HABILITATION
A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Sujet : Analyse d'équations aux dérivées partielles d'évolution issues de la physique et de la geometrie différentielle

Soutenue par Pierre GERMAIN le 5 décembre 2008 à l'université Paris 7
devant le jury composé de

Patrick GERARD, rapporteur

Vladimir SVERAK, rapporteur (non présent)

Pascal AUSCHER, examinateur

Jean-Yves CHEMIN, examinateur

Isabelle GALLAGHER, examinateur

Frank MERLE, examinateur

Yves MEYER, examinateur

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

On trouvera dans les pages suivantes la présentation de mes travaux de recherche, effectués de 2003 à 2005 au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'Ecole polytechnique, de 2005 à 2006 au Département de Mathématiques de l'Université de Princeton, et enfin de 2006 à 2008 au Courant Institute of Mathematical Sciences.

Ces travaux portent sur l'analyse d'équations aux dérivées partielles d'évolution, pour beaucoup issues de problèmes physiques (équation de Navier-Stokes, homogène ou non, compressible ou non, équation de Maxwell-Lorentz) ou de la géométrie différentielle (applications d'ondes, applications de Schrödinger). Avant de détailler les différentes équations étudiées, j'aimerais dire un mot de certaines problématiques qu'elles partagent, et qui m'ont particulièrement intéressé.

Tout d'abord, la structure de ces équations résulte en une énergie conservée, ce qui permet, par un argument de compacité, de construire des solutions faibles ; l'exemple emblématique est donné par les solutions de Leray. Ces équations sont aussi caractérisées par une certaine homogénéité ; en raisonnant dans des espaces fonctionnels présentant cette homogénéité, on peut, par un argument de point fixe, construire des solutions fortes. Solutions fortes et solutions faibles correspondent à deux manières différentes d'étudier l'équation, et comprendre les liens entre ces deux approches est fondamental. En essayant de tirer parti conjointement de ces deux types de solutions, on fournit des réponses partielles aux questions suivantes : quand une solution faible est-elle unique ? Quand une solution forte est-elle globale ?

Outre ce dialogue entre solutions fortes et solutions faibles, il existe une dualité entre résolution globale et résolution locale (en temps). On présente des résultats dans ces deux directions : pour la première, l'outil de l'analyse harmonique est prépondérant, alors que la seconde demande souvent une compréhension des propriétés dynamiques de l'équation.

Enfin, les solutions auto-similaires jouent souvent un rôle central dans l'étude d'une EDP. Puisqu'il est équivalent, pour ces solutions, de résoudre localement ou globalement, elles représentent d'une certaine manière le point de rencontre entre aspects locaux et globaux. Plus pragmatiquement, ce type de solutions s'avère important pour la dynamique des EDP : elles peuvent fournir un mécanisme d'explosion en temps fini, ou constituer un attracteur pour le flot de l'équation.

Après cette discussion très générale et sans doute un peu vague, venons-en aux problèmes concrets qui nous ont occupé.

Le chapitre 2 est consacré aux équations des fluides visqueux, et avant tout à l'équation de Navier-Stokes incompressible. Dans quels espaces peut-on résoudre cette équation par point fixe ? Des arguments heuristiques conduisaient à penser qu'un espace proposé par Koch et Tataru était optimal. On prouve rigoureusement que c'est le cas ; on étudie aussi précisément la régularisation de données initiales dans cet espace opérée par le flot de l'équation. Un second axe de recherche est constitué par les solutions faibles de Leray, dont on ignore si elles sont uniques en dimension $d \geq 3$, mais pour lesquelles des résultats d'unicité conditionnelle (unicité fort-faible) peuvent être obtenus. On donne un théorème qui généralise, en suivant une approche classique, tous les résultats d'unicité conditionnelle existant ; puis on propose une nouvelle approche, qui pourrait permettre de montrer l'unicité des solutions de Leray qui sont aussi des solutions de Koch et Tataru. Enfin, on montre des résultats d'unicité fort-faible pour d'autres équations de mécanique des fluides : Navier-Stokes non homogène, et Navier-Stokes compressible isentropique.

Le chapitre 3 examine la question de l'existence globale à données petites pour les équations dispersives non-linéaires. Si la puissance de la non-linéarité est faible, il est bien connu qu'il convient d'examiner les résonances générées par l'équation. En plus des résonances classiques, on met en lumière un nouveau type de résonance, les "résonances en espace". Ceci suggère une nouvelle méthode d'analyse, qui est appliquée au cas d'équations de Schrödinger quadratiques en dimension 3. On montre comment cette méthode est reliée aux opérateurs multi-linéaires de pseudo-produit ; on montre aussi pourquoi cette méthode généralise la méthode des formes normales introduite par Shatah, ainsi que la méthode des champs de vecteurs introduite par Klainerman.

Le chapitre 4 est consacré à des équations dispersives de type géométrique, portant sur des applications entre l'espace euclidien et une variété riemannienne. Tout d'abord, l'équation des applications d'onde ("*wave maps*") : on prouve en dimension 3 une condition nécessaire et suffisante sur la variété cible pour l'existence de solutions auto-similaires, étendant les résultats de Shatah et ses collaborateurs. Cependant, la stabilité de ces solutions auto-similaires n'est pas connue, alors qu'elle est capitale pour la compréhension de la dynamique de ces équations. On présente un cadre qui pourrait permettre de répondre à cette question, en résolvant le problème de Cauchy pour des données auto-similaires. Concernant l'équation des applications de Schrödinger ("*Schrödinger maps*"), on montre, en dimension 2, l'existence de solutions auto-similaires.

Le chapitre 5 porte sur l'équation de Lorentz-Maxwell, qui décrit l'interaction d'une particule chargée avec un champ électromagnétique. On montre que pour des données initiales d'énergie finie, la solution peut s'écrire en temps grand comme la superposition d'un soliton (la particule voyageant à vitesse constante, accompagnée par un champ électromagnétique) et d'une solution libre des équations de Maxwell.

Enfin, le chapitre 6 présente des notions d'analyse harmonique utilisées dans les autres chapitres, ainsi qu'un résultat original sur les multiplicateurs entre espaces de Sobolev.

Notations

L'entier d désigne la dimension de l'espace euclidien courant.

Pour deux quantités réelles a et b, on note $a \lesssim_k b$ si il existe une constante C dépendant uniquement de k telle que $a \leq Cb$.

Si X est un espace de Banach de fonctions sur $\mathbb{R}^d$, et $1 \leq p \leq \infty$, on note $L^p_T X$ pour l'espace de Banach de fonctions de $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^d$ donné par la norme

$$\|f\|_{L^p_T X} \stackrel{def}{=} \| \|f(t)\|_X \|_{L^p([0,T[)} \ .$$

On notera souvent plus simplement $L^p X$ si $T = \infty$, ou si T est clair par le contexte.

Chapitre 2

Mécanique des fluides

2.1 Equation de Navier-Stokes

2.1.1 L'équation et ses propriétés fondamentales

Présentation de (NS)

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$(NS) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

Ce système décrit le mouvement d'un fluide emplissant l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier, dont la vitesse au temps $t \geq 0$ et au point $x \in \mathbb{R}^d$ est $u(t,x) \in \mathbb{R}^d$ (ici, d est un entier supérieur ou égal à 2 ; les cas $d = 2$ ou $d = 3$ ont une signification physique claire, mais rien n'empêche de considérer $d \geq 4$).

Le fluide décrit par (NS) est

- *homogène* de densité normalisée $\rho = 1$,
- *incompressible*, d'où la condition de divergence nulle,
- *visqueux* (newtonien) de viscosité normalisée $\nu = 1$.

Energie et scaling

Un calcul élémentaire montre que, formellement au moins, l'énergie

$$\mathcal{E}(u,t) \stackrel{def}{=} \|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds \tag{2.1.1}$$

est conservée.

Une autre propriété fondamentale de (NS) est l'invariance de l'ensemble des solutions par la transformation suivante, appelée scaling,

$$(\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) \longrightarrow \lambda u_0(\lambda x) \quad \text{et} \quad u(x,t) \longrightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \ . \tag{2.1.2}$$

Comment l'énergie et le scaling interagissent-ils ? Pour mieux le comprendre, considérons une fonction test ψ, et associons-lui la famille $\psi_\lambda = \lambda\psi(\lambda\cdot)$. Il est clair que

$$\mathcal{E}(\psi_\lambda, 0) = \|\psi_\lambda\|_2^2 \sim \lambda^{2-d} \ .$$

Laissons maintenant $\lambda \to \infty$, ce qui correspond à concentrer ψ_λ en créant une singularité en 0. Il apparaît que ceci est indifférent du point de vue de l'énergie si $d = 2$, mais que $\mathcal{E}(\psi_\lambda, 0)$ tend vers 0 si $d = 3$. En d'autres termes, la concentration de u est énergétiquement favorisée si $d \geq 3$.

Ce petit raisonnement heuristique conduit à la terminologie suivante

- Si $d = 2$, l'énergie est invariante par le scaling et (NS) est dit *critique*.
- Si $d \geq 3$, l'énergie favorise la concentration de u et (NS) est dit *surcritique*.

L'examen élémentaire que nous avons fait des liens entre scaling et énergie laisse à penser que si $d \geq 3$, des singularités apparaissent dans des solutions de (NS), même si u_0 est régulière. Est-ce effectivement le cas ? La réponse n'est pas connue.

2.1.2 Solutions faibles

Qu'est-ce qu'une solution faible ?

Le terme "solutions faibles" recouvre des réalités bien différentes suivant le contexte. Pour nous il signifiera : solutions construites en utilisant la conservation de l'énergie (2.1.1) puis un argument de compacité.

Cette méthode de construction conduit à des solutions globales, par contre elle ne dit rien de la régularité, au delà de la finitude de l'énergie, ou de l'unicité éventuelle de ces solutions ; elle a été introduite par Leray.

Les solutions faibles de Leray

THÉORÈME 1 (LERAY [88]) *Si u_0 appartient à L^2, il existe une solution globale u de (NS). Cette solution appartient à l'espace d'énergie*

$$\mathcal{L} = L^\infty L^2 \cap L^2 \dot{H}^1 = \{u \text{ tel que pour presque tout } t,\, \mathcal{E}(t,u) < \infty\} \tag{2.1.3}$$

et pour tout t

$$\mathcal{E}(u,t) \leq \mathcal{E}(u_0) \ . \tag{2.1.4}$$

En dimension 2, il est facile de voir que la solution u construite ci-dessus est unique et régulière (au moins pour $t > 0$), et que l'on peut remplacer dans (2.1.4) $\leq$ par $=$. En dimension $d \geq 3$, on ignore si ces trois propriétés sont vraies en général ou non. Nous présenterons cependant des résultats partiels dans la partie 2.1.6.

2.1.3 Solutions fortes

Qu'est-ce qu'une solution forte ?

Par solutions fortes, nous entendons : solutions construites par un argument de point fixe. Plus précisément, on peut considérer la version intégrale de (NS)

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left(u \cdot \nabla u(s)\right)\, ds$$

puis voir le membre de droite comme une fonction F de u. Résoudre (NS) revient alors à trouver un point fixe de F ; il suffit donc de s'assurer que, dans un domaine judicieusement choisi, F est une contraction.

Le point fixe de F, c'est à dire la solution u, peut alors être construit par le schéma itératif suivant

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ u^{n+1} = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left(u^n \cdot \nabla u^n(s)\right)\, ds \ . \end{cases}$$

En notant que $u^{n+1} - u^n = T^n(u_0)$ est un opérateur n-linéaire, on obtient le développement en série suivant

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T^n(u_0) \ . \tag{2.1.5}$$

Il est clair que cette méthode de construction donne des solutions uniques, mais elles ne sont a priori pas globales. En effet, il arrive souvent qu'on doive, pour montrer que F est contractante, se restreindre à des fonctions définies sur $[0,T]$.

Enfin, si l'on veut appliquer cette méthode pour u_0 appartenant à un espace homogène X, il apparaît que X doit être invariant par le scaling (2.1.2). Ainsi, les espaces au scaling correspondent au cadre naturel et optimal dans lequel considérer des solutions fortes.

Les solutions fortes, de Fujita et Kato à Koch et Tataru

L'approche esquissée ci-dessus a été appliquée pour la première fois à (NS) par Fujita et Kato [46], puis a suscité un grand nombre de travaux, parmi lesquels on peut citer Weissler [126], Kato [70], Cannone, Meyer et Planchon [23], Cannone [22] et Koch et Tataru [80]. Ces auteurs ont construit des solutions pour u_0 respectivement dans un des espaces de la chaîne d'inclusions suivante

$$\dot{H}^{\frac{d}{2}-1} \hookrightarrow L^d \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}} \hookrightarrow \nabla BMO \text{ (avec } d < p < \infty \text{ et } d \leq q \leq \infty) \ . \tag{2.1.6}$$

(on note ∇BMO pour l'espace des dérivées de fonctions de BMO ; voir le Chapitre 6 pour une définition des espaces fonctionnels utilisés). Naturellement, tous les espaces apparaissant ci-dessus sont invariants par le scaling (2.1.2).

