K(Q)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ (qui coïncide avec le groupe $Br(X) = Br(X)[2]$, si

X est lisse) : donner une formule exacte ou simplement montrer que ce groupe n'est pas nul. Il est bien connu (cf. par exemple un article d'Arason [Ara75]) que l'application naturelle

$$\tau_i : H^i(K, \mathbb{Z}/2) \to H^i_{\mathrm{nr}}(K(Q)/K, \mathbb{Z}/2)$$

pour une quadrique Q sur un corps K est surjective pour $i = 2$, elle est injective pour $i = 1$ si $dim\, Q > 0$ et elle est aussi injective pour $i = 2$ sauf si Q est proportionnelle à une voisine d'une forme de Pfister (multiple de $< 1, -a, -b, ab >$ ou de $< 1, -a, -b >$), au quel cas le noyau est engendré par la classe de (a, b). On a aussi des résultats pour $i = 3, 4$ (cf. [KRS98]). Dans le cas où Q est la fibre générique de π, on déduit donc que tout élément $\xi \in H^2_{\mathrm{nr}}(K(Q)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ vient d'un élément $\beta \in H^2(K, \mathbb{Z}/2)$.

2. Puisque S est une surface rationnelle complexe, projective et lisse, on peut décrire les éléments de $H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ via les familles de leurs résidus : on a une suite exacte

$$0 \to Br(K)[2] \overset{\oplus\partial^2}{\to} \oplus_{x \in S^{(1)}} H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/2) \overset{\oplus\partial^1}{\to} \oplus_{P \in S^{(2)}} H^0(\kappa(P), \mathbb{Z}/2), \qquad (2.4)$$

où $S^{(r)}$ est l'ensemble des points de codimension r de S et $\kappa(x)$ est le corps résiduel de x ([AM72, Thm.1]) ; les flèches sont induites par les résidus.

On souhaite alors déterminer les conditions combinatoires sur les familles de résidus dans $\oplus_{x \in S^{(1)}} H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/2)$, telles que l'élément $\beta \in H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ correspondant devient non ramifié sur $K(Q)$. Pour montrer que β donne un élément dans $H^2_{\mathrm{nr}}(K(Q)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$, on doit alors montrer que pour toute valuation discrète v de $K(Q)$ le résidu $\partial_v(\beta)$ est nul dans $H^1(\kappa(v), \mathbb{Z}/2)$. C'est la partie la plus technique : on vérifie cette condition explicitement et l'on distingue les cas où la valuation v est au-dessus d'un point fermé ou au-dessus d'un point de codimension 1 de S.

Dans le cas où X est lisse de dimension 3, Colliot-Thélène a donné une formule générale pour le groupe $Br\, X$. La question de déterminer le groupe de Brauer pour un fibré en coniques «standard» a été aussi étudiée par Iskovskikh et Zagorskii.

Théorème 2.1.8. *Soit S une surface rationnelle, projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et soit K le corps des fonctions de S. Soit X un solide projectif et lisse, qui admet un morphisme $\pi : X \to S$ dont la fibre générique est une conique lisse et soit $\alpha \in Br(K)[2]$ la classe qui correspond à l'algèbre de quaternions associée à cette conique. Supposons que α est non nul et que la courbe de ramification C, qui consiste en des points $x \in S$ de codimension 1 tels que $\partial_x(\alpha) \neq 0$, a des singularités quadratiques ordinaires. Soit $C = \cup_1^i C_i \subset S$ la décomposition en composantes irréductibles et soit (γ_i) la famille correspondante des résidus de α dans $\oplus_{i=1}^n H^1(\kappa(C_i), \mathbb{Z}/2)$. On considère le groupe suivant $H \subset (\mathbb{Z}/2)^n$:*

$$H = \{(n_i) \,|\, n_i = n_j \text{ pour } i \neq j, \text{ s'il y a un point } P \in C_i \cap C_j, \partial_P(\gamma_i) = \partial_P(\gamma_j) \neq 0\}.$$

Alors le groupe $Br(X)$ est le quotient de H par l'image de la diagonale $(1, \ldots, 1)\mathbb{Z}/2$.

Dans le cas où X est de dimension 4 et le discriminant de Q n'est pas un carré j'ai obtenu la formule suivante ([Pir16b, Thm 3.17]) :

Théorème 2.1.9. *Soit S une surface rationnelle complexe, projective et lisse et soit K le corps des fonctions de S. Soit Q/K une quadrique de dimension deux définie par une forme quadratique non dégénérée q. Soit $\alpha \in Br(K)$ l'invariant de Clifford $\alpha = c(q)$ de q. Supposons que le diviseur*

$$ram\,\alpha = \{x \in S^{(1)}, \partial_x(\alpha) \neq 0\}$$

est à croisements normaux. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points singuliers de $ram\,\alpha$. Soit $d \in K^*/K^{*2}$ le discriminant de Q. Supposons que d est nontrivial et considérons le diviseur suivant :

$$\begin{aligned} T = \{x \in S^1, \partial_x(\alpha) \neq 0 \textit{ et } d, &\textit{ quitte à le multiplier par un carré,} \\ &\textit{est une unité dans } \mathcal{O}_{S,x}, \textit{ et l'image de } d \textit{ dans } \kappa(x) \textit{ est un carré.}\} \end{aligned}$$

Soit $T = \cup_{i=1}^n T_i$ la décomposition en composantes irréductibles. Pour $i = 1, \dots, n$ soit $c_i := \partial_{T_i}(\alpha)$. Soit

$$H = ker[(\mathbb{Z}/2)^n \xrightarrow{\partial^1} \oplus_{P\in\mathcal{P}} H^0(\kappa(P), \mathbb{Z}/2)],\ (n_i)_{i=1}^n \mapsto (\oplus n_i\, \partial^1_P(c_i)) \tag{2.5}$$

Le morphisme naturel

$$H \to H^2(K(Q), \mathbb{Z}/2),$$

qui associe à une famille $(n_i)_i \in H$ l'image β' dans $H^2(K(Q), \mathbb{Z}/2)$ de l'unique classe $\beta \in H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ avec

$$\partial^2(\beta) = (n_i c_i)_i \in \oplus_{i=1}^n H^1(\kappa(T_i), \mathbb{Z}/2),$$

obtenue de la suite exacte (2.4), induit un isomorphisme

$$\Phi : H \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{nr}}(K(Q)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2).$$

Pour illustrer la méthode de preuve de ce théorème, donnons un exemple. Cet exemple est utilisé dans le travail [HPT16] pour pouvoir appliquer la méthode de spécialisation.

Soit $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ une hypersurface de bidegré $(2, 2)$ donnée par

$$yzs^2 + xzt^2 + xyu^2 + F(x, y, z)v^2 = 0 \tag{2.6}$$

où

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz).$$

Soit $X \to \mathbb{P}^2$ la projection sur le premier facteur, la fibre générique Q est une quadrique, de discriminant non carré. On écrit $K = \mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$. On affirme que l'image β' de

$$\beta = (x, y) \in Br(K)[2],$$

est un élément de $H^2_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C},\mathbb{Z}/2)$.

Notons que le diviseur de ramification $ram(\beta)$ de β dans $\mathbb{P}^2$ est l'union de trois droites ($x=0, y=0$ et $z=0$).

On doit montrer que pour toute valuation discrète ν sur $K(Q)$ on a $\partial_\nu(\beta)=0$. Soit $\mathcal{O}_\nu$ l'anneau de valuation de ν dans $K(Q)$. On a deux cas à considérer :

Le centre C_ν de ν est de codimension 1. On a alors l'inclusion d'anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,C_\nu}\subset\mathcal{O}_\nu$. Les propriétés des applications résidus donnent que cette inclusion induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^2(K(Q),\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\partial_\nu"] & H^1(\kappa(\nu),\mathbb{Z}/2) \\ H^2(K,\mathbb{Z}/2) \arrow[u] \arrow[r, "\partial_{C_\nu}"] & H^1(\kappa(C_\nu),\mathbb{Z}/2) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

On a les possibilités suivantes :

1. C_ν est différente des droites $x=0, y=0$ et $z=0$. Alors $\partial_{C_\nu}(\beta)=0$ et le diagramme ci-dessus implique que $\partial_\nu(\beta')=0$.
2. C_ν est une des droites $x=0, y=0$ et $z=0$. Alors, modulo l'équation de C_ν, l'élément $d:=F(x,y,z)$ est un carré non nul. Par définition, les applications résidus se factorisent par le complété $\widehat{\mathcal{O}_\nu}$ de $\mathcal{O}_\nu$. Or d est un carré dans $\widehat{\mathcal{O}_{S,C_\nu}}$. On déduit alors que $\partial_\nu(\beta')=0$ du fait que la classe $\beta=(x,y)$ est dans le noyau de l'application $H^2(K,\mathbb{Z}/2)\to H^2(K(Q'),\mathbb{Z}/2)$ où Q' est la quadrique donnée par

$$yzs^2+xzt^2+xyu^2+v^2=0$$

([Pir16b, Cor. 3.12]).

Le cas où *le centre de ν est de codimension* 2 utilise plus d'arguments locaux et les propriétés de résidus, voir [HPT16, Prop. 11] pour les détails.

La méthode ci-dessus est assez flexible, on s'intéresse naturellement à d'autres fibrations où l'on peut appliquer un argument similaire pour comprendre les groupes de cohomologie non ramifiée. On revient à ces questions dans le dernier chapitre de ce mémoire.

2.2 Cycles de codimension 2 et H3 non ramifié.

Cette section est consacrée à l'étude des cycles algébriques. On s'intéresse à comprendre les applications *classe de cycle* (1.3), (1.4), (1.5) à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ pour des variétés sur un corps fini (resp. de type fini sur son sous-corps premier).

2.2.1 La conjecture de Tate entière pour les cycles de codimension 2 sur une hypersurface cubique de dimension 4 ([CP15])

Dans un travail en commun avec F. Charles [CP15] on établit un cas où la version faible de la conjecture entière de Tate vaut :

Théorème 2.2.1. *Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier et de caractéristique différente de 2 et 3. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit X une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}^5_{\bar{k}}$. La version faible de la conjecture de Tate entière est vraie pour les cycles de codimension 2 sur X. Autrement dit, pour tout nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k, l'application classe de cycle*

$$CH^2(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_U H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))^U \tag{2.8}$$

est surjective, où G est le groupe de Galois absolu de k et U parcourt le système des sous-groupes ouverts de G.

La conjecture entière de Hodge pour les cycles de codimension 2 sur une cubique lisse de dimension 4, définie sur le corps $\mathbb{C}$ a été établie par C. Voisin [Voi07a]. La version rationnelle de la conjecture de Tate pour les cubiques de dimension 4 sur les corps finis de caractéristique au moins 5 est démontrée dans [Cha13, Corollaire 6] – le cas des corps de type fini sur leur sous-corps premier s'en déduit par des techniques standard – est dans [Per15, Théorème 5.14]. Il s'agit du point de départ de notre résultat.

Sa version rationnelle étant acquise, la preuve du théorème s'inspire de celle de [Voi07a, Voi13] de C. Voisin. On montre d'abord par un argument standard [SGA7, Exposé XVII] qu'il existe un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de $X_{\bar{k}}$. Soit $\iota : Y \to X_{\bar{k}}$ l'éclatement de $X_{\bar{k}}$ le long du lieu de base du pinceau. On a alors un morphisme $\pi : Y \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ dont les fibres sont des hypersurfaces cubiques Y_t de dimension 3. Notre stratégie est la suivante :

— Il s'agit d'abord d'utiliser la méthode de Zucker en associant à une classe Galois-invariante une section de la fibration en jacobiennes intermédiaires associée à un pinceau de Lefschetz de X. En général, les notions de jacobienne intermédiaire et de fonction normale, qui sont des objets de géométrie complexe, n'ont pas d'analogue en caractéristique positive. Dans notre cas, c'est la description due à Clemens et Griffiths [CG72], de la jacobienne intermédiaire d'une cubique de dimension 3 qui permet de donner un sens à la stratégie ci-dessus.

— Ensuite, un résultat de Markushevich et Tikhomirov [MT01] permet de construire une famille de cycles algébriques à partir de toute section comme ci-dessus. Ici on construit des cycles sur $X_{\bar{k}}$. La question de savoir si les applications (1.3) et (1.4) sont surjectives est toujours ouverte.

Cette stratégie est réalisée comme suit.

Fonctions normales.

Soit $\pi : Y \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ une fibration en hypersurfaces cubiques de dimension 3 comme ci-dessus. Soit $U \subset \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ l'ouvert de lissité de π et soit Y_U l'image réciproque de U dans Y. Soit α un élément du groupe $H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$. On montre que, quitte à modifier α par une classe algébrique, on peut supposer que α est de restriction nulle aux fibres au-dessus de U. Via la suite spectrale de Leray pour le morphisme π

$$E_2^{pq} = H^p(U, R^q\pi_*\mathbb{Z}_\ell(2)) \Rightarrow H^{p+q}(Y_U, \mathbb{Z}_\ell(2)),$$

la classe α induit un élément du groupe $H^1(U, R^3\pi_*\mathbb{Z}/2_\ell(2))$, qui ne dépend que de l'image de α dans $H^4(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ puisque le groupe $H^3(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul ici.

Rappelons que le schéma paramétrant les droites contenues dans une hypersurface cubique lisse de dimension 3 est une surface lisse – c'est la *surface de Fano* de la cubique. Soit $\psi : F \to U$ la surface de Fano relative de π. Le morphisme ψ est projectif et lisse, de dimension relative 2. Ses fibres sont les surfaces de Fano des fibres de π. Soit V la variété d'incidence associée au-dessus de U, et p, q les deux morphismes canoniques de V dans F et Y_U respectivement. La dimension relative de V est 3. Cette situation correspond au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ F \arrow[dr, "\psi"'] & & Y_U \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

La notion de fonction normale vient de l'étude de cette correspondance d'incidence. Soit $J \to U$ le schéma $\mathbf{Pic}^\tau(F/U)$. La suite de Kummer induit une application

$$H^0(U, J) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(U, R^1\psi_*\mathbb{Z}_\ell(1)). \tag{2.10}$$

Par ailleurs, on vérifie que le morphisme

$$p_*q^* : R^3\pi_*\mathbb{Z}/2_\ell(2) \to R^1\psi_*\mathbb{Z}/2_\ell(1)$$

est un isomorphisme de faisceaux étales sur U. On dit alors qu'un élément ν de $H^0(U, J) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est une *fonction normale* associée à α si $[\nu]$ est l'image de α dans $H^1(U, R^3\pi_*\mathbb{Z}/2_\ell(2))$ par l'application composée de (2.10) et $(p_*q^*)^{-1}$. On déduit de la correspondance d'incidence que si α est une classe algébrique, alors il existe une fonction normale associée à α. Par ailleurs, l'analyse de la suite de Kummer et le fait que les modules de Tate sont sans torsion impliquent que s'il existe une fonction normale pour un multiple de α, alors il en est de même pour α. Or la conjecture de Tate à coefficients rationnels est satisfaite pour X, on déduit qu'un élément α de $H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$, de restriction nulle aux fibres au-dessus de U, admet une fonction normale ν_α dans $H^0(U, J) \otimes \mathbb{Z}_\ell$.