Espace optimal pour les solutions fortes : considérations heuristiques

On peut remarquer avec Meyer [95] que tout espace invariant par le scaling (2.1.2) de u_0, et inclus (de manière continue) dans $\mathcal{S}'$, est inclus (de manière continue) dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$.

En fait on peut compléter la chaîne d'inclusions (2.1.6) comme suit :

$$\dot{H}^{\frac{d}{2}-1} \hookrightarrow L^d \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}} \hookrightarrow \nabla BMO \text{ (avec } d < p < \infty \text{ et } d \leq q \leq \infty) \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \, .$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que (NS) est bien posée dans ∇BMO. On est donc conduit à la question : que se passe-t-il pour des espaces compris entre ∇BMO et $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$?

Un argument heuristique, dû à Auscher, Dubois et Tchamitchian [14], suggère que l'espace ∇BMO considéré par Koch et Tataru est en fait optimal. Il s'agit du raisonnement suivant : la manière la plus simple de donner un sens au terme $u \cdot \nabla u$ est de l'écrire $\nabla \cdot (u \otimes u)$, puis de demander que $u \in L^2_{loc}$. L'invariance de (NS) par le scaling (2.1.2) et par translation conduit alors à considérer la norme L^2_{loc} translatée et rescalée suivante

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, R>0} \left[\frac{1}{R^d} \int_0^{R^2} \int_{B(x,R)} |u(x,t)|^2 \, dx \, dt \right]^{1/2} .$$

Ainsi la norme apparaissant ci-dessus est, en un sens, le moins que l'on puisse demander d'un espace au scaling et invariant par translation pour donner un sens à la non-linéarité de (NS). Or c'est un résultat d'analyse harmonique classique (voir Stein [117]) que

$$\|u_0\|_{\nabla BMO} \sim \sup_{x\in\mathbb{R}^d, R>0} \left[\frac{1}{R^d} \int_0^{R^2} \int_{B(x,R)} |e^{t\Delta} u_0|^2 \, dx \, dt \right]^{1/2} .$$

Cet argument suggère que $u_0 \in \nabla BMO$ est la condition minimale pour résoudre itérativement.

Optimalité des solutions de Koch et Tataru

Comment prouver rigoureusement l'optimalité de ∇BMO ? Il s'agit de trouver des espaces de Banach légèrement plus grands que ∇BMO pour lesquels la méthode itérative décrite ci-dessus ne peut être appliquée. Rappelons que

$$\begin{aligned}
&\dot{B}^{-1}_{\infty,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,r} \qquad \text{si } q \leq r \\
&\dot{B}^{-1}_{\infty,2} \hookrightarrow \nabla BMO \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \\
&\nabla BMO \not\hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,q} \quad \text{et} \quad \dot{B}^{-1}_{\infty,q} \not\hookrightarrow \nabla BMO \qquad \text{si } 2 < q < \infty \, .
\end{aligned}$$

Le théorème suivant prouve de manière rigoureuse que ∇BMO est optimal pour la théorie des solutions fortes.

THÉORÈME 2 ([8]) *(Par souci de rigueur, on note dans l'énoncé de ce théorème E_σ pour les fonctions de divergence nulle dans l'espace de Banach E ; mais afin d'alléger les notations on notera simplement E dans la suite.)*

L'opérateur T_2 apparaissant dans (2.1.5) n'est pas borné de $\left(\dot{B}^{-1}_{\infty,q}\right)_\sigma \times \left(\dot{B}^{-1}_{\infty,q}\right)_\sigma$ dans $\mathcal{S}'$ si $q > 2$. Ceci reste vrai même si l'on restreint T_2 à la diagonale $(f,f) \in \left(\dot{B}^{-1}_{\infty,q}\right)_\sigma \times \left(\dot{B}^{-1}_{\infty,q}\right)_\sigma$.

Ce théorème est prouvé en raisonnant dans l'espace de Fourier où l'on peut écrire une formule explicite donnant T_2. On exhibe une suite de fonctions f^N, bornée dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,q}$, mais telle que la transformée de Fourier de $T_2(f^N, f^N)$ diverge dans $\mathcal{S}'$.

Le théorème ci-dessus permet de conclure que l'application qui associe à u_0 une solution de (NS) u n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui témoigne d'une certaine instabilité de (NS).

Un résultat comparable, dû à Montgomery-Smith [96], était connu pour une équation similaire à (NS) ; la preuve utilisée par cet auteur n'est cependant pas adaptable à (NS). Enfin, dans un article très récent, Bourgain et Pavlović [21] prouvent que (NS) est en fait mal posé dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$. Ils utilisent pour ce faire des données initiales semblables aux f^N, montrent que $T_2(f^N, f^N)$ diverge, et de plus contrôlent l'erreur "d'ordre 3 et plus" $u - T^1(f^N) - T^2(f^N, f^N)$.

Régularité des solutions de Koch et Tataru

Ainsi, les solutions de Koch et Tataru fournissent le cadre optimal dans lequel étudier des solutions fortes ; il devient dès lors particulièrement intéressant de comprendre leurs propriétés. En particulier, qu'en est-il de leur régularité ? L'espace utilisé par Koch et Tataru pour construire leurs solutions est donné par la norme

$$\|u\|_{KT} = \sup_{t>0} t^{1/2}\|u(t)\|_\infty + \sup_{x\in\mathbb{R}^d, R>0} \left[\frac{1}{R^d}\int_0^{R^2}\int_{B(x,R)} |u(x,t)|^2\,dx\,dt\right]^{1/2} ,$$

et il apparaît immédiatement que ceci ne donne aucun renseignement sur la régularité, et encore moins le comportement asymptotique des dérivées, de u. Le théorème suivant montre que les solutions de Koch et Tataru, comme on peut s'y attendre, sont régulières pour $t > 0$; il décrit aussi de manière précise le comportement asymptotique des dérivées de u.

THÉORÈME 3 (GERMAIN, PAVLOVIČ, STAFFILANI [4]) *Si u_0 est assez petite dans ∇BMO, il existe une solution de Koch et Tataru globale u, qui a les propriétés suivantes :*

- *Pour tout temps $t > 0$, $u(t, \cdot)$ est analytique.*
- *Pour tout entier $k \geq 0$, $\|t^k \nabla^k u\|_{KT} < \infty$, donc en particulier $|u(t,x)| \lesssim_k \frac{1}{t^{(k+1)/2}}$.*

Ce théorème est optimal à deux titres : d'abord, il concerne les solutions de Koch et Tataru, qui forment le cadre optimal pour étudier les solutions fortes ; de plus, si u_0 ou, de manière équivalente, u, est auto-similaire, on peut remplacer ci-dessus $\lesssim_k$ par $\sim_k$, autrement dit la vitesse de décroissance des dérivées de u est optimale.

La preuve consiste essentiellement en une généralisation de la méthode utilisée par Koch et Tataru, mais de nombreux points techniques sont délicats et doivent être traités avec soin.

Ce théorème vient généraliser des résultats antérieurs sur la régularité des solutions de (NS). L'étude de l'analyticité pour (NS) a été initiée par Kahane [69] et Masuda [91], puis raffinée par Le Jan et Sznitman [85] (donnée initiale mesure), Lemarié-Rieusset [86] (donnée initiale dans L^d) et Chemin [26] (ce dernier résultat correspond à des données initiales dans $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}$, et montre non pas l'analyticité mais la décroissance exponentielle dans l'espace de Fourier des solutions).

La décroissance en temps des dérivées de u a été étudiée par Giga et Sawada [52] (donnée initiale dans L^d) et Sawada [105] (donnée initiale dans $\dot{H}^{d/2-1}$).

2.1.4 Le cas critique ($d = 2$) et les solutions globales d'énergie infinie

En dimension 2, l'énergie (2.1.1) (pour les solutions u), ou la norme L^2 (pour les données u_0), est invariante par le scaling de l'équation. L'espace L^2 correspond aux données initiales d'énergie finie, mais il s'agit aussi d'un des espaces dans la chaîne d'inclusion (2.1.6)

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}} \hookrightarrow \nabla BMO \text{ (avec } 2 < p < \infty \text{ et } 2 \leq q \leq \infty) \ .$$

Pour les espaces plus grands que L^2 dans la chaîne d'inclusions ci-dessus, la théorie des solutions faibles ne peut pas s'appliquer, puisque l'on a affaire à des données d'énergie infinie ; quant à la théorie des solutions fortes, elle ne donne pour des données grandes que des résultats locaux en temps.

On peut cependant, en combinant solutions fortes et solutions faibles, démontrer le théorème suivant.

Théorème 4 ([1]) *(NS) est globalement bien posée pour $u_0 = v_0 + w_0$, avec w_0 petit dans ∇BMO et v_0 dans L^2. Plus précisément, pour de telles données initiales, il existe une solution u, unique et dépendant continûment de w_0 et v_0. De plus, pour t grand,*

$$\|w(t)\|_{\nabla BMO} \lesssim 1 \quad \text{et} \quad \|v(t)\|_{L^2} \lesssim_\delta t^\delta \ .$$

La méthode de preuve est due à Gallagher et Planchon [49], qui l'ont utilisée pour prouver un résultat similaire au théorème ci-dessus, mais avec des données initiales de régularité $\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}$ au lieu de ∇BMO.

Esquissons la preuve : l'idée est de résoudre d'abord

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + w \cdot \nabla w = -\nabla p \\ \operatorname{div} w = 0 \\ w_{|t=0} = w_0 \end{cases}$$

globalement, en utilisant la théorie de Koch et Tataru. Ceci est rendu possible par la petitesse de w_0 dans ∇BMO. On voudrait alors résoudre une équation perturbée pour v

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ , \end{cases}$$

de telle sorte que $v + w$ est la solution de (NS) recherchée, c'est à dire correspond à la donnée initiale $u_0 = v_0 + w_0$. Comme v_0 est grand, on ne peut utiliser de méthode de point fixe pour résoudre globalement. La clé de ce problème est l'utilisation de l'énergie : bien que dans l'équation ci-dessus apparaisse w, qui est d'énergie infinie, une estimation a priori montre que v reste d'énergie finie. En d'autres termes, on peut utiliser la théorie des solutions faibles pour construire v.

2.1.5 Digression : l'équation des ondes défocalisante avec non linéarité puissance

Présentation de l'équation

L'analyse présentée dans le paragraphe précédent repose avant tout sur la propriété suivante : en dimension deux d'espace, l'énergie de (NS) est au scaling de l'équation.

Nous aimerions présenter dans ce paragraphe un autre exemple où scaling et énergie coïncident, et où on peut, de manière similaire, construire une solution globale : l'équation des ondes avec non-linéarité puissance critique.

Afin de mettre ce résultat en contexte, nous allons d'abord rappeler quelques éléments connus sur les solutions globales de l'équation des ondes avec non-linéarité puissance générale. Cette équation s'écrit

$$(ONL_p) \qquad \begin{cases} \Box u = |u|^{p-1} u \\ (u, u_t)_{|t=0} = (u_0, u_1) \ . \end{cases}$$

Le flot de cette équation conserve l'énergie

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \ .$$

Les solutions de cette équation sont invariantes par le scaling

$$(u_0, u_1) \longrightarrow (\lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x), \lambda^{\frac{2}{p-1}+1} u_1(\lambda x)) \qquad u \longrightarrow \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda t) \ .$$

Solutions globales

La question qui nous intéresse est la suivante : pour quelles données l'équation (ONL_p) est-elle globalement bien posée ?

Notons pour commencer que pour des données petites et au scaling de l'équation, c'est à dire

$$(u_0, u_1) \in \dot{H}^{\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}} \times \dot{H}^{\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} - 1} \ ,$$

il est aisé de construire des solutions globales par un argument de point fixe utilisant les estimations de Strichartz.

D'autre part, pour des données d'énergie finie $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, on peut, en utilisant la compacité donnée par la conservation de l'énergie, obtenir des solutions faibles, (Segal [106]). Cependant on ne sait rien a priori de la stabilité ou de l'unicité de ces solutions faibles.

Le cas sous-critique : $p < \frac{d+2}{d-2}$

Dans le cas sous-critique, il devient possible de prouver l'unicité des solutions faibles qui viennent d'être évoquées. On obtient donc que (ONL_p) est bien posée globalement pour des données initiales d'énergie finie quelconques.

Ainsi, l'équation (ONL_p) est globalement bien posée pour des données grandes dans $\dot{H}^1 \times L^2$, ou petites dans $\dot{H}^{\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}} \times \dot{H}^{\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} - 1}$. En interpolant de manière non linéaire entre ces deux espaces de données initiales, on peut obtenir un meilleur résultat.