Espaces de modules.
Après la première étape on souhaite naturellement construire une classe dans $CH^2(X_{\bar{k}})$ à partir d'une section dans $H^0(U, J)$. Malheureusement, un argument de correspondance d'incidence ne s'applique pas dans ce cas et on a besoin d'un élément supplémentaire.

Soit $\mathcal{M} \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sans torsion dans les fibres de $Y \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ vérifiant $c_1 = 0, c_2 = 2[l]$ dans la cohomologie des fibres géométriques de $Y \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$, c'est un schéma projectif au-dessus de $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$. L'application $p_*q^*(c_2 - 2l)$ induit l'application d'Abel-Jacobi au-dessus de U

$$\Phi : \mathcal{M}_U \to J.$$

En utilisant un résultat de Markushevich et Tikhomirov [MT01], on montre que J est birationnelle à une composante de $\mathcal{M}$ (au-dessus du point générique de U), en particulier, un élément de $H^0(U, J)$ se relève en une section de $\mathcal{M}_U$. Là encore, cela n'est pas suffisant pour trouver de vrais fibrés : l'espace de modules $\mathcal{M}_U$ est un espace de modules grossier. On utilise alors sa structure (c'est un quotient d'un schéma *Quot*) et le fait que $\bar{k}(U)$ est de dimension cohomologique 1, pour trouver des fibrés sur $X_{\bar{k}}$ qui correspondent à une section de $\mathcal{M}_U$. On termine la preuve en utilisant l'application d'Abel-Jacobi pour construire un élément dans $CH^2(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ dont la classe est α.

Le fait que $\bar{k}(U)$ est de dimension cohomologique 1 est crucial ici : cet argument ne fonctionne pas sur le corps $k(U)$. C'est essentiellement la seule partie dans la preuve qui ne s'étend pas sur k et qui ne nous permet pas de comprendre les applications classe de cycle (1.3) et (1.4) sur X.

2.2.2 Contre-exemples à la conjecture de Tate entière pour les cycles de codimension 2 ([PY15])

Le travail [PY15]) en commun avec N. Yagita est consacré à des contre-exemples à la version faible de la conjecture de Tate entière :

Théorème 2.2.2. *Soit ℓ un nombre premier de la liste suivante : $\ell = 2, 3$ ou 5. Il existe une variété projective et lisse X sur un corps fini k, $car k \neq \ell$, telle que l'application classe de cycle*

$$CH^2(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_H H^4_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))^U / torsion,$$

où l'union est sur tous les sous-groupes ouverts U de $Gal(\bar{k}/k)$, n'est pas surjective.

Ce résultat permet d'obtenir une liste complète de structures possibles pour les classes non algébriques pour l'application

$$CH^2(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_H H^4_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))^U,$$

analogue à celle pour la conjecture entière de Hodge pour les variétés complexes :

1. dans les exemples d'Atiyah-Hirzebruch [AH62] et Totaro [Tot97] on a une classe de torsion dans $Hdg^4(X)$, qui n'est pas algébrique ; ces exemples s'étendent sur un corps fini ;
2. dans les exemples de Kollár [Kol90], on a une classe dans $H^4(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ qui n'est pas algébrique (mais dont un multiple est algébrique) ; ces exemples ne s'étendent pas sur un corps fini.

Comme dans les exemples d'Atiyah-Hirzebruch [AH62] et Totaro [Tot97], nos contre-exemples viennent de l'étude des espaces classifiants des groupes algébriques. Ici on considère des groupes connexes de type exceptionnel, les exemples précédents utilisent des groupes finis.

Dans le théorème 2.2.2 ci-dessus, on peut distinguer deux étapes :

— pour montrer qu'une classe est non algébrique, on utilise les opérations motiviques ;

— une difficulté supplémentaire vient du fait que les «approximations algébriques» des espaces classifiants sont des variétés quasi-projectives, on construit des exemples projectifs en utilisant les sections linéaires de dimension suffisamment grande. Cette méthode remonte a J.-P. Serre, voir [Ser58, Section 20].

Opérations motiviques et espaces classifiants.
Pour k un corps parfait avec $car(k) \neq \ell$ on dispose de la catégorie motivique homotopique des espaces pointés $\mathcal{H}.(k)$ ([MV99]). Pour $X \in \mathcal{H}.(k)$, on définit les groupes de cohomologie motivique $H^{*,*'}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ avec les coefficients $\mathbb{Z}/\ell$ (*loc.cit.*), resp. les groupes $H^{*,*'}_{ét}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ pour la topologie étale. Si X est une variété lisse sur k (ce qui fait partie des objets dans $\mathcal{H}.(k)$), on a un isomorphisme $CH^*(X)/\ell \xrightarrow{\sim} H^{2*,*}(X, \mathbb{Z}/\ell)$.

Voevodsky ([Voe03]) a défini les opérations P^i et Q_i sur $H^{*,*'}(X, \mathbb{Z}/\ell)$:

$$P^i : H^{*,*'}(X, \mathbb{Z}/\ell) \to H^{*+2i(\ell-1),*'+i(\ell-1)}(X, \mathbb{Z}/\ell), i \geq 0$$

$$Q_i : H^{*,*'}(X, \mathbb{Z}/\ell) \to H^{*+2\ell^i-1,*'+(\ell^i-1)}(X, \mathbb{Z}/\ell), i \geq 0,$$

où $Q_0 = \beta$ (Bockstein) est de degré $(1, 0)$, il est induit de la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Z}/\ell^2 \to \mathbb{Z}/\ell \to 0$$

de faisceaux pour la topologie de Nisnevich (resp. étale). L'opération

$$Q_i : CH^m(X)/\ell = H^{2m,m}(X, \mathbb{Z}/\ell) \to H^{2m+2\ell^i-1,m+(\ell^i-1)}(X, \mathbb{Z}/\ell)$$

est toujours nulle. Par ailleurs, cette opération ne s'annule pas nécessairement sur le groupe $H^{2m,m}_{ét}(X, \mathbb{Z}/\ell) = H^{2m}_{ét}(X, \mu_\ell^{\otimes m})$. Notre stratégie pour produire des classes non algébriques, similaire à celle d'Atiyah-Hirzebruch [AH62], c'est de montrer que Q_1 ne s'annule pas sur ces classes.

Soient maintenant (G, ℓ) un groupe de Lie simplement connexe et un nombre premier de la liste suivante :

$$(G, \ell) = \begin{cases} G_2, \ell = 2, \\ F_4, \ell = 3, \\ E_8, \ell = 5. \end{cases} \tag{2.11}$$

On voit alors que $H^4(BG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (cf. [MT91]) et on écrit ξ pour le générateur de $H^4(BG, \mathbb{Z})$.

Pour k un corps avec $car(k) \neq \ell$, soit G_k le groupe réductif (déployé) sur k, correspondant au groupe de Lie G.

L'anneau de Chow $CH^*(BG_k)$ a été défini par Totaro [Tot99]. Soit $V \subset V'$ un ouvert non vide dans une représentation linéaire V' de G_k, tel que G_k agit librement sur V. Si $\mathrm{codim}_{V'}(V' \setminus V) > i$, on peut identifier $CH^i(BG_k)$ avec le groupe $CH^i(V/G_k)$ cela ne dépend pas du choix de V et V'. De même, on peut définir les groupes de cohomologie étale $H^i_{ét}(BG_k, \mathbb{Z}_\ell(j))$ et de cohomologie motivique $H^{*,*'}(BG_k, \mathbb{Z}/\ell)$ (cf. [KN12]), ces derniers coïncident avec les groupes de cohomologie motivique considérés dans [MV99]. On dispose aussi de l'application classe de cycle

$$cl : CH^*(BG_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_H H^{2*}_{ét}(BG_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(*))^U, \tag{2.12}$$

où l'union est sur les sous-groupes ouverts U de $Gal(\bar{k}/k)$.

Dans le cas $G = (\mathbb{Z}/\ell)^3$ (plus généralement, $(\mathbb{Z}/\ell)^n$), on connaît très bien les groupes de cohomologie motivique (resp. motivique étale) de BG, qu'on «voit» comme un object de la catégorie $\mathcal{H}.(k)$. Plus précisément,

$$H^{*,*'}(BG, \mathbb{Z}/\ell) \cong H^{*,*'}(Spec(k), \mathbb{Z}/\ell)[y_1, y_2, y_3] \otimes \Lambda(x_1, x_2, x_3)$$

où $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ est le $\mathbb{Z}/\ell$-module engendré par 1 et $x_{i_1}...x_{i_s}$ avec $i_1 < ... < i_s$, avec les relations $x_i x_j = -x_j x_i$ $(i \leq j)$, $\beta(x_i) = y_i$ et $x_i^2 = \tau y_i$ pour $\ell = 2$. En particulier, on vérifie que $y = Q_0(x_1 x_2 x_3)$ est une classe en degré 4 telle que $Q_1(y) \neq 0$.

La propriété particulière des groupes G dans la liste (2.11) est que G admet un sous-groupe maximal élémentaire (i.e. un produit de copies d'un groupe cyclique), qui n'est pas inclus dans un tore $T \subset G$, de rang 3 :

$$i : A \simeq (\mathbb{Z}/\ell)^3 \subset G.$$

De plus, on a que le groupe de cohomologie singulière $H^4(BG, \mathbb{Z}/\ell)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell$, ce groupe est engendré par l'image ξ' du générateur ξ de $H^4(BG, \mathbb{Z})$. D'après [KY10], [KTY12], on a $y := Q_1(i^*\xi') \neq 0$, on l'utilise dans la suite pour montrer que la classe ξ' n'est pas algébrique par réduction au cas des groupes finis.

Exemples projectifs.

Pour pouvoir obtenir des exemples sur un corps fini, ainsi que pour construire des exemples projectifs on passe par une construction sur un ouvert de $Spec\,\mathbb{Z}$.

Soit $\mathcal{G}$ un groupe réductif déployé sur $Spec\,\mathbb{Z}$ correspondant au groupe G dans la liste (2.11), un tel groupe existe par [SGA3] XXV 1.3. On procède alors par les étapes suivantes :

1. On construit, par une variante de la construction de Totaro et Colliot-Thélène-Sansuc [CTS07], en l'adaptant sur une base, un schéma projectif $\mathcal{Y}/\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ et un sous-schéma ouvert $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ tels que $\mathcal{W} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ est lisse et le complément de $\mathcal{W}$ est de codimension au moins s dans chaque fibre de $\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, et tel que pour tout point $t \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, $i \leq s$, et $\ell \neq car\,\kappa(t)$, on identifie $H^i_{ét}(B(\mathbb{G}_m \times \mathcal{G})_{\bar{t}}, \mathbb{Z}_\ell)$ avec $H^i_{ét}(\mathcal{W}_{\bar{t}}, \mathbb{Z}_\ell)$. Ici, comme dans la construction sur un corps, $\mathcal{W}$ est obtenu comme un quotient $\mathcal{W} = \mathcal{V}/\mathcal{G}$ pour un ouvert $\mathcal{V}$ dans une representation linéaire de $\mathcal{G}$, où l'action est libre.

2. Ensuite on obtient des exemples projectifs non pas par compactification, mais en prenant des sections linéaires : il existe un ouvert $T \subset \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et un espace linéaire $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^M_T$ tels que $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ est de codimension $1 + dim(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}} - \mathcal{W}_{\mathbb{C}})$, et tel que pour tout $t \in T$ la fibre $\mathcal{X}_t$ de $\mathcal{X} = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ est lisse. Une variante du théorème de la section hyperplane de Lefschetz, pour des variétés quasi-projectives complexes (Thm. II.1.2 dans [GM88]) permet de conclure que les applications naturelles $H^i(\mathcal{W}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \to H^i(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ sont des isomorphismes pour $i < dim\, \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$. Quitte à faire un changement étale sur T, on peut de plus supposer qu'on a une inclusion $i : \mathcal{A} = (\mathbb{Z}/\ell)^3_T \hookrightarrow \mathcal{G}_T$.
   On termine la construction par un argument de spécialisation. Soit $t \in T'$ et soit $k = \kappa(t)$. On analyse le diagramme suivant (il faut faire attention ici, car les flèches ne sont pas toutes dans le «bon» sens) :

$$\begin{tikzcd}
H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[d] & H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{W}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{U}_{\mathbb{C}}/(\mathbb{Z}/\ell)^3, \mathbb{Z}/\ell) \arrow[d] & H^4_{\acute{e}t}(B(\mathbb{Z}/\ell)^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}/\ell) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) & H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{W}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[l] \arrow[r] & H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{U}_{\bar{k}}/(\mathbb{Z}/\ell)^3, \mathbb{Z}/\ell) & H^4_{\acute{e}t}(B(\mathbb{Z}/\ell)^3_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/\ell) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

   Le flèches verticales sont des applications de spécialisation. Dans la ligne supérieure il s'agit de variétés complexes. On a donc une classe $\zeta \in H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ qui provient de la classe ξ, qui engendre $H^4(BG, \mathbb{Z})$, comme dans l'étape précédente. En utilisant [KY10], [KTY12], on montre que l'opération Q_1 ne s'annulle pas sur l'image de ζ par la composée des applications dans la ligne supérieure . En utilisant la compatibilité dans le diagramme ci-dessus, on en déduit que l'image de ζ dans $H^4_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ ne peut pas être algébrique, par ailleurs on voit facilement qu'elle est fixée par un sous-groupe ouvert de $Gal(\bar{k}/k)$. Cela termine la preuve du théorème 2.2.2.