Afin de simplifier la présentation, nous nous restreignons au cas $d = 3$, $p = 3$. Par la théorie des solutions faibles, l'équation est alors globalement bien posée pour des données dans $\dot{H}^1 \times L^2$, et par la théorie des solutions fortes, c'est aussi le cas pour des données petites dans $\dot{H}^{1/2} \times \dot{H}^{-1/2}$. En utilisant des méthodes d'interpolation non-linéaires, Kenig, Ponce et Vega [75] et Gallagher et Planchon [50] ont prouvé que l'on peut étendre ce résultat à des données arbitraires dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ pour $s > 3/4$. Enfin, Bahouri et Chemin [15] ont récemment atteint le point limite $s = 3/4$.

Le cas critique : $p = \frac{d+2}{d-2}$

Dans le cas critique, l'énergie est au scaling de l'équation. Contrairement au cas de (NS) en dimension 2, il n'est pas trivial de voir que l'équation est globalement bien posée pour des données d'énergie finie $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Ce résultat a d'abord été prouvé par Grillakis [54], puis la preuve a été simplifiée et étendue par Shatah et Struwe [111] [112].

Nous aimerions étendre ce résultat à des données plus générales, mais quel espace de données initiales choisir ? Le choix le plus pertinent est l'espace de Besov (voir chapitre 5 pour une définition) $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$. En effet, cet espace est au scaling de l'équation comme il se doit, il contient des données initiales auto-similaires, qui sont d'un intérêt particulier, et enfin cet espace est basé sur L^2, qui est le seul espace de Lebesgue invariant par le flot de l'équation des ondes linéaire.

On aimerait alors interpoler entre des données grandes d'énergie finie, pour lesquelles le résultat de Grillakis, Shatah et Struwe s'applique, et des données petites dans $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$, pour lesquelles un résultat d'existence globale est dû à Planchon [101].

Nous utilisons deux méthodes différentes d'interpolation non-linéaire, et les résultats obtenus sont complémentaires. La première possibilité consiste à utiliser la même approche que dans la partie 2.1.4. On obtient alors le théorème qui suit.

THÉORÈME 5 ([3]) *Soit $d = 6$, et considérons des données initiales du type*

$$u_0 = v_0 + \frac{c_0}{|x|^2} \quad , \quad u_1 = v_1 + \frac{c_1}{|x|^3} \ ,$$

avec $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ et $c_0, c_1 < \epsilon$, pour une constante $\epsilon > 0$. Alors il existe une solution globale et unique de $(ONL_{\frac{d+2}{d-2}})$.

Bien sûr, $\left(\frac{1}{|x|^2}, \frac{1}{|x|^3}\right) \in \dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty} \setminus \dot{H}^1 \times L^2$, sans quoi le théorème précédent serait sans intérêt. Notons aussi que des données initiales du type $\left(\frac{c_0}{|x|^2}, \frac{c_1}{|x|^3}\right)$ correspondent à des solutions auto-similaires. Ainsi, ce théorème peut aussi être vu comme un résultat de stabilité pour les solutions auto-similaires.

Une autre possibilité est d'utiliser une méthode plus proche du travail de Kenig, Ponce et Vega mentionné plus haut. On peut alors perturber des conditions initiales d'énergie finie quelconque, mais la taille de la perturbation dépend de la taille des conditions initiales.

THÉORÈME 6 ([3]) *Soit $d = 3, 4, 6$ et considérons des données initiales du type $(v_0 + w_0, v_1 + w_1)$, avec*

$$(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2 \quad , \quad (w_0, w_1) \in \dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$$

et, pour une certaine constante κ

$$\|(w_0, w_1)\|_{\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}} \lesssim \exp(-\exp E^\kappa) \ .$$

Alors il existe une solution globale et unique de $(ONL_{\frac{d+2}{d-2}})$.

2.1.6 Le cas surcritique ($d \geq 3$) et l'unicité fort-faible

Pour $d \geq 3$, la théorie des solutions faibles n'est plus "incluse" dans la théorie des solutions fortes, comme c'est le cas en dimension 2. En effet, l'espace des données initiales d'énergie finie, L^2, a une homogénéité différente des espaces - au scaling de l'équation - apparaissant dans (2.1.6).

Qu'est-ce que l'unicité fort-faible ?

Les propriétés des solutions faibles en dimension $d \geq 3$ restent assez mystérieuses, on ne sait rien en particulier de leur unicité dans l'espace d'énergie $\mathcal{L}$ (défini en (2.1.3)) ou de leur régularité.

Par contre, les solutions fortes sont uniques dans les espaces où elles sont construites. A défaut de prouver l'unicité de solutions faibles générales, on est donc tenté de se poser la question

"Si u est une solution forte, et u appartient à $\mathcal{L}$, est-ce que u est unique dans $\mathcal{L}$?"

Si la réponse est affirmative, on parle d'unicité fort-faible. Nous allons présenter l'approche classique de cette question, puis suggérer une nouvelle méthode.

L'unicité fort faible par estimation d'énergie

Supposons donc que u est une solution forte, appartenant à $\mathcal{L}$, et que v est une autre solution appartenant à $\mathcal{L}$, partageant la même condition initiale. On voudrait montrer que $u = v$. Pour ce faire, écrivons l'équation vérifiée par $w = v - u$

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla u - w \cdot \nabla w = -\nabla p \\ \operatorname{div} w = 0 \\ w_{|t=0} = 0 \ , \end{cases}$$

il suffit maintenant de montrer que $w = 0$. On estime l'énergie de w, en prenant le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec w, puis en intégrant en espace, et en temps. Comme w et u sont de divergence nulle,

$$\int \langle \nabla p \, , \, w \rangle \, dx = \int \langle u \cdot \nabla w \, , \, w \rangle \, dx = \int \langle w \cdot \nabla w \, , \, w \rangle \, dx = 0 \ .$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 \, ds = \int_0^t \int \langle w \cdot \nabla u \, , \, w \rangle \, dx \, ds \tag{2.1.7}$$

et tout revient à estimer le membre de droite ci-dessus en fonction de $\|w\|_{\mathcal{L}}$ et de la norme de u dans un certain espace de solutions fortes, Y. En effet, une estimation du type

$$\left| \int_0^t \int \langle w \cdot \nabla u \, , \, w \rangle \, ds \, dx \right| \lesssim \|u\|_Y \|w\|_{\mathcal{L}}^2 \ . \tag{2.1.8}$$

permet, en appliquant un argument de type Gronwall à (2.1.7), de conclure que $w = 0$.

L'approche qui vient d'être esquissée a été appliquée tout d'abord par Prodi [102] et Serrin [107], puis des raffinements successifs, dus en particulier à Gallagher et Planchon [49], Dubois [43] et Lemarié-Rieusset [87] ont permis de prouver (2.1.8) pour des espaces Y de plus en plus grands.

Ainsi, les auteurs qui viennent d'être cités ont pu prouver des résultats d'unicité fort-faible pour u appartenant à un des espaces de la hiérarchie suivante

$$L^q L^p \hookrightarrow L^q L^{p,\infty} \hookrightarrow L^q M^{r,p} \hookrightarrow L^q M(\dot{H}^{d/p}, L^2) \quad \text{avec } \frac{2}{q} + \frac{d}{p} = 1 \;\;,\;\; 2 < r \leq p \;\text{ et }\; d < p < \infty$$

(voir le chapitre 5 pour la définition de ces espaces), ce qui correspond à u_0 appartenant à

$$\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}} \hookrightarrow \dot{B}_{L^{p,\infty},q}^{-1+\frac{d}{p}} \hookrightarrow \dot{B}_{M^{r,p},q}^{-1+\frac{d}{p}} \hookrightarrow \dot{B}_{M(\dot{H}^{d/p},L^2),q}^{-1+\frac{d}{p}} \quad \text{avec } \frac{2}{q} + \frac{d}{p} = 1 \;\;,\;\; 2 < r \leq p \;\text{ et }\; d < p < \infty$$

(se référer là aussi au chapitre 5). Dans le cas limite $p = d$, von Wahl [127], Dubois [43] et Lemarié-Rieusset [87] ont obtenu des résultats d'unicité fort-faible pour u_0 petit dans

$$L^d \hookrightarrow L^{d,\infty} \hookrightarrow M^{r,d} \hookrightarrow M(\dot{H}^1, L^2) \quad \text{avec } \; 2 < r \leq d \;,$$

Jusqu'où peut-on aller ainsi ? Le théorème suivant donne les espaces optimaux pour lesquels une estimation du type (2.1.8) est vraie ; ceci se traduit immédiatement en un résultat d'unicité fort-faible.

Théorème 7 ([2]) *L'inégalité (2.1.8) est vraie à condition que u appartienne à*

$$L^q M(\dot{H}^{d/p}, L^2) \quad \text{avec } \tfrac{2}{q} + \tfrac{d}{p} = 1 \;\text{ et }\; d < p < \infty \tag{2.1.9}$$

ou

$$L^q |D|^{d/p} BMO \quad \text{avec } \tfrac{2}{q} + \tfrac{d}{p} = 1 \;\text{ et }\; -d < p \leq 0 \tag{2.1.10}$$

ou

$$L^1 Lip \;. \tag{2.1.11}$$

De plus, ces conditions sont optimales.

Corollaire 1 ([2]) *Si une solution de Navier-Stokes u appartient à l'un des espaces (2.1.9) (2.1.10) (2.1.11) ainsi qu'à $\mathcal{L}$, elle est unique dans $\mathcal{L}$.*

Il est à noter que ce corollaire généralise tous les résultats connus sur l'unicité fort-faible.

Disons maintenant un mot de la preuve du théorème 7. L'idée est de décomposer le membre de droite de (2.1.8) en utilisant le paraproduit de Bony, présenté dans la partie 6.2.3 :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int \langle w \cdot \nabla u \,,\, w \rangle \, ds \, dx = & \int_0^t \int \langle \Pi(w \,,\, \nabla u) \,,\, w \rangle \, ds \, dx \\
& + \int_0^t \int \langle \widetilde{\Pi}(w \,,\, \nabla u) \,,\, w \rangle \, ds \, dx \\
& + \int_0^t \int \langle R(w \,,\, \nabla u) \,,\, w \rangle \, ds \, dx \;.
\end{aligned}$$

On est alors amené à examiner si une inégalité telle que (2.1.8) est vraie pour chacun des trois termes apparaissant dans le membre de droite ci-dessus. Ceci conduit immédiatement à des espaces de type paramultiplicateur ; on peut conclure car ces espaces sont décrits par le théorème 23, énoncé dans le chapitre 4.

Une nouvelle approche pour l'unicité fort faible

Pourquoi une approche différente de l'unicité fort faible est-elle nécessaire ? Au vu de l'optimalité des solutions de Koch et Tataru, on peut reformuler la question posée plus haut comme

"Si u est une solution de Koch et Tataru, et u appartient à $\mathcal{L}$, est-ce que u est unique dans $\mathcal{L}$?"

Le problème est que les solutions de Koch et Tataru n'appartiennent en général à aucun des espaces décrits dans le théorème 7.

Sans même faire appel à ce théorème, considérons une donnée initiale auto-similaire u_0 appartenant à ∇BMO. La solution de Koch et Tataru associée sera elle aussi auto-similaire, elle appartiendra donc à des espaces du type $L^{p,\infty}X$. Ce manque d'intégrabilité en temps ruine tout espoir de vérifier (2.1.8), à moins de prendre $p = \infty$. Il est alors facile de voir que le meilleur espace vérifiant (2.1.8) est $Y = L^\infty M(\dot{H}^1 \,,\, L^2)$, et $M(\dot{H}^1 \,,\, L^2)$ est plus petit que ∇BMO !

Quelle nouvelle approche adopter ? En reprenant la démarche exposée au début du paragraphe précédent, on se rend compte que le cœur du problème est de prouver la stabilité L^2 de l'équation linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t w - \Delta w + w \cdot \nabla u + u \cdot \nabla w = -\nabla p \\ w_{|t=0} = w_0 \ , \end{array} \right. \tag{2.1.12}$$

où u est une solution de Koch et Tataru, issue de u_0. En d'autres termes, tout revient à prouver que la norme de la solution w au temps t, dans L^2, de l'équation ci-dessus, peut être estimée par la norme de w_0 dans L^2, et une certaine norme de u.

Si u est petite, on peut développer la solution w de cette équation en série

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} T_{k,\ell}(w_0 \,,\, u_0) \ ,$$

où $T_{k,\ell}(w_0 \,,\, u_0)$ est k-linéaire en w_0 et ℓ-linéaire en u_0. Le premier terme de ce développement est $e^{t\Delta} w_0$, aisément analysé. Le premier terme non trivial est $T_{1,1}$, sa bornitude est donnée par

Théorème 8 ([8]) *$T_{1,1}$ est borné de $L^2 \times \nabla BMO$ dans $L^\infty L^2$.*

La preuve de ce théorème consiste à analyser $T_{1,1}$ dans l'espace de Fourier, où l'on dispose d'une formule explicite.

Il semble (voir les perspectives en partie 2.3.4) qu'en poursuivant cette approche on puisse prouver la stabilité L^2 de (2.1.12), et par là l'unicité fort-faible pour les solutions de Koch et Tataru.