2.2.3 Sur la cohomologie non ramifiée en degré 3 d'un produit ([Pir16])

Soit V une variété projective et lisse, de dimension 3, définie sur un corps fini k, qui admet une fibration $V \to C$ vers une courbe. Colliot-Thélène et Kahn ont établi :

Théorème 2.2.3. (théorème 1.3.1) *Supposons que la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur V et que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(V)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. S'il existe sur la surface V_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de V_η via l'accouplement de Brauer-Manin, alors il existe sur V_η un zéro-cycle de degré premier à l.*

On s'intéresse alors au groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(V)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour de telles variétés. On conjecture [CTK13] que ce groupe est nul dans le cas où V est géométriquement uniréglée. Le cas d'une fibration triviale a été traité dans [Pir16] :

Théorème 2.2.4. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives 1 et 2. Soit $\bar{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et soit $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{F}}$. Soit K le corps des fonctions de C. Faisons les hypothèses :*
(H1) $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$;
(H2) $b_2(\bar{X}) - \rho(\bar{X}) = 0$;
(H3) $NS(\bar{X})$ *est sans torsion ;*
(H4) $A_0(X_{\bar{K}}) = 0$.
Alors

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

pour tout nombre premier $l \neq p$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si $\bar{X}$ est une surface rationnelle. Elles sont aussi satisfaites pour les surfaces $K3$ supersingulières au sens de Shioda (ces surfaces n'existent qu'en caractéristique positive).

Pour établir le théorème 2.2.4, on procède par diverses réductions :

1. Soit K le corps des fonctions de C. On montre d'abord que le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X_K est nul, au moins à la p-torsion près. On en déduit que tout élément ξ du groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \subset H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

   provient de $H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$.
2. On vérifie que pour les cas que l'on considère, les applications résidus sont compatibles à des applications bord dans la suite spectrale de Leray. On se ramène ainsi à considérer le groupe $H^3_{\acute{e}t}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$.
3. On montre que l'image du groupe $H^3_{\acute{e}t}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$ dans $H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Z}/l)$ est nulle.

Donnons quelques détails ici.

Réduction à $H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$
Les hypothèses sur X impliquent que :
— $H^1_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n) = H^3_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n) = 0, Br\, \bar{X}\{l\} = 0, l \neq \mathrm{car}\, \bar{k}.$;
— on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}\, \bar{X}/n \xrightarrow{\simeq} H^2_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n)$.
— Rappelons que pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A. On dispose de l'application naturelle

$$\mathrm{Pic}\, \bar{X} \otimes \bar{k}^* \to H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2).$$

Les hypothèses sur X impliquent que le noyau et le conoyau de cette application sont des groupes uniquement divisibles par tout entier premier à car. $\bar{k}$.

Les propriétés ci-dessus permettent d'étudier le groupe $A_0(X_K)$ de Chow des zero-cycles de degré zéro sur X_K par des méthodes de la K-théorie algébrique.

Soit $G = Gal(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{F}$. Les hypothèses (H1) et (H2) donnent que le groupe $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est de type fini sans torsion. On note S le $\mathbb{F}$-tore dual. On dispose d'une application

$$\Phi : A_0(X_K) \to H^1(K, S_K).$$

Dans la littérature on trouve deux façons de construire cette application : via les torseurs universels (Colliot-Thélène et Sansuc [CTS81]) ou via la K-théorie (Bloch [Blo81]). Les hypothèses sur X impliquent que ces deux constructions coïncient, au moins à la p-torsion près [Pir16, Appendice]. Le premier point de vue et un argument local-global sur K permet de montrer que l'image de Φ est nulle. L'approche de la K-théorie algébrique donne une suite exacte : ([Blo81], [CTR85] 3.6)

$$H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}})/H^0(X_{\bar{K}}, \mathcal{K}_2)) \to A_0(X_K) \to H^1(K, S_{X_K}),$$

où $\mathfrak{G} = Gal(\bar{K}/K)$. Sous l'hypothèse que X_K possède un zéro-cycle de degré 1, hypothèse qui est satisfaite ici, le théorème 90 de Hilbert pour K_2 (Merkurjev et Suslin) implique que le groupe $H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}}))$ est nul ([CT83], corollaire 1 et remarque 5.2 pour le cas de la caractéristique positive). En utilisant [CTR85] 1.8, on en déduit que le groupe $H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}})/H^0(X_{\bar{K}}, \mathcal{K}_2))$ est nul lui aussi. L'application Φ est donc injective, comme son image est nulle, on déduit que $A_0(X_K) = 0$.

Par ailleurs, on a une suite exacte qui vient de la théorie de Bloch et Ogus :

$$H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to CH^2(X_K)/l^r \xrightarrow{c} H^4_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}),$$

la nullité du groupe $A_0(X_K)$ implique alors que tout élément ξ du groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \subset H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

provient de $H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$.

Réduction à $H^3_{\acute{e}t}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$

Pour étudier le groupe $H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ on utilise la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(K, H^q(\bar{X}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})) \to H^{p+q}(X, \mu_{l^r}^{\otimes 2})).$$

L'annulation de $H^1_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n)$ et $H^3_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n)$ et le fait qu'on a un isomorphisme $\operatorname{Pic}\bar{X}/n \xrightarrow{\simeq} H^2_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mu_n)$ impliquent qu'on a une flèche de bord

$$H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^1(K, \operatorname{Pic}\bar{X}/l^r(1))$$

qui est un isomorphisme.

La description des résidus via les catégories dérivées permet de montrer que ces applications sont compatibles à des applications bord dans la suite spectrale de Leray. En utilisant cette compatibilité et le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\acute{e}t}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \arrow[r, "\simeq"] & H^1(K, \operatorname{Pic}\bar{X}/l^r(1)) \\
H^3_{\acute{e}t}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \arrow[u] \arrow[r, two heads] & H^1_{\acute{e}t}(C, \operatorname{Pic}\bar{X}/l^r(1)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

on montre que ξ provient du groupe $H^3_{ét}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. Un argument de corestriction montre qu'il suffit de considérer les coefficients $\mathbb{Z}/l$ et de montrer que l'image de l'application $H^3_{ét}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$ dans $H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Z}/l)$ est nulle. Pour ce faire, on utilise la formule de Künneth pour le groupe $H^3_{ét}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)$ et un argument de cohomologie galoisienne pour $Pic\,\bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*$. Cela permet de conclure que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$, ce qui termine la preuve.

Montrer la nullité du troisième groupe de cohomologie non ramifiée dans le cas d'une fibration «non triviale» $\pi : V \to C$ sur une courbe lisse sur un corps fini, où V est projective et lisse et la fibre générique de π est une surface géométriquement rationnelle, est un problème ouvert en général (cf. [CTK13]).

Chapitre 3

Questions et projets

Les résultats présentés dans ce mémoire reflètent de nombreuses interactions entre les questions de rationalité, la théorie des cycles algébriques et les propriétés de la cohomologie non ramifiée. En particulier, les propriétés universelles du groupe de Chow des zéro-cycles et l'étude des invariants birationnels (par exemple, le groupe H^2_{nr}) sont au coeur de la méthode de spécialisation pour les problèmes de rationalité. La recherche dans ce domaine est actuellement très active, je pense que la méthode de spécialisation aura encore beaucoup d'applications. Dans une autre direction, les propriétés du groupe H^3_{nr} sont liées à une version entière de la conjecture de Tate. Ce chapitre est consacré à quelques questions ouvertes dans ce domaine et des stratégies possibles pour les résoudre, ce qui fait partie de mon projet de recherche dans les futures années.

Fibrations en quadriques

Les résultats de la section 2.1.4 permettent de comprendre le groupe $H^2_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ pour X une fibration en quadriques de dimension 1 ou 2 au-dessus d'une surface rationnelle complexe S, projective et lisse. Par ailleurs, le groupe H^3_{nr} s'annule dans ce cas [CTV12, Corollaire 8.2]. On s'intéresse aux questions suivantes :

1. **Déterminer le groupe H^2_{nr}, ou déterminer si ce groupe est non trivial, dans le cas des fibrations en coniques X au-dessus d'une variété rationnelle complexe T, projective et lisse, de dimension 3.** Comme question suivante, on s'intéresse aux fibrations en quadriques de dimension supérieure, pour ces fibrations on voudrait comprendre la structure de groupes H^i_{nr} pour $i \geq 2$. Il y a ici des diffucultés techniques supplémentaires :
   (a) En général, l'analogue de la suite (2.4) n'est pas exact pour T, i.e. on n'a pas nécessairement qu'un élément du groupe de Brauer du corps des fonctions de T est déterminé par la famille de ses résidus sur T. Cela est le cas si $T = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ou si $H^3_{ét}(T, \mathbb{Z}/2) = 0$, on sera probablement obligé de faire cette hypothèse supplémentaire sur T.
   (b) Si ν est une valuation discrète sur $\mathbb{C}(X)$, on a plus de possibilités pour le centre de ν sur T : un point de codimension 1, de codimension 2 ou un point fermé. Cela rend l'analyse combinatoire plus complexe.

   On dispose déjà au moins d'un cas où l'on sait que le groupe H^2_{nr} n'est pas nul pour une telle variété X : en effet, on peut voir la variété (2.6) utilisée dans le travail [HPT16] comme une fibration en coniques au-dessus de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ (via la deuxième projection). Dans un travail en cours, j'établis une formule pour le groupe H^2_{nr} dans certains cas comme ci-dessus. Comme application, on peut espérer obtenir une meilleure compréhension des propriétés de rationalité des variétés complexes de dimension 4, comme discuté dans la question suivante.

2. **Construire des exemples explicites avec $H^2_{nr} \neq 0$.** L'exemple (2.6) correspond au cas où le discriminant D de la fibre générique est de degré minimal possible, pour avoir $H^2_{nr} \neq 0$. Pour les fibrations en quadriques de dimension 2 au-dessus d'une surface rationnelle, ce degré vaut 8 [Pir16b], on a

$$D = x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz).$$

   Il a deux autres cas possibles pour le discriminant de degré 8, pour avoir $H^2_{nr} \neq 0$: on peut avoir une cubique nodale double tangente à une conique, ainsi que l'union d'une droite et une conique doubles, tangentes à une conique. Pour pouvoir utiliser ces exemples dans la méthode de spécialisation, on doit résoudre deux problèmes :
   (a) comprendre la résolution des singularités ;
   (b) réaliser ces exemples avec $H^2_{nr} \neq 0$ dans des familles de variétés de dimension 4 pour laquelles on souhaite comprendre les propriétés de rationalité.

Les deux problèmes ci-dessus existent aussi dans le cas des fibrations en coniques $X \to T$ comme dans la question précédente. Dans ce cas on a une difficulté supplémentaire : il n'est pas du tout évident de réaliser une fibration en coniques à partir de son discriminant. Ce problème est lié au fait qu'un élément de $Br\, K[2]$ où K est le corps des fonctions de T n'est pas nécéssairement représenté par une algèbre de quaternions.

3. **Étudier les invariants birationnels des formes quadratiques en caractéristique 2.** Les propriétés des fibrations en quadriques de caractéristique 2 semblent peu explorées. Du point de vue de la spécialisation, les exemples en caractéristique 2, où les invariants sont non triviaux, peuvent donner de nouveaux cas où la méthode s'applique (en inégale caractéristique).

Autres questions de rationalité

1. Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ la famille construite dans [HPT16] : la fibre très générale de ϕ n'est pas stablement rationnelle et les fibres rationnelles sont denses pour la topologie de Zariski. Par le même argument que dans [CTP16] on peut produire des fibres non stablement rationnelles, définies sur un corps de nombres. On peut alors se demander **si les fibres rationnelles et les fibres qui ne sont pas rationnelles, définies sur un corps de nombres K, peuvent se distinguer par des propriétés arithmétiques sur K.** En particulier, est-ce que les asymptotiques pour le nombre des points de la hauteur bornée peuvent distinguer la rationalité ?

2. Le problème de rationalité des cubiques de dimension 4, définies sur $\mathbb{C}$ est considéré comme un problème très difficile. On sait qu'il existe une famille dénombrable de diviseurs dans l'espace des paramètres des cubiques lisses dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$, telle que les cubiques correspondantes sont rationnelles. On conjecture que la cubique très générale n'est pas rationnelle. On ne s'attend pas à ce que la méthode de spécialisation dans la version qu'on considère dans ce mémoire puisse s'appliquer directement à ce problème. En effet, on n'a pas de candidat pour la fibre spéciale qui vérifie les conditions (O) et (R) de la section 2.1 dans ce cas. Par ailleurs, on s'intéresse à des questions de rationalité pour d'autres variétés complexes de dimension 4 :

   (a) Soit $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ une fibration en surfaces de Del Pezzo. **Peut-on trouver des exemples où $H^2_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/\ell) \neq 0$ pour ℓ un premier convenable ou peut-on trouver d'autres invariants birationnels qui ne sont pas triviaux ?** On s'intéresse aux surfaces de del Pezzo de degré 6 et $\ell = 2$ ou 3. Dans le cas des fibrations en quadriques, pour obtenir une formule pour le groupe H^2_{nr} on analyse les fibres singulières de ces fibrations, en termes de la cohomologie galoisienne. Dans le cas où $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une fibration en surfaces de Del Pezzo, on s'attend aussi à ce que les propriétés des fibres singulières doivent déterminer les invariants birationnels de X. Il s'agit donc de comprendre les dégénérescences des surfaces de del Pezzo : ce cas semble plus difficile que le cas des quadriques. Pour les premiers exemples on doit comprendre les cas les plus simples qui donnent des invariants non triviaux.