2.2 Autres modèles en mécanique des fluides

2.2.1 Présentation de (NSN) et $(NSCI)$

L'équation de Navier-Stokes classique (NS) ne décrit qu'imparfaitement les fluides réels. Des modèles plus réalistes sont l'équation de Navier-Stokes non homogène, et l'équation de Navier-Stokes compressible isentropique.

L'équation de Navier-Stokes non homogène s'écrit

$$(NSN) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \rho \partial_t u - \Delta u + \rho u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ (u\,,\,\rho)_{|t=0} = (u_0\,,\,\rho_0)\ . \end{cases}$$

En plus de la vitesse du fluide u, cette équation prend en compte sa densité ρ, qui n'est pas nécessairement uniforme.

Si l'on abandonne maintenant l'hypothèse d'incompressibilité, un des modèles les plus élémentaires est l'équation de Navier-Stokes compressible isentropique

$$(NSCI) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \rho \partial_t u - Lu + \rho u \cdot \nabla u = -\nabla P(p) \\ (u\,,\,\rho)_{|t=0} = (u_0\,,\,\rho_0)\,, \end{cases}$$

où l'on a noté L pour l'opérateur de Lamé $L = \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}$, avec $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$; et P pour la loi de pression $P(\rho) = \rho^\gamma$, avec $\gamma > 1$.

Ces deux équations ont une structure similaire à (NS), en particulier, il existe une énergie conservée

$$\begin{aligned} &\text{pour } (NSN) \quad \|\sqrt{\rho(t)}u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds \\ &\text{pour } (NSCI) \quad \|\sqrt{\rho(t)}u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \left(\mu\|\nabla u(s)\|_2^2 + (\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u(s)\|_2^2\right)\, ds \end{aligned}$$

ainsi qu'un scaling qui laisse l'équation invariante.

$$\begin{aligned} &\text{pour } (NSN) \quad (\rho_0\,,\,u_0) \to (\rho_0(\lambda x)\,,\,\lambda u_0(\lambda x)) \ \text{ et } \ (\rho\,,\,u) \to (\rho(\lambda x, \lambda^2 t)\,,\,\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)) \\ &\text{pour } (NSCI) \quad (\rho_0\,,\,u_0) \to (\rho_0(\lambda x)\,,\,\lambda u_0(\lambda x)) \ \text{ et } \ (\rho\,,\,u\,,\,P) \to (\rho(\lambda x, \lambda^2 t)\,,\,\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)\,,\,\lambda^2 P) \end{aligned}$$

(ainsi dans le cas de $(NSCI)$ il s'agit d'un presque-scaling puisque la loi de pression P doit être elle aussi modifiée).

2.2.2 Solutions fortes, solutions faibles pour (NSN) et $(NSCI)$

Tout comme expliqué dans la partie 2.1 pour (NS), on peut construire des solutions fortes et des solutions faibles pour (NSN) et $(NSCI)$, mais les difficultés rencontrées en étudiant (NSN) et $(NSCI)$ sont bien supérieures.

Des solutions faibles pour (NSN) et $(NSCI)$ ont d'abord été construites par Lions [89] [90], son approche a ensuite été raffinée, notamment par Feireisl [45].

THÉORÈME 9 (LIONS [89] [90], FEIREISL [45]) *Si (u_0, ρ_0) sont d'énergie finie, il existe une solution (faible) globale de (NSN) et $(NSCI)$.*

La théorie des solutions fortes remonte à John Nash [99], les premières solutions fortes globales de $(NSCI)$ ont été construites par Matsumura et Nishida [92].

Raphaël Danchin [38] [39], a prouvé le caractère bien posé de (NSN) et $(NSCI)$ pour des espaces de données initiales invariants par le scaling (2.2.1). Comme nous l'avons expliqué pour (NS), les espaces au scaling forment le cadre naturel et optimal dans lequel étudier des solutions fortes.

Théorème 10 (Danchin [38] [39]) *Si (u_0, ρ_0) appartiennent à $\dot{B}^{d/2-1}_{2,1} \times \dot{B}^{d/2}_{2,\infty}$, et si $\inf \rho_0 > 0$, il existe une solution (forte) locale de (NSN) et $(NSCI)$.*

La condition de borne inférieure sur ρ_0 apparaissant dans le théorème ci-dessus s'explique par le fait que si ρ s'annule, les systèmes (NSN) et $(NSCI)$ deviennent dégénérés. Ainsi, la possibilité que ρ s'annule représente un obstacle sérieux à la construction de solutions fortes ; il peut néammoins être dépassé en demandant plus de régularité pour u et ρ, ainsi qu'une "condition de compatibilité" : voir à ce sujet les articles de Cho, Choe et Kim [30] et Choe et Kim [31].

2.2.3 Unicité fort-faible pour (NSN) et $(NSCI)$

Pour ces deux équations, le problème de l'unicité fort-faible a été curieusement peu étudié ; l'unicité des solutions fortes est déjà, contrairement à (NS), un problème conséquent, et semble avoir plus retenu l'attention des auteurs. Citons en particulier les résultats de Danchin [40], Desjardins [42], Hoff [68], Lions [89]

Mais aucun de ces articles n'inclut de résultat d'unicité fort-faible au scaling de l'équation, alors que nous avons vu qu'il s'agit du cadre naturel pour (NS). Les théorèmes suivants viennent remédier à ce manque.

Théorème 11 ([5]) *Une solution d'énergie finie de (NSN) est unique dans la classe des solutions d'énergie finie à condition que (pour une certaine constante C)*

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty L^d \\
&\nabla \frac{1}{\rho} \in L^\infty L^d \quad et \quad \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{BMO} \leq \frac{C}{\|\rho\|_\infty} \\
&\nabla u \in L^1 L^\infty \quad et \quad \sqrt{t} \nabla u \in L^2 L^\infty \\
&\sqrt{t} \Delta u \in L^2 L^d \ .
\end{aligned}$$

Théorème 12 ([10]) *Une solution d'énergie finie de $(NSCI)$ est unique dans la classe des solutions d'énergie finie à condition que*

$$\begin{aligned}
&\nabla \rho \in L^\infty L^d \\
&\nabla u \in L^1 L^\infty \\
&\sqrt{t}(\partial_t u + u \cdot \nabla u) \in L^2 L^d \ .
\end{aligned}$$

Comme nous l'avons souligné plus haut, les conditions énoncées dans ces deux théorèmes ont le mérite d'être invariantes par le scaling de (NSN) et $(NSCI)$. On pourra trouver d'autres résultats dans la même direction dans [5] [10].

Un élément important de la preuve des théorèmes ci-dessus est une inégalité de Gronwall généralisée qui s'applique à des inégalités différentielles du type

$$f' + (g')^2 \leq \alpha f + \beta g' g \ ;$$

un autre élément essentiel est l'utilisation de la méthode de l'entropie relative, introduite par Dafermos [37] pour prouver l'unicité de solutions de lois de conservation, et appliquée notamment par Mellet et Vasseur [94] à des problèmes paraboliques.

2.2.4 Solutions fortes à densité non bornée inférieurement de (NSN)

Nous avons vu dans la partie 2.2.1 que, si la densité s'annule, il devient problématique de résoudre (NSN) et $(NSCI)$.

Le théorème suivant quantifie précisément un type d'annulation de ρ pour lequel le système demeure bien posé.

THÉORÈME 13 ([5]) *Soit* $s \in \left]\frac{d}{2}, \frac{d}{2}+1\right[$. *Le système* (NNS) *est bien posé pour des données initiales telles que*

$$u_0 \in H^s \quad , \quad \rho_0 \in L^\infty \quad et \quad |D|^{s-1}\frac{1}{\rho_0} \in L^{\frac{d}{s-1}}$$

et, pour une certaine constante C,

$$\left\| |D|^{s-1}\frac{1}{\rho_0} \right\|_{\frac{d}{s-1}} \leq \frac{C}{\|\rho_0\|_\infty} \ .$$

Il est à noter que l'espace dans lequel la densité est considérée dans ce théorème est au scaling de l'équation ; ce n'est pas le cas pour la vitesse, mais en utilisant le calcul paradifférentiel comme dans Danchin [38] [39], il devrait être possible de prouver un résultat au scaling pour la vitesse.

2.3 Perspectives

2.3.1 Stabilité L^2 des solutions de Koch et Tataru

Nous avons vu dans la partie 2.1.6 comment la question de l'unicité fort-faible est liée à la question de la stabilité linéaire L^2 pour les solutions de Koch et Tataru. En d'autres termes, est-il possible si u est une solution de Koch et Tataru, d'estimer la norme $L^\infty L^2$ de w solution de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + w \cdot \nabla u + u \cdot \nabla w = -\nabla p \\ w_{|t=0} = w_0 \ , \end{cases}$$

en fonction de la norme L^2 de w_0 ? Si la donnée initiale u_0, de laquelle u est issue, est petite, on peut développer w en série

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} T_{k,\ell}(w_0 \, , \, u_0) \ ,$$

où $T_{k,\ell}(w_0 \, , \, u_0)$ est k-linéaire en w_0 et ℓ-linéaire en u_0.

Comme indiqué plus haut, nous avons pu prouver que $T_{1,0}$ et $T_{1,1}$ vérifient les bornes souhaitées ; il reste donc à analyser les opérateurs suivants. On dispose pour eux d'une formule explicite dans l'espace de Fourier : ces opérateurs sont en fait pour chaque temps t des pseudo-produits, au sens de Coifman et Meyer [35] ; leurs noyaux ne vérifient pas les estimations de Coifman-Meyer standard mais présentent des singularités de type drapeau ("*flag singularities*"), étudiées dans un cas simple par Muscalu [97].

Il devrait donc être possible de prouver la bornitude des $T_{k,\ell}$ et, partant, un résultat d'unicité fort-faible pour les solutions de Koch et Tataru.

Remarquons enfin que le problème de stabilité L^2 pour l'équation ci-dessus s'inscrit plus généralement dans le cadre de l'étude globale des solutions de systèmes linéaires avec un potentiel dépendant du temps. Ces types de problèmes restent assez mal compris, même s'ils ont été étudiés intensivement dans le cas des équations dispersives : voir par exemple Rodnianski et Schlag [103] et les références dans ce papier.

2.3.2 Lien avec des résultats d'existence globale à données grandes dans un espace critique

On doit à Chemin et Gallagher [27] [28] et Chemin, Gallagher et Paicu [29] une série d'exemples de données grandes dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ pour lesquelles (NS) est globalement bien posé.

Nous avons construit (voir la partie 2.1.3) des données initiales convergeant dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, mais pour lesquelles le deuxième itéré de (NS) diverge.

Comment articuler ces deux types de condition initiale ? Un point crucial de l'analyse de Chemin et Gallagher dans [27] [28] est une hypothèse de petitesse du second itéré, en dépit de données initiales grandes dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$; c'est presque l'inverse des données initiales construites dans 2.1.3, qui sont elles bornées dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, mais dont le second itéré diverge.

Or, une caractéristique des conditions initiales construites pour prouver le théorème 2 est qu'à un même endroit en espace, toutes les gammes de fréquence sont représentées ; alors que certaines des données initiales de Chemin et Gallagher se distinguent en ce que des gammes de fréquence différentes sont séparées spatialement. Serait-ce là un élément critique ?

On peut attendre de la comparaison de ces deux approches une meilleure compréhension de la dynamique de (NS) ou du phénomène de la turbulence.

2.3.3 Comportement asymptotique en dimension 2, énergie infinie

C'est un principe d'hydrodynamique classique qu'en dimension 2, le comportement de (NS) est le suivant : les (petits) tourbillons présents dans le flot tendent à fusionner pour créer finalement un unique (grand) tourbillon.

La formulation mathématique précise de ce fait pourrait être la suivante : les basses fréquences déterminent entièrement le comportement de (NS) en temps grand. Ou, pour être encore plus précis : supposons que u_0 est asymptotiquement auto-similaire pour les basses fréquences, c'est à dire que

$$\lambda u_0(\lambda \cdot) \to U_0 \quad \text{pour } \lambda \to \infty$$

pour une certaine distribution auto-similaire ψ, et une certaine topologie. Alors

$$u(t) \to U(t) \quad \text{pour } t \to \infty$$

(là encore, dans un sens à préciser), où U est la solution de (NS) pour la donnée initiale U_0. Notons en passant que considérer des données d'énergie infinie (par exemple, asymptotiquement auto-similaires) est le seul moyen d'observer des comportements asymptotiques non triviaux pour (NS).

Dans quels cas sait-on que le principe qui vient d'être énoncé est valide ? Essentiellement dans deux situations

- Si u_0 est petit, ceci est dû à Planchon [100].
- Si le rotationnel de u_0 est une mesure finie, ceci est dû à Gallay et Wayne [51].