(b) On s'intéresse aussi à savoir si l'on peut trouver d'autres familles $\mathcal{X} \to B$ comme dans [HPT16]. En particulier, **est-ce que le fait qu'une telle famille admet une densité des fibres rationnelles, mais que la fibre très générale n'est pas (stablement) rationnelle est un phénomène qui se produit «en général» pour des variétés de dimension** 4 **ou est-ce que cela n'arrive qu'à des familles particulières ?**

Singularités

Dans les application de la méthode de spécialisation, pour vérifier que la condition (R) est satisfaite (cf. section 2.1), on construit explicitement une résolution des singularités. Cette partie est souvent assez lourde et elle limite les applications de la méthode. On souhaite alors rendre cette partie plus souple :

1. **Peut-on classifier les singularités autorisées ?** Soit Y une variété projective intègre sur un corps k. S'il existe une résolution des singularités $f : Z \to Y$ telle que f est un morphisme universellement CH_0-trivial, on va dire que **les singularités de Y sont CH_0-triviales**. *Cela ne dépend pas du modèle lisse Z.* On sait que les singularités quadratiques sont CH_0-triviales. Par ailleurs, on dispose d'une condition suffisante pour avoir une telle résolution [CTP16] : si pour tout point (schématique) y de Y on a que la fibre Z_y est une variété universellement CH_0-triviale, alors f est un morphisme universellement CH_0-trivial. On peut alors montrer que cette condition suffisante est locale sur Y et elle ne dépend que du complété $\widehat{O_{Y,y}}$. **Peut-on donner une liste des formes locales formelles des singularités ainsi obtenus ?**

2. **Méthodes algorithmiques**. Pour construire des exemples de résolutions explicites on a déjà utilisé le programme Magma, mais on est encore loin d'utiliser au maximum les méthodes informatiques algorithmiques, ce qui peut beaucoup simplifier la partie technique pour vérifier la condition (R).

3. Je m'intéresse aussi à **comprendre les cas où au contraire les singularités ne sont pas CH_0-triviales.** Que peut-on obtenir pour des familles qui contient de telles fibres singulières ? Une motivation possible est le problème suivant, qui est toujours ouvert : peut-on spécialiser une variété rationnelle complexe, projective et lisse, en une variété projective et lisse, qui n'est pas rationnelle ? Tout comme pour le problème de déformation [HPT16], c'est possible si l'on autorise des singularités (une surface cubique, qui est rationnelle, se spécialise sur un cône sur une courbe elliptique), mais le cas des variétés lisses est ouvert.

H^3_{nr}, cohomologie stable et variétés sur un corps fini

1. Les propriétés du troisième groupe de cohomologie non-ramifiée H^3_{nr} pour des variétés sur un corps fini sont liées à la version entière de la conjecture de Tate, ainsi qu'aux principes locaux-globaux pour les zéro-cycles (voir l'Introduction). De manière générale, ce groupe est difficile à calculer. En particulier, on ne connaît pas de réponse à la question suivante ([CTK13, Question 5.4]) :

   Soit X une variété projective et lisse, de dimension 3, définie sur un corps fini $\mathbb{F}$, peut-on avoir que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)(2)$, $\ell \neq car.(F)$ n'est pas nul ?

   Depuis longtemps on a un candidat pour la réponse affirmative, où X est un produit de trois courbes elliptiques $X = E_1 \times E_2 \times E_3$. On a alors une application naturelle

   $$H^1_{\acute{e}t}(E_1, \mathbb{Z}/\ell) \otimes H^1_{\acute{e}t}(E_2, \mathbb{Z}/\ell) \otimes H^1_{\acute{e}t}(E_3, \mathbb{Z}/\ell) \to H^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/\ell).$$

   C'est-à-dire, si $f_i \in H^1_{\acute{e}t}(E_i, \mathbb{Z}/\ell), i = 1, 2, 3$ sont des éléments non nuls, le cup-produit $f_1 \cup f_2 \cup f_3$ induit un élément de $H^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ qui est triviallement non ramifié. La difficulté principale ici est que l'on n'a pas pour l'instant de méthodes pour comprendre le noyau de l'application $H^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/\ell) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/\ell)$. On peut envisager deux approches :

   (a) Utiliser les isogénies entre les coubes elliptiques E_i sur un corps fini (suggéré par D. Saltman) ;

   (b) Utiliser un autre canditat : un produit d'une surface et d'une courbe, et les techniques dans [Pir16].

2. De façon générale, je m'intéresserai à comprendre les groupes de cohomologie stable : c'est l'image du groupe $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell)$ dans $H^i_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Z}/\ell)$, pour des variétés sur un corps k quelconque. Dans un travail en cours avec F. Bogomolov on explore cette question de point de vue de la géométrie anabélienne. Dans cette approche on traduit les problèmes sur les corps des fonctions $k(X)$ des variétés algébriques en termes de cohomologie de ℓ-groupes : on considère le groupe de Galois absolu du corps $k(X)$ et son complété profini. Par exemple, on s'intéresse à des extensions

   $$0 \to C \to G \to A \to 0$$

   une suite exacte de ℓ-groupes finis où A est abélien et C est le centre de G. Pour une extension ci-dessus, on s'intéresse à comprendre le noyau de l'application naturelle :

   $$\phi^i : H^i_s(A, \mathbb{Z}/\ell) \to H^i_s(G, \mathbb{Z}/\ell),$$

   où H^i_s est le groupe de cohomologie stable [Bog93] (pour les groupes A et G respectivement) et on s'attend à ce que le noyau $ker\phi^i$ soit engendré par $ker\phi^2$.

3. Pour la suite de l'étude de la version entière de la conjecture de Tate **je m'intéresse à élaborer des méthodes pour comprendre de nouveaux cas, en particulier, le cas d'une fibration $X \to C$ en solides cubiques sur une courbe sur un corps fini.** Dans le travail en commun avec F. Charles [CP15], on considère une telle fibration associée à un pinceau de Lefschetz sur une cubique de dimension 4. Le cas des fibrations quelconques est plus délicat. Dans le cas analogue sur le corps des complexes, la conjecture entière de Hodge est connue pour les cycles de codimension deux.

   Les questions présentées dans ce chapitre font partie d'un vaste domaine, vers lequel je souhaiterais orienter ma recherche dans les futures années. Pour certains problèmes (par exemple, l'étude des fibrations en quadriques) on dispose déjà de méthodes, qui doivent permettre de les résoudre rapidement, d'autres problèmes seront une motivation pour développer de nouvelles techniques pour l'étude de problèmes de rationalité, dans la construction des invariants birationnels et l'étude des cycles algébriques.

Bibliographie

[And96] Y. André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 205–248.

[Ant15] B. Antieau, *On the integral Tate conjecture for finite fields and representation theory*, à paraître dans Algebraic Geometry.

[Ara75] J. Kr. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), p.448–491.

[AM72] M. Artin, D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.

[AH62] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology **1** (1962), 25 – 45.

[Aso13] A. Asok, *Rationality problems and conjectures of Milnor and Bloch-Kato*, Compos. Math. **149** (2013) no. 8, pp. 1312–1326.

[ACTP16] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala, *Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane*, "Brauer Groups and Obstruction Problems : Moduli Spaces and Arithmetic", Progress in Mathematics, vol. 320, Birkhäuser Basel, 2017, pp. 29–56.

[Bea14] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, Bull. London Math. Soc. **48**, no. 2 (2016), 321–324.

[Bea15] A. Beauville, *The Lüroth problem*, arXiv :1507.02476.

[BCTSSD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles.* Ann. of Math, **121** (1985) 283–318.

[Blo81] S. Bloch, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 41–59.

[BO74] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–201 (1975).

[BS83] S. Bloch, V. Srinivas, *Remarks on correspondences and algebraic cycles.* Am. J. Math. **105** (1983), 1235–1253.