La preuve de ce principe dans un cadre plus général pourrait à notre avis fournir un bon exemple d'application de la méthode développée par Kenig et Merle [73] [72] pour des équations dispersives, à des équations paraboliques. Le premier pas de cette méthode, la décomposition en profils, a été prouvé par Gallagher en dimension 3 [48].

2.3.4 Espaces optimaux pour les équations des fluides inhomogènes ou compressibles ?

Le succès pour l'étude de (NS) de la théorie de Koch et Tataru conduit naturellement à se poser la question : peut-on l'adapter à d'autres modèles de mécanique des fluides, en particulier (NSN) et $(NSCI)$? A défaut, quel est l'espace optimal dans lequel ces équations sont bien posées ?

Danchin [38] [39] a montré comment construire des solutions au scaling pour ces équations. Il semble que dans son approche, un point critique empêchant de considérer des données initiales plus générales est l'équation de transport : u doit essentiellement être borné dans $L^1 Lip$, et ce n'est pas le cas (mais presque !) de $e^{t\Delta}u_0$, pour u_0 dans ∇BMO, ou simplement u_0 autosimilaire.

Chapitre 3

Existence globale pour des équations dispersives non-linéaires

Les résultats et les méthodes exposés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail en collaboration avec Nader Masmoudi et Jalal Shatah.

3.1 Introduction

3.1.1 Le problème de l'existence globale à données petites

Considérons une équation dispersive non-linéaire générale posée dans $\mathbb{R}^d$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t u + P(D)u = N(u) \\ u(t=0) = u_0 \end{array} \right. , \tag{3.1.1}$$

où $u(t,x)$ est un vecteur, $P(D)$ un multiplicateur de Fourier réel, N une fonction (non-linéaire) de u, et u_0 une donnée initiale **petite, régulière et localisée**. Notre but est de répondre à la question

"Quand cette équation admet-elle une solution globale ?"

La réponse est claire dans deux cas

1. Supposons que la non-linéarité vérifie $N(u) \lesssim |u|^p$, avec p assez grand. Alors, sans plus s'occuper de la structure précise de N, on peut conclure en utilisant des estimations dispersives, ou des estimations de Strichartz. Cette approche fonctionne à condition que p soit assez grand par rapport à la force dispersive de l'équation.

2. S'il existe une énergie conservée, et que l'équation est bien posée pour la norme correspondant à cette énergie, on peut, en résolvant le problème localement de proche en proche obtenir une solution globale. Notons cependant que cette méthode ne dit rien sur le comportement asymptotique de l'équation.

De nombreux problèmes d'intérêt physique ne peuvent se réduire au point 1. ci-dessus ; quant à l'approche par la deuxième méthode, qui n'est pas toujours possible, elle reste muette sur le comportement asymptotique de l'équation. Citons parmi ces problèmes : l'équation de Korteweg de Vries, ou l'équation de Schrödinger cubique invariante de jauge en dimension 1 (problèmes complètement intégrables) ; l'équation d'Einstein et l'équation des applications d'onde ("*wave maps*") ; l'équation d'Euler-Maxwell (physique des plasmas) ; l'équation des ondes de surface ("*water waves*"), etc...

3.1.2 Un exemple bien connu

A ce stade, nous aimerions illustrer notre propos par un exemple : en dimension 3, l'existence globale à données petites pour

$$\Box u = N(\partial u) \quad \text{avec } N(\partial u) \lesssim |\partial u|^p$$

(on note ∂ pour une dérivée du type ∂_t ou ∇) peut aisément être obtenue en utilisant les estimations de Strichartz si p est assez grand. Par contre, la solution de

$$\Box u = \partial u \partial u$$

n'est pas globale en général : l'exemple bien connu de John [67]

$$\Box u = (\partial_t u)^2$$

est une équation dont la solution, pour des données arbitrairement petites, explose en temps fini. Klainerman [76] et Christodoulou [32] ont par contre montré que l'équation

$$\Box u = (\partial_t u)^2 - (\nabla u)^2$$

admet une solution globale à données petites.

Cet exemple montre combien la structure de la non-linéarité devient importante dès lors que la puissance à laquelle elle correspond est assez faible.

3.1.3 Méthodes classiques

Dans les années 80, deux méthodes ont été proposées pour traiter le type de problème qui vient d'être présenté.

Champs de vecteurs

L'idée de cette méthode est la suivante : trouver une famille de champs de vecteurs (Γ_j) adaptés à l'équation, c'est à dire commutant (ou presque) avec la partie linéaire, et vérifiant (ou presque) une relation de Leibniz pour la partie non linéaire.

Ces champs de vecteurs permettent alors, au moins dans les cas favorables, de contrôler l'équation par des normes du type $\sum_{|k|\leq N} \left\|\Gamma^k u\right\|_2$ et $\sum_{|k|\leq N/2} \left\|\Gamma^k u\right\|_\infty$.

Cette méthode a été introduite par Klainerman, qui l'a appliquée à l'équation des ondes quadratique [76] ainsi qu'à l'équation de Klein-Gordon quadratique [77]. Elle a aussi été utilisée avec succcès pour étudier des équations de Schrödinger non-linéaires, voir par exemple Hayashi, Miao et Naumkin [56] ainsi que Hayashi et Naumkin [58].

Un des attraits de cette méthode réside dans sa robustesse. Elle peut en particulier être utilisée même si l'espace sous-jacent n'est pas plat, c'est à dire différent de l'espace euclidien. C'est par exemple le cas pour les équations d'Einstein, et Christodoulou et Klainerman [33] se sont appuyés sur cette méthode pour prouver la stabilité des équations d'Einstein au voisinage de l'espace de Minkowski.

Formes normales

Nous avons vu plus haut que plus la puissance de la non-linéarité est élevée, plus il est facile de prouver un résultat d'existence globale. Dès lors, pourquoi ne pas essayer, par un changement d'inconnue, de se ramener à une équation dont la non-linéarité a une puissance plus élevée ? C'est là l'idée de la méthode des formes normales.

Pour être plus précis, supposons que la non-linéarité N de (3.1.1) est quadratique. On cherche alors un opérateur bilinéaire B telle que la nouvelle inconnue

$$v \overset{def}{=} u + B(u,u) \tag{3.1.2}$$

satisfasse une équation cubique. On peut alors espérer prouver un résultat d'existence globale pour v, qui se traduirait en un résultat d'existence globale pour u. Cette approche a été appliquée pour la première fois par Shatah [109], dans le cadre de l'équation de Klein-Gordon quadratique. Entre autre applications, on peut aussi citer l'équation de Schrödinger quadratique (Cohn [34]) ou l'équation d'Euler-Poisson (Guo [55]).

Cette méthode a son origine dans la théorie des systèmes dynamiques de dimension finie ; elle s'applique alors uniquement en l'absence de résonance. Pour les systèmes dynamiques de dimension infinie que constituent les EDP, la situation est plus subtile : les résonances correspondent à des singularités de l'opérateur bilinéaire B ; à condition que ces singularités ne soient pas trop importantes, la méthode s'applique.

3.2 Notre approche : une analyse dans l'espace de Fourier

3.2.1 Résonances en temps et résonances en espace

Afin de simplifier l'exposition, nous nous limiterons ici au cas où N est quadratique, et u scalaire. Ainsi on considère l'équation

$$\partial_t u + iP(D)u = N(u) \ , \tag{3.2.3}$$

où $N(u)$ est un des polynômes

$$N_1(u) = u^2 \quad , \quad N_2(u) = \bar{u}^2 \quad \text{ou} \quad N_3(u) = u\bar{u} \ .$$

Posons

$$f(t) = e^{itP(D)}u(t) \ . \tag{3.2.4}$$

En utilisant la formule de Duhamel, et en traduisant le problème en variable de Fourier, (3.2.3) prend la forme

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t \int e^{is\phi(\xi,\eta)} \widehat{f}(s,\eta) \widehat{f}(s,\xi-\eta)\, d\eta ds \ , \tag{3.2.5}$$

où ϕ dépend de la non-linéarité N : plus précisément,

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi\,,\,\eta) &= P(\xi) - P(\eta) - P(\xi-\eta) \\
\phi_2(\xi\,,\,\eta) &= P(\xi) + P(\eta) + P(\xi-\eta) \\
\phi_3(\xi\,,\,\eta) &= P(\xi) - P(\eta) + P(\xi-\eta)
\end{aligned}$$

(pour être complètement exact, il faudrait prendre dans (3.2.5) le conjugué complexe de $\widehat{f}$ pour certains j ; mais cela n'a pas d'importance). La structure du problème est maintenant contenue dans ϕ.

Arrêtons-nous un instant et examinons l'équation (3.2.5) que nous venons d'écrire. On aimerait obtenir un contrôle a priori, uniforme en temps, sur f ; un obstacle évident est l'intégrale présente dans le membre de droite. Si t devient grand, l'intervalle d'intégration croît, et à moins que l'intégrand n'oscille il n'y a pas d'espoir de clore les estimations.

Il apparaît donc que deux cas peuvent être défavorables : si ϕ ou $\nabla_\eta \phi$ s'annulent. En effet,

- Si ϕ s'annule, la phase est stationnaire dans la variable s. Il s'agit d'une résonance au sens classique des systèmes dynamiques, "**résonance en temps**". En caricaturant quelque peu, l'étude de ces résonances en temps est l'objet des espaces $X^{s,b}$ introduits par Bourgain et Klainerman, et présentés par exemple dans Tao [120] ; mais ces espaces, s'ils permettent une analyse fine de la régularité des solutions, sont moins utiles pour les problèmes d'existence globale.
- Si $\nabla_\eta \phi$ s'annule, la phase est stationnaire dans la variable η. Nous appellerons ce phénomène "**résonance en espace**". Pour comprendre sa signification physique, il suffit d'observer que $\nabla_\eta \phi$ est égale à la différence entre les vitesses de groupe d'un paquet d'onde localisé autour de $\xi - \eta$, et d'un paquet d'onde localisé autour de ξ. Ainsi, quand $\nabla_\eta \phi$ s'annule, les vitesses de groupe sont égales, et une interaction longue entre ces paquets d'onde devient possible.

  Remarquons que cette notion n'a bien sûr un sens que si le spectre de l'équation linéarisée est continu (sinon, comment dériver par rapport à η ?) ; en d'autres termes l'extension spatiale du domaine doit être infinie.

Bien sûr, l'approche qui vient d'être esquissée peut être appliquée à n'importe quelle équation du type (3.1.1) pourvu que N ait une structure polynomiale.

La morale que nous retenons est la suivante : ϕ décrit les propriétés dispersives non-linéaires du système. Une solution globale devrait exister pourvu que l'ensemble $\{\phi = 0\} \cap \{\nabla_\eta \phi = 0\}$ soit assez petit. Voyons comment ce principe s'applique.

3.2.2 Notre méthode : lien avec les opérateurs de pseudo-produit

Considérons à nouveau l'équation dérivée dans le paragraphe précédent

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t \int e^{is\phi(\xi,\eta)} \widehat{f}(s,\eta) \widehat{f}(s,\xi-\eta)\, d\eta\, ds \ . \tag{3.2.6}$$

La difficulté réside bien sûr dans l'estimation de l'intégrale qui apparaît dans le membre de droite. Notre méthode est la suivante : appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble critique $\{\phi = 0\} \cap \{\nabla_\eta \phi = 0\}$. On veut tirer parti de l'oscillation dans l'intégrale ci-dessus, sauf bien entendu sur $\mathcal{C}$ puisqu'alors il n'y a pas d'oscillation. La chose la plus naturelle à faire est d'intégrer par parties ; soit donc L donné par

$$L = \frac{\alpha\partial_s + \frac{\beta}{s}\nabla_\eta}{i(\alpha\phi + \beta\nabla_\eta\phi)}$$

où $\alpha(\xi,\eta)$ et $\beta(\xi,\eta)$ sont choisis de telle sorte que le dénominateur $i(\alpha\phi + s\beta\nabla_\eta\phi)$ ne s'annule que sur $\mathcal{C}$. Bien sûr, L est conçu pour que

$$Le^{i\phi} = e^{i\phi} \ .$$

En utilisant cette identité, on peut intégrer par parties dans (3.2.6). Sans rentrer dans les détails, ceci permet de gagner de la décroissance en s et de fermer les estimations. Cependant, pour mener à bien ces estimations, il est nécessaire d'utiliser un outil d'analyse harmonique. En effet, il est clair que les termes multilinéaires obtenus en intégrant par parties ne sont plus des produits ; il s'agit en fait de pseudo-produits, c'est à dire qu'ils s'écrivent (dans le cas bilinéaire)

$$(f,g) \mapsto \mathcal{F}^{-1} \int m(\xi,\eta)\widehat{f}(\eta)\widehat{g}(\xi-\eta)\,d\eta \ .$$

Là aussi sans rentrer dans les détails, on se rend compte facilement que le noyau m va être singulier sur $\mathcal{C}$.

Dans le cas du théorème 14 présenté ci-dessous, $\mathcal{C} = \{(\xi,\eta) = (0,0)\}$, et les noyaux m sont de type Coifman-Meyer ; le théorème de Coifman-Meyer [35] permet alors d'estimer les termes multilinéaires correspondants.

Mais que se passe-t-il si la géométrie de $\mathcal{C}$ est plus complexe, comme c'est le cas pour certaines équations de la physique mathématique ? On voit apparaître un lien passionnant avec des problèmes d'analyse harmonique actuels, comme l'étude de l'opérateur de Hilbert bilinéaire, pour lequel l'ensemble singulier est un sous-espace vectoriel. Le petit livre de Thiele [125] est une introduction à ce domaine de recherche.

3.2.3 Une généralisation des méthodes antérieures

Nous aimerions maintenant montrer pourquoi la méthode qui vient d'être esquissée constitue une généralisation des méthodes des champs de vecteurs et des formes normales, présentées dans la partie 3.1.3. Bien sûr, il n'est pas possible de donner ici tous les détails, mais nous espérons donner au moins une idée du lien entre ces méthodes.

Intégration par parties en temps et forme normale

Nous avons vu qu'il convient, pour tirer parti de l'oscillation dans l'intégrale (3.2.6), d'intégrer par parties, en s ou en η. Commençons par intégrer par parties en s. On obtient

$$\int_0^t \int e^{is\phi(\xi,\eta)}\widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\,ds$$
$$= \left[\int \frac{e^{is\phi(\xi,\eta)}}{i\phi(\xi,\eta)}\widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\right]_0^t - \int_0^t \int \frac{e^{is\phi(\xi,\eta)}}{i\phi(\xi,\eta)}\partial_s\widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\,ds \ .$$

En utilisant que $\partial_t f = e^{itP(D)}N(u)$, on voit que (3.2.6) peut se réécrire

$$\widehat{f}(t,\xi) - \left[\int \frac{e^{is\phi(\xi,\eta)}}{\phi(\xi,\eta)} \widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta \right]_0^t = \widehat{u_0}(\xi) - \int_0^t \int e^{is\phi(\xi,\eta)} e^{isP(\eta)} \widehat{N(u)}(\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\,ds\ .$$

Cette égalité correspond précisément au changement d'inconnue 3.1.2 à la base de la méthode des formes normales. Il faudrait pour le voir clairement revenir à l'inconnue u, mais on peut observer que le membre de gauche est de la forme f + une forme quadratique de f. Quant au terme de droite, il correspond à une non-linéarité de la forme $fN(u)$: on vient donc d'augmenter le degré de la non-linéarité !

Ainsi, l'intégration par parties en temps dans (3.2.6) revient exactement à appliquer la méthode des formes normales.

Intégration par parties en η et champs de vecteurs

Que se passe-t-il si l'on intègre par parties en η ? Sans écrire la formule exacte, il est clair que les expressions obtenues font intervenir $\partial_\eta \widehat{f}(\eta)$. Pour mieux comprendre ce terme, nous allons l'écrire en fonction de u, et dans l'espace physique, grâce à la relation (3.2.4). Il apparaît qu'il existe un champ de vecteurs Γ tel que

$$(e^{itP(\xi)}\partial_\xi \widehat{f}(\xi))^\wedge = \Gamma u\ .$$

L'examen de Γ dans le cas de l'équation des ondes, ou de l'équation de Schrödinger, montre qu'il s'agit précisément du champ de vecteur utilisé dans la méthode des champs de vecteurs !

Ainsi, la méthode des champs de vecteurs est intimement reliée à l'intégration par parties en η dans (3.2.6).

Conclusion

Il resort de la brève analyse qui vient d'être faite que la méthode des formes normales est reliée à l'intégration par parties en temps dans (3.2.6), et qu'elle privilégie l'étude des résonances en temps ; alors que la méthode des champs de vecteurs correspond à l'intégration par parties en η dans (3.2.6), et qu'elle se concentre sur les résonances en espace.

Les avantages de notre approche, présentée dans la partie 3.2.2, sont dès lors clairs : elle unifie ces deux méthodes antérieures, et permet de traiter conjointement les résonances en temps et les résonances en espace.

3.3 Le cas de l'équation de Schrödinger en dimension 3

Nous nous concentrons à partir de maintenant sur l'équation de Schrödinger non-linéaire en dimension 3, autrement dit $P(\xi) = |\xi|^2$ ou $c|\xi|^2$, pour une constante c. L'équation que nous étudions est donc à partir de maintenant

$$\begin{cases} \partial_t u + i\Delta u = N(u) \\ u_{t=0} = u_0\ , \end{cases} \tag{3.3.7}$$

avec $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3$. Nous allons montrer comment l'approche décrite dans la section précédente s'applique.

3.3.1 Non-linéarité super-quadratique

On dit que N est super quadratique si $N(u) \lesssim |u|^p$ pour un $p > 2$. L'existence de solutions globales dans ce cas peut être démontrée en utilisant les estimations dispersives, sans étudier plus avant la structure de la non-linéarité : voir Strauss [118], Shatah [109], Klainerman et Ponce [78].

3.3.2 Non-linéarité quadratique, cas scalaire

Si la non-linéarité est quadratique, sa structure précise devient importante. Nous distingurons donc entre

$$N_1(u) = u^2 \quad , \quad N_2(u) = \bar{u}^2 \quad \text{ou} \quad N_3(u) = u\bar{u} \ .$$

Comme dans la partie 3.2, on peut associer à chacune de ces non-linéarités une phase

$$\phi_1(\xi\,,\eta) = |\xi|^2 - |\eta|^2 - |\xi-\eta|^2 \quad , \quad \phi_2(\xi\,,\eta) = |\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi-\eta|^2 \quad \text{et} \quad \phi_3(\xi\,,\eta) = |\xi|^2 - |\eta|^2 + |\xi-\eta|^2 \ .$$

Pour chacune de ces non-linéarités, on peut décrire l'ensemble critique $\mathcal{C} = \{\phi = 0\} \cap \{\nabla_\eta \phi = 0\}$. Il est réduit à $\{\xi = 0\,,\eta = 0\}$ si $j = 1$ ou 2, mais c'est un cone de dimension 3 si $j = 3$. Au vu de la morale énoncée à la fin de la partie 3.2, le théorème suivant n'est pas étonnant.

Théorème 14 (Germain Masmoudi Shatah [12]) *Si $j = 1$ ou 2, (3.3.7) et si $\|u_0(x)\|_2 + \|x^2 u_0(x)\|_2$ est assez petit, (3.3.7) admet une solution globale.*

Pour démontrer ce théorème, l'analyse classique prenant seulement en compte les résonances en temps est insuffisante, puisque si $j = 1$ les résonances en temps seules (c'est à dire $\{\phi = 0\}$) forment un cone de dimension 4 ; en prenant l'intersection avec les résonances en espace on obtient un espace de dimension plus petite, et c'est ce qui permet la preuve du théorème.

Ce théorème avait déjà été démontré par Hayashi, Mizumachi et Naumkin [57], voir aussi Kawahara [71], en utilisant une méthode reposant sur la commutation de champs de vecteurs. Notre approche permet de clarifier les raisons structurelles pour lesquelles le théorème est vrai ; et la méthode qui lui est associée est beaucoup plus simple et directe.

Dans le cas $j = 3$, on doit à Ginibre et Hayashi [53] un résultat d'existence presque globale ; on peut conjecturer que l'existence globale à données petites n'est pas vraie en général.

Enfin, on peut considérer la non linéarité quadratique $|u|u$. La non-linéarité n'étant plus polynomiale, notre méthode ne s'applique plus. Mais la non-linéarité devient invariante de jauge, et on peut en utilisant la transformation pseudo-conforme obtenir un résultat d'existence globale : voir Nakanishi et Ozawa [98].

3.3.3 Non-linéarité quadratique, cas vectoriel

Notre méthode permet de traiter sans presque rien changer à la preuve du théorème 14 le cas d'un système d'équations de Schrödinger couplées avec des vitesses de propagations différentes.

Théorème 15 (Germain Masmoudi Shatah [12]) *Le système*

$$\text{si } 1 \leq \ell \leq N, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u^\ell + ic_\ell \Delta u^\ell = \sum_{m,n} A_{\ell mn} u^m u^n \\ u^\ell(t=0) = u_0^\ell \end{array} \right. \tag{3.3.8}$$

admet une solution globale à données petites à condition que

$$A_{\ell mn} = 0 \quad \textit{dès que} \quad c_m + c_n = 0 \quad \textit{ou} \quad \frac{1}{c_\ell} = \frac{1}{c_m} + \frac{1}{c_n} \; . \tag{3.3.9}$$

D'où vient la condition (3.3.9) ? On peut utiliser l'approche décrite plus haut en posant $f^\ell(t) = e^{ic_\ell t\Delta}u(t)$ puis en écrivant (3.3.8) sous la forme

$$\widehat{f^\ell}(t,\xi) = \widehat{u_0^\ell}(\xi) + A_{\ell mn} \int_0^t \int e^{is\phi_{\ell mn}(\xi,\eta)} \widehat{f^m}(s,\eta)\widehat{f^n}(s,\xi-\eta)\, d\eta ds \ ,$$

avec $\phi_{\ell mn}(\xi,\eta) = c_\ell|\xi|^2 - c_m|\eta|^2 - c_n|\xi-\eta|^2$. La condition (3.3.9) est alors équivalente à $\{\phi_{\ell mn} = 0\} \cap \{\nabla_\eta \phi_{\ell mn} = 0\} = \{(\xi,\eta) = (0,0)\}$.

3.4 Perspectives

3.4.1 Autres EDP

L'approche qui vient d'être exposée peut être appliquée à une grande variété de problèmes ; elle fournit une grille de lecture qui semble très pertinente.

Le problème de l'existence globale à données petites pour l'équation de Schrödinger quadratique en dimension 2 est considérablement plus complexe que le résultat en dimension 3 qui a été présenté plus haut. En fait, il convient en dimension 2 d'ajouter une dérivée à la non-linéarité, afin de diminuer la force des résonances en $(\xi,\eta) = 0$. Ce problème a été traité par Delort [41] par des méthodes microlocales ; il est possible néammoins que notre approche puisse apporter des améliorations.

Il est probablement possible de prouver le résultat sur les "formes nulles" évoqué en partie 3.1 à l'aide de notre méthode. Il s'agit bien sûr d'un résultat désormais classique, mais la preuve standard repose sur un certain nombre de miracles que nous espérons comprendre mieux en travaillant dans la variable de Fourier.

Le problème des ondes de surface ("*water waves*") suscite une recherche très active (voir par exemple Shatah et Zeng [114] et les références contenues dans cet article) ; cependant le problème de l'existence globale pour ce système est toujours ouvert. La méthode esquissée ci-dessus pourrait permettre de s'y attaquer.

3.4.2 Entre phase stationnaire et opérateurs bilinéaires

Si l'on essaie de résoudre (3.3.7) de manière itérative, le second itéré s'écrit

$$\widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t \int e^{is\phi_i(\xi,\eta)} \widehat{u_0}(\eta)\widehat{u_0}(\xi-\eta)\, d\eta ds$$

ou encore, si l'on intègre en temps,

$$\widehat{u_0}(\xi) + \int \frac{e^{it\phi_i(\xi,\eta)}-1}{\phi_i(\xi,\eta)} \widehat{u_0}(\eta)\widehat{u_0}(\xi-\eta)\, d\eta \ .$$

On est donc naturellement amené à considérer un opérateur de pseudo-produit avec un noyau du type $\dfrac{e^{it\phi_i(\xi,\eta)}-1}{\phi_i(\xi,\eta)}$. Il serait très intéressant de comprendre quand un tel opérateur est borné (indépendamment de t).

En fait, une analyse directe de cet opérateur semblant difficile, la procédure d'intégration par parties décrite dans la partie 3.2.2 représente une tentative d'obtenir néammoins des estimations.

La difficulté, mais aussi l'intérêt, de l'analyse d'un opérateur de pseudo-produit avec un noyau $\dfrac{e^{it\phi_i(\xi,\eta)}-1}{\phi_i(\xi,\eta)}$ réside dans le fait qu'on est à la frontière de deux mondes :

- Si l'on gèle le paramètre t, il s'agit essentiellement d'un opérateur de type Coifman-Meyer (noter que si ϕ, dénominateur du symbole s'annule, le numérateur s'annule aussi).
- Si par contre on s'intéresse à la limite où t approche l'infini, on a essentiellement affaire à une intégrale oscillante, et on aimerait appliquer des théorèmes de type phase stationnaire. De tels théorèmes existent pour des opérateurs linéaires entre espaces de Lebesgue : voir le théorème de Hörmander cité dans Stein [117], chapitre VI. Par contre, dans le cas bilinéaire, rien ne semble connu.

Ainsi, on a mis le doigt sur une nouvelle classe d'opérateurs bilinéaires dont on aimerait comprendre le comportement pour t grand, en fonction de ϕ. Ceci permettrait probablement une compréhension plus profonde du type d'équations qui sont l'objet de ce chapitre, mais ceci jetterait aussi un pont entre deux théories d'analyse harmonique pour l'instant largement disjointes.