[BvB16] Christian Böhning, Hans-Christian Graf von Bothmer, *On stable rationality of some conic bundles and moduli spaces of Prym curves*, arXiv :1605.03029.

[Bog93] F. Bogomolov, *Stable cohomology of groups and algebraic varieties*, Math. Sb. **183** (1992), English transl. in Sb. Math. **76** (1993), 1–21.

[BPS15] F. Bogomolov, A. Pirutka et A. Silberstein, *Families of disjoint divisors on varieties*, (2015), European Journal of Mathematics, disponible en ligne.

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.s

[Cha13] F. Charles, *The Tate conjecture for K3 surfaces over finite fields,* Invent. Math., **194** n.1 (2013), 119–145.

[CP15] F. Charles et A. Pirutka, *La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre sur un corps fini*, Compositio Mathematica **151**, no. 2, (2015), 253–264.

[CG72] H. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math **95** (1972) 281–356.

[CT83] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem* 90 *for* K_2*, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983), no. 1, 1–20.

[CT92] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[CTC79] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrés en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), no. 3, 301–332.

[CTS81] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 2, 421–447.

[CTR85] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2*-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

[CTO89] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.

[CTS07] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Algebraic groups and homogeneous spaces, 113–186, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., **19**, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.

[CTS10] J. L. Colliot-Thélène et T. Szamuely, *Autour de la conjecture de Tate à coefficients* $\mathbb{Z}/2_\ell$ *sur les corps finis*, The Geometry of Algebraic Cycles (ed. Akhtar, Brosnan, Joshua), AMS/Clay Institute Proceedings (2010), 83–98.

[CTV12] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, Duke Mathematical Journal **161** (2012) 735-801.

[CTK13] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, *Cycles de codimension* 2 *et* H^3 *non ramifié pour les variétés sur les corps finis*, J. K-Theory **11** (2013) 1–53.

[CTP16] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (2) **49** (2016) 371–397.

[CTP16a] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Revêtements cycliques qui ne sont pas stablement rationnels*, Izvestiya RAN, Ser. Mat. **80**, 4 (2016), 35-47.

[Ful98] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GM88] M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **14**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[HKT15] B. Hassett, A. Kresch, Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, Math. Annalen, **365**(3), (2016), 1201–1217.

[HT16] B. Hassett, Y. Tschinkel, *On stable rationality of Fano threefolds and del Pezzo fibrations*, arXiv :1601.07074.

[HPT16] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *Stable rationality of quadric surface bundles over surfaces*, arXiv :1603.09262.

[HPT16a] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *A very general quartic double fourfold is not stably rational,* arXiv :1605.03220.

[IM71] V. A. Iskovskikh et Yu. I. Manin, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, (in Russian) Mat. Sb. (N.S.) **86** (128) (1971), 140–166.

[Kah11] B. Kahn, *Classes de cycles motiviques étales*, Algebra and Number theory **6-7** (2012), 1369–1407.

[KRS98] B. Kahn, M. Rost, R. Sujatha, *Unramified cohomology of quadrics, I*, Amer. J. Math. **120** (1998), 841–891.

[KN12] B. Kahn et T.-K.-Ngan Nguyen, *Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant*, arXiv :1211.0304, à paraître dans Algebraic Geometry.

[KY10] M. Kameko and N. Yagita, *Chern subrings*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 1, 367–373.

[KTY12] M. Kameko, M. Tezuka and N. Yagita, *Coniveau spectral sequences of classifying spaces for exceptional and Spin groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **98** (2012), 251–278.

[Kol90] J. Kollár, *In Trento examples*, in *Classification of irregular varieties*, edited by E. Ballico, F. Catanese, C. Ciliberto, Lecture Notes in Math. **1515**, Springer (1990)

[Kol95] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces*, Jour. AMS **8** (1995), 241–249.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Kol02] J. Kollár, *Unirationality of cubic hypersurfaces*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 467–476.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.

[MT01] D. Markushevich, A. Tikhomirov, *The Abel-Jacobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 1, 37–62.

[Mau14] D. Maulik, *Supersingular K3 surfaces for large primes*, with an appendix by Andrew Snowden, Duke Math. J. **163** (2014), no. 13, 2357–2425.

[MT91] M. Mimura and H. Toda, *Topology of Lie groups*, I and II, Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc, **91** (1991).

[MV99] F.Morel and V.Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ.Math. IHES, **90** (1999), 45–143.

[Oka16] T. Okada, *Stable rationality of cyclic covers of projective spaces,* arXiv :1604.08417.

[PS10] R. Parimala et V. Suresh, *Degree three cohomology of function fields of surfaces*, Int. Math. Res. Notices.

[Per15] K. Madapusi Pera, *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, Invent. Math. **201** n. 2 (2015), 625–668.

[Pey93] E. Peyre, *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (2), 247–268, 1993.

[Pir11] A. Pirutka, *Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis*, Algebra and Number Theory **5-6** (2011), 803–817.

[Pir16] A. Pirutka, *Sur la cohomologie non ramifiée en degré trois d'un produit*, Bulletin de la SMF **144**, 1 (2016), 53–75

[Pir16a] A. Pirutka, *On a local-global principle for H3 of function fields of surfaces over a finite field*, "Brauer Groups and Obstruction Problems : Moduli Spaces and Arithmetic", Progress in Mathematics, vol. 320, Birkhäuser Basel, 2017.

[Pir16b] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, arXiv :1603.09261.

[PY15] A. Pirutka et N. Yagita, *Note on the counterexamples for the integral Tate conjecture over finite fields*, Documenta Math. Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday, (2015), 501-511.

[Sch98] C. Schoen, *An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields*, Math. Ann. **311** (1998), 493 – 500.

[Ser58] J.-P. Serre, *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p*, Symp. Top. Mexico, 1958, p. 24–53.

[Tat65] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical algebraic geometry (Proc. Conf. Purdue Univ. 1963), 93 – 110, Harper and Row, New York (1965).

[Tot97] B. Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 467–493.

[Tot99] B. Totaro, *The Chow ring of a classifying space*, in "Algebraic K-theory", ed. W. Raskind and C. Weibel, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **67**, American Mathematical Society (1999), 249–281.

[Tot15] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), 883–891.

[Voe03] V.Voevodsky, *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math. IHES **98** (2003),1–57.

[Voi07] C. Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. II,* volume 77 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, english edition, 2007.

[Voi07a] C. Voisin, *Some aspects of the Hodge conjecture*, Jpn. J. Math. **2** (2007), no. 2, 261–296.

[Voi13] C. Voisin, *Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal*, J. Alg. Geom. **22** (2013), 141 – 174.

[Voi15] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycles*, Invent. Math. (1) **201** (2015) 207–237.

[Voi15b] C. Voisin, *Stable birational invariants and the Lüroth problem*, available at `http://webusers.imj-prg.fr/~claire.voisin/Articlesweb/jdgvoisin.pdf`

[Zuc76] S. Zucker, *Generalized intermediate jacobians and the theorem on normal functions*, Invent. Math. **33** (1976), 185 – 222.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie SGA 3, Lecture Notes in Math. **151, 152, 153**, Springer, Berlin-Heildelberg-New York, 1977, réédition Tomes I, III, Publications de la SMF, Documents mathématiques **7, 8** (2011).

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969, (SGA 7 II) Dirigé par P. Deligne et N. Katz, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **340**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.