Chapitre 4

Equations dispersives géométriques

Par "équations dispersives géométriques" nous entendons dans ce chapitre : les applications d'onde ("*wave maps*") et les applications de Schrödinger ("*Schrödinger maps*")

Ces deux équations constituent le pendant dispersif des applications harmoniques. Nous allons dans un instant les définir précisément, mais disons sans plus attendre qu'on peut les voir comme une généralisation des équations (linéaires) de Schrödinger et des ondes ; la différence est que ces équations ne portent plus sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, mais sur des applications à valeurs dans une variété riemannienne.

Pourquoi étudier ces équations ? Outre leur intérêt intrinsèque, les applications d'onde sont étroitement liées à l'équation d'Einstein (relativité générale) et les applications de Schrödinger à certains modèles physiques (voir Shatah et Zeng [115]).

4.1 L'équation des applications d'onde ("*wave maps*")

4.1.1 Présentation de l'équation et résultats connus

Forme générale

Soit une variété riemannienne N. Par le théorème de Nash, N s'injecte isométriquement dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande, et nous considérons dans la suite N comme une sous variété de l'espace euclidien.

Une application $u(t,x)$ (où $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$) à valeurs dans N est appelée une application d'onde avec données de Cauchy (u_0, u_1) si elle vérifie

$$(AO) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Box u(x,t) \perp T_{u(x,t)}N \\ (u,u_t)_{|t=0} = (u_0,u_1) \end{array} \right. ,$$

où l'on a noté T_yN l'espace tangent à N au point y. (Dans le cas où N est la sphère, l'équation ci-dessus devient simplement $\Box u = u[(\partial_t u)^2 - (\nabla u)^2]$.)

Les solutions de cette équation sont invariantes par le scaling

$$(\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) \longrightarrow u_0(\lambda x) \quad \text{et} \quad u(x,t) \longrightarrow u(\lambda x, \lambda t)$$

et conservent, au moins formellement, l'énergie

$$\mathcal{E} = \|\nabla u\|_2^2 + \|\partial_t u\|_2^2 \ .$$

Caractère bien posé

Rappelons tout d'abord que des équations d'onde semi-linéaires générales sont bien posées pour $(u_0, u_1) \in \dot{H}^{d/2+1} \times \dot{H}^{d/2}$. Cependant, la non-linéarité de (AO) présente une structure de forme nulle ; en utilisant ce fait, et des espaces de type $X^{s,b}$, Klainerman (voir par exemple l'article de revue avec Selberg [79]) a pu montrer que l'équation est bien posée dans $\dot{H}^{d/2+\epsilon} \times \dot{H}^{d/2-1+\epsilon}$. Ce seuil a été abaissé par Tataru [119] à $\dot{B}^{d/2}_{2,1} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,1}$, qui est au scaling de l'équation, mais qu'il semble naturel de vouloir remplacer par $\dot{H}^{d/2} \times \dot{H}^{d/2-1}$. Ceci est particulièrement vrai en dimension 2 puisqu'alors il s'agit de l'espace d'énergie. L'équation (AO) n'est en fait pas bien posée au niveau de $\dot{H}^{d/2} \times \dot{H}^{d/2-1}$, mais on peut obtenir des solutions globales qui préservent la régularité. Ceci est dû à Tao [121] [122] pour la sphère, en dimension quelconque, et grâce à l'utilisation d'une jauge microlocale ; Shatah et Struwe [113] ont, en utilisant l'outil des *moving frames*, étendu ce résultat à des variétés cibles arbitraires en dimension $d \geq 4$.

Que dire maintenant du comportement global de (AO) ? En dimension 2 (la dimension critique pour laquelle l'énergie est au scaling de (AO)), et si la cible N est de courbure négative, il est conjecturé que les solutions locales ne développent pas de singularité et peuvent être étendues à des solutions globales. Des articles récents de Tao [123] [124] tendent vers la preuve de cette conjecture.

Si $d \geq 3$ ou si $d = 2$, mais la courbure de N n'est pas négative, la situation est beaucoup plus ouverte ; les investigations sont pour l'instant limitées au cas où les données (u_0, u_1) ainsi que la variété N présentent une symétrie : c'est l'objet du paragraphe qui suit.

Réduction équivariante

La réduction équivariante qui va être présentée permet de réduire (AO) à un problème en $1+1$ dimensions. Supposons que la métrique de N peut s'écrire, dans des coordonnées $(\phi\,,\,\chi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$

$$ds^2 = d\phi^2 + g(\phi)^2 d\chi^2$$

(ceci signifie que N présente une symétrie par rotation ; si par exemple $N = \mathbb{S}^2$, on peut prendre pour ϕ et χ les coordonnées sphériques classiques).

Notons d'autre part (r, ω) pour les coordonnées polaires du plan euclidien $\mathbb{R}^d$.

Soit enfin $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^M$ (M est un entier, a priori grand) une application harmonique propre ("*eigenmap*"), c'est à dire que (pour une constante k)

$$|\nabla \chi|^2 = k \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi + k\chi = 0 \ .$$

On dit alors que l'application u est équivariante si elle s'écrit, dans les systèmes de coordonnées (r, ω) et $(\phi\,,\,\chi)$,

$$u(r, \omega) = (\phi(r), \chi(\omega))$$

(le cas le plus simple est celui où χ est l'identité et u une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{S}^d$ telle que $u(r, \omega) = (\phi(r), \omega)$).

L'équation (AO) devient alors l'équation suivante pour $\phi(t, r)$

$$(AOE) \qquad \begin{cases} \partial_t^2\phi - \partial_r^2\phi - \frac{d-1}{r}\partial_r\phi + \frac{k}{r^2}g(\phi)g'(\phi) = 0 \\ (\phi, \phi_t)_{|t=0} = (\phi_0, \phi_1) \end{cases}$$

Formation de singularités

Les investigations sur la formation de singularités sont pour l'instant limitées au cadre équivariant. Les résultats connus sont les suivants.

- **En dimension** 2, (AO) est critique. Il a récemment été prouvé par Rodnianski et Sterbenz [104] et Krieger, Tataru et Schlag [84] que si $N = \mathbb{S}^2$, l'équation (AOE) développe des singularités à partir de solutions régulières.
- **En dimension** $d \geq 3$, on doit à Shatah [110] et Cazenave, Shatah et Tahvildar-Zadeh [24] des exemples de solutions autosimilaires, c'est à dire du type $\phi(t, r) = \psi\left(\dfrac{r}{t}\right)$, où ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; ces solutions présentent bien sûr une singularité pour $t = 0$.

4.1.2 Données initiales $(u_0\,,\,u_1) \in \dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$

Nous avons vu plus haut que (AO) a une solution globale et unique pour des données initiales $(u_0\,,\,u_1) \in \dot{H}^{d/2} \times \dot{H}^{d/2-1}$. On peut aussi prouver que (AOE) est bien posée pour ce type de données.

Comme $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$ est un espace plus grand que $\dot{H}^{d/2} \times \dot{H}^{d/2-1}$, montrer que (AOE) est bien posée dans $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$ représente une amélioration technique ; cela a aussi un intérêt intrinsèque comme nous allons le voir.

Une question complètement ouverte est la stabilité des solutions explosives auto-similaires de Shatah [110] et Cazenave, Shatah et Tahvildar-Zadeh [24] présentées plus haut. L'approche que nous avons suivie pour tenter de mieux comprendre cette question est la suivante : au lieu de perturber une telle solution avant l'explosion et d'essayer de comprendre comment la dynamique est affectée, pourquoi ne pas résoudre à partir du temps d'explosion ?

Soit $u = \psi\left(\frac{r}{t}\right)$ une solution auto-similaire. Il est facile de voir que sa trace à $t = 0$ est du type $\left(C_0\,,\,\dfrac{C_1}{r}\right)$, pour des constantes C_0 et C_1. Réciproquement, les solutions issues de telles données initiales sont, au moins formellement, auto-similaires. Cependant, ce type de données n'appartient pas à $\dot{H}^{d/2} \times \dot{H}^{d/2-1}$, mais à $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$: il apparaît donc naturel de s'intéresser à de telles données.

Notre premier théorème concerne le cas de données petites dans un espace très proche de $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$; afin de ne pas sombrer dans de trop grandes complications techniques, nous énonçons le théorème pour cet espace de Besov, et renvoyons à l'article correspondant pour l'énoncé exact.

Théorème 16 ([6]) *L'équation (AOE) est bien posée globalement pour $(u_0\,,\,u_1)$ petit dans $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$. La solution u correspondante appartient à $L^\infty(]-\infty, \infty[, \dot{B}^{d/2}_{2,\infty})$.*

La preuve de ce théorème repose sur un argument de point fixe standard, et les inégalités de Strichartz. La preuve requiert cependant une analyse en fréquence assez fine.

Peut-on se passer de l'hypothèse de petitesse ? Ceci semble en général très difficile, mais est cependant possible dans un cas particulier.

THÉORÈME 17 ([6]) *Soit $d = 3$ et (u_0, u_1) de la forme $\left(C_0\,,\,\dfrac{C_1}{r}\right)$, pour des constantes C_0 et C_1. Alors il existe une solution globale de (AOE) appartenant à $L^\infty \dot{B}^{d/2}_{2,\infty}$; cette solution n'est en général pas unique.*

Pour prouver ce théorème, on cherche la solution sous la forme $\psi\left(\frac{r}{t}\right)$, et on remarque qu'alors (AOE) devient l'EDO singulière

$$\rho^2(1-\rho^2)f''(\rho) + 2\rho(1-\rho^2)f'(\rho) - 2g(\rho)g'(\rho) = 0 \;;$$

la preuve consiste alors en l'étude minutieuse de cette équation.

Le résultat de non-unicité était déjà connu pour les solutions de Shatah ; nous voyons qu'il s'agit en fait d'un phénomène général.

Que retenir de cette analyse ? Les solutions auto-similaires de Shatah peuvent être incluses dans un ensemble plus large de solutions correspondant à des données initiales dans $\dot{B}^{d/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{d/2-1}_{2,\infty}$. Si ces données sont petites, l'équation est bien posée, mais pour des données grandes, on perd l'unicité.

L'analyse de la stabilité des données grandes semble très ardue, mais elle pourrait fournir une réponse à la question : en l'absence d'unicité, comment choisir des solutions physiquement pertinentes ?

4.1.3 Existence de profils auto-similaires réguliers

Présentation du problème

La question centrale de ce paragraphe est : à quelle condition sur N existe-t-il une solution de (AOE) du type $\psi\left(\frac{r}{t}\right)$, avec un profil ψ régulier ?

La réponse à cette question a bien sûr des implications importantes pour la dynamique de (AOE). En effet, l'existence d'un tel profil implique que l'équation peut développer des singularités ; au contraire, en l'absence d'un tel profil, il semble que la question du comportement de l'équation est essentiellement ouverte.

Nous avons vu que Shatah [110] (pour $N = \mathbb{S}^3$) et Cazenave, Shatah et Tahvildar-Zadeh [24] (pour des variétés cibles plus générales) ont prouvé l'existence de tels profils. Nous allons présenter un critère qui caractérise totalement, si $d = 3$, les variétés N pour lesquelles un tel profil existe.

Nous nous restreignons au cas où N possède un unique équateur, c'est à dire un unique ϕ_0 tel que $g'(\phi_0) = 0$. En dimension 3, il est facile de voir que l'existence d'un équateur est une condition nécessaire pour l'existence de profils auto-similaires ; on pourrait considérer le cas de plusieurs équateurs, mais cela compliquerait la discussion sans apporter de nouvel éclairage. Ainsi on peut penser à N comme une variété de forme ovoïde.

Il nous faut maintenant faire un petit détour par la théorie des applications harmoniques (elliptiques).

L'énergie de Dirichlet pour les applications harmoniques et l'application équateur

Les applications harmoniques sont à l'équation de Laplace ce que les applications d'ondes sont à l'équation des ondes. En d'autres termes, une application u à valeurs dans une variété N est harmonique si

$$\Delta u(x) \perp T_{u(x)}N \ .$$

Le cadre équivariant présenté plus haut est tout aussi adapté aux applications harmoniques. L'équation ci-dessus devient

$$-\partial_r^2\phi - \frac{d-1}{r}\partial_r\phi + \frac{k}{r^2}g(\phi)g'(\phi) = 0 \ .$$

Cette équation, restreinte à la boule unité, peut être vue comme l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie

$$E(\phi) = \int_0^1 \left[(\partial_r\phi)^2 + \frac{k}{r^2}g(\phi)^2\right] r^{d-1}dr \ . \tag{4.1.1}$$

Définissons maintenant l'application équateur ("*equator map*") par

$$\phi(r) \equiv \phi_0 \ .$$

Cette application est harmonique, mais elle présente une discontinuité à l'origine. Il semblerait d'ailleurs qu'il s'agisse d'un des premiers exemples connus de solutions non continues d'une équation elliptique.

Si l'application équateur n'est pas continue, on peut s'interroger sur sa stabilité : minimise-t-elle l'énergie E dans la classe des ϕ tels que $\phi(r=1) = \phi_0$?

La réponse à cette question dépend de N, on se reportera pour plus d'informations à Jäger et Kaul [66], Baldes [16], Hélein [60].

Critère pour l'existence de profils auto-similaires réguliers si $d = 3$

Donnons ce critère sans plus attendre. Rappelons que nous sommes dans le cadre équivariant et que N a un unique équateur.

Théorème 18 ([11]) *Soit $d = 3$. Les deux points suivants sont équivalents*

(i) L'application équateur est l'unique minimiseur de E (défini en (4.1.1))dans la classe des ϕ tels que $\phi(r=1) = \phi_0$.

(ii) Il n'existe pas de solution de (AOE) de la forme $\psi\left(\frac{r}{t}\right)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ce théorème représente un lien surprenant entre la théorie elliptique (applications harmoniques) et la théorie hyperbolique (applications d'onde).

Le lien entre les points (i) et (ii) est fourni par les applications d'onde d'énergie finie ayant pour donnée initiale l'application équateur, si bien qu'en fait une étape intermédiaire dans la démonstration du théorème précédent est le théorème suivant :

THÉORÈME 19 ([11]) *Soit $d = 3$. Les deux points suivants sont équivalents*

(i) L'application équateur est l'unique minimiseur de E dans la classe des ϕ tels que $\phi(r = 1) = \phi_0$.

(ii) L'application identiquement égale à ϕ_0 est l'unique solution d'énergie finie issue de $(u_0, u_1) = (\phi_0, 0)$.

Ainsi, on obtient aussi un résultat (conditionnel) de non-unicité pour les solutions faibles !

Enfin, une hypothèse du théorème 18 semble restrictive : pourquoi demander des profils qu'ils soient $\mathcal{C}^\infty$? Des profils moins réguliers permettraient aussi de prouver l'apparition de singularités. Le théorème suivant vient répondre à cette question

THÉORÈME 20 ([11]) *Soit $d = 3$, et ψ dans $\dot{H}^{3/2}$ tel que $\psi\left(\frac{r}{t}\right)$ soit une solution de (AOE). Alors $\psi \in \mathcal{C}^\infty$.*

Ce résultat de régularité elliptique montre que les profils de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont en fait le cas général.

Il est trés intéressant de noter que $\dot{H}^{3/2}$ est essentiellement la régularité limite : si l'on demande seulement $\dot{B}^{3/2}_{2,\infty}$, alors des profils existent qui ne sont pas $\mathcal{C}^\infty$, et cela indépendamment de N : ceci résulte du théorème 16.

4.2 L'équation des applications de Schrödinger ("*Schrödinger maps*")

4.2.1 Présentation de l'équation

Nous avons considéré dans la partie 4.1 une formulation extrinsèque des applications harmoniques et des applications d'onde, c'est à dire faisant appel à une injection de N dans l'espace euclidien. Pour les applications de Schrödinger, il est plus simple d'adopter une formulation intrinsèque.

Comme plus haut, la variété cible est une variété riemannienne, dont la connexion de Levi-Civita est notée ∇. Nous supposons de plus que N est équipée d'une structure quasi-complexe, c'est à dire pour tout x d'une application linéaire J_x opérant sur T_xN, et telle que $J_x^2 = -Id$. Etant donnée une application u, on note aussi ∇ pour le pull-back de ∇ par u.

On dit alors que $u(t, x)$, application de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans N est une application de Schrödinger avec donnée de Cauchy u_0 si

$$(AS) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - J \sum_{k=1}^d \nabla_k \partial_k u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{array} \right. ,$$

(Dans le cas où N est la sphère $\mathcal{S}^2$, munie de la structure quasi-complexe naturelle, cette équation s'écrit simplement $\partial_t u = u \times \Delta u$.)

Les solutions de cette équation sont invariantes par le scaling

$$(\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) \longrightarrow u_0(\lambda x) \quad \text{et} \quad u(x, t) \longrightarrow u(\lambda x, \lambda t)$$

et, au moins formellement, leurs normes $\dot{H}^1$ et L^2 sont conservées.

4.2.2 Réduction équivariante

Nous nous limitons au cas $d = 2$, et supposons alors qu'on peut prendre sur N des coordonnées $(\phi\,,\,\chi) \in [0, \phi^*) \times \mathbb{S}^1$ dans lesquelles la métrique s'écrit

$$ds^2 = d\phi^2 + g(\phi)^2 d\chi^2$$

et la structure quasi-complexe est donnée par

$$J\partial_\phi = \frac{1}{g(\phi)}\partial_\chi \quad \text{et} \quad J\partial_\chi = -g(\phi)d\chi \ .$$

L'opérateur de rotation R opérant sur N est défini de manière naturelle par

$$R(\alpha)(\phi, \chi) = (\phi, \chi + \alpha) \ .$$

On dit alors que u est k-équivariante s'il existe une fonction W à valeurs dans N telle que (en utilisant les coordonnées polaires (r, ω) pour l'espace euclidien source)

$$u(r, \omega) = R(k\omega)W(r) \ .$$

Dans ce cadre équivariant, (AS) devient

$$(ASE) \qquad \partial_t W = J\left(\nabla_r \partial_r W + \frac{1}{r}\partial_r W - \frac{k^2 g(W) g'(W)}{r^2}\partial_\phi\right) \ .$$

4.2.3 Résultats connus

La théorie de (AS) est bien moins développée que celle de (AO), on dispose néammoins des résultats suivants : le caractère bien posé de (AS) pour des données régulières remonte à Kenig, Ponce et Vega [74] ; pour des données dans un espace au scaling de l'équation, $\dot{B}^{3/2}_{2,1}$ pour $d = 3$ et $\dot{H}^{d/2}$ pour $d \geq 4$, elle est due à Ionescu et Kenig [64] [65], Bejenaru, Ionescu et Kenig [18], Bejenaru [19].

En dimension 2, l'existence globale pour des données d'énergie finie petites a été prouvée, avec l'hypothèse d'équivariance, par Chang, Shatah et Uhlenbeck [25].

4.2.4 Formation de singularité par une solution auto-similaire

Le théorème suivant garantit l'existence de profils auto-similaires réguliers.

Théorème 21 (Germain, Shatah, Zeng [9]) *Pour tout k, il existe une famille de solutions auto-similaires de la forme*

$$u = R(k\chi)W\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \ ,$$

où W est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette famille est indexée par $A \in \mathbb{R}$ tel que si $r \to 0$

$$\phi(W(r)) \sim Ar^k \ .$$

De plus le comportement asymptotique de W pour $r \to \infty$ est le suivant : il existe ϕ_0, χ_0, γ_0 tels que

$$\phi(W(r)) \to \phi_0 \quad , \quad \chi(W(r)) \to \chi_0 \quad \textit{et} \quad W_r \sim \frac{g(\phi_0)}{r}\cos\left(\gamma_0 - \frac{r^2}{4}\right)\partial_\phi - \frac{1}{r}\sin\left(\gamma_0 - \frac{r^2}{4}\right)\partial_\chi \ .$$

Ce théorème prouve donc que le flot de (AS) peut former des singularités à partir de données régulières. Malheureusement, au vu du comportement asymptotique de W, l'exemple que nous venons de donner correspond à des données d'énergie infinie. Une question reste donc ouverte : en partant de données d'énergie finie, des singularités peuvent-elles apparaître ?

4.3 Perspectives

4.3.1 Existence de profils auto-similaires réguliers

Le théorème 18 donne un critère pour l'existence de profils auto-similaires réguliers pour l'équation des applications d'onde. Ce résultat semble fondamental pour la compréhension du comportement dynamique de (AO), il serait donc très intéressant de pouvoir l'étendre.

- Tout d'abord, il convient de s'interroger sur l'extension en dimension supérieure à 4. L'argument utilisé pour prouver le théorème 18 n'est plus valable, mais peut-on trouver une nouvelle approche ? Ou ce résultat est-il limité par essence à la dimension 3 ?
- Une autre question intéressante est l'existence de tels théorèmes pour d'autres flots géométriques : on pense par exemple aux applications de Schrödinger décrites plus haut, ou au flot de la chaleur pour les applications harmoniques ("*harmonic map heat flow*").
- Enfin, il est naturel de se demander dans quelle mesure la non-existence de profils auto-similaires interdit l'existence d'explosions "presque" auto-similaires, c'est à dire proche en un sens à préciser d'un comportement auto-similaire.

4.3.2 Unicité des solutions faibles

Nous avons vu dans le chapitre 1, que des solutions faibles (globales, d'énergie finie) peuvent être construites pour des équations de type Navier-Stokes. Néammoins, la question de l'unicité et de la régularité de ces solutions semble extrêmement difficile.

Au contraire, les équations d'évolution de type flot géométrique fournissent de manière relativement aisée des exemples de non-unicité pour des solutions faibles : on pense bien sûr au théorème 19, pour les applications d'onde, mais aussi au résultat de Coron [36] pour le flot de la chaleur pour les applications harmoniques.

Ainsi, les équations d'évolution de type géométrique donnent des exemples de phénomènes très intéressants, et qu'on ne sait (ou peut ?) pas observer pour les équations de la mécanique des fluides. De plus, ces problèmes d'unicité des solutions faibles peuvent être comme on l'a vu plus haut reliées à la dynamique des équations considérées.

Tout ceci indique qu'il est sans doute intéressant d'examiner plus avant (pour d'autres équations, d'autres configurations) ces questions d'unicité des solutions faibles pour les équations d'évolution de type géométrique.

Chapitre 5

Interaction champ-particule

5.1 Modèles d'interaction champ particule

Les équations qui sont l'objet de ce chapitre décrivent l'interaction entre un champ, défini dans l'espace entier, et une particule rigide : nous nous attacherons plus particulièrement au cas où un champ électromagnétique régi par les équations de Maxwell interagit avec une particule chargée, dont le mouvement est gouverné par la force de Lorentz.

5.1.1 Equations de Lorentz-Maxwell

Sans plus attendre, le problème de Cauchy pour les équations de Lorentz-Maxwell s'écrit

$$\begin{aligned}
& m\left(\frac{\dot q(t)}{\sqrt{1-\dot q(t)^2}}\right)^{\cdot} = eE^\rho(q(t)) + e\dot q(t)\times B^\rho(q(t)) \\
& \dot E(x,t) = \operatorname{rot} B(x,t) - e\rho(x-q(t))\dot q(t) \\
& \dot B(x,t) = -\operatorname{rot} E(x,t) \\
& \operatorname{div} B(x,t) = 0 \\
& \operatorname{div} E(x,t) = e\rho(x-q(t)) \\
& (q,\dot q,E,B)_{|t=0} = (q_0,\dot q_0,E_0,B_0)\ .
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

On considère ce système dans l'espace tridimensionel : les variables (t,x) appartiennent à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. La particule est caractérisée par sa position q et sa vitesse $\dot q$; sa masse est m et sa charge totale e ; sa distribution de charge est donnée par ρ, qu'on suppose tel que

$$\rho\in\mathcal{C}_0^\infty \quad , \quad \rho\geq 0 \quad , \quad \rho=\rho(|x|) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3}\rho = 1\ .$$

On note, pour une fonction ou un vecteur f,

$$f^\rho = f*\rho\ .$$

Le champ électromagnétique est décrit par sa composante électrique E et sa composante magnétique B.

La première ligne de (5.1.1) est l'équation de Lorentz incluant la relativité restreinte ; les lignes 2 à 6 correspondent aux équations de Maxwell (toutes les constantes physiques, y compris la vitesse de la lumière, sont prises égales à 1). Ainsi, le système est invariant au sens de la relativité restreinte... à ceci près que la forme de la particule est fixe. Ce modèle a été introduit par Abraham [13] en 1901.

5.1.2 Propriétés élémentaires

L'énergie

$$\mathcal{E}(\dot{q}, E, B) \stackrel{def}{=} \frac{m}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(E^2 + B^2)$$

d'une solution de (5.1.1) est conservée par le flot de ce système. Cette propriété permet de construire facilement des solutions globales en temps pourvu que les données initiales soient d'énergie finie. Par contre, le comportement asymptotique d'une solution n'est a priori pas clair.

D'autre part, le scaling propre au système (5.1.1) (que nous n'écrivons pas ici) laisse l'énergie invariante. Ce système est donc critique.

5.1.3 A mi-chemin entre EDP et EDO

Il est intéressant d'examiner précisément la structure des interactions non-linéaires dans (5.1.1), car il apparaît alors que le champ n'interagit jamais directement avec lui même. On n'a pas d'équation du type

$$\text{équation linéaire portant sur le champ} = \text{nonlinéarité fonction du champ}\ ,$$

mais la particule joue toujours un rôle de médiateur. Ainsi, un système de dimension finie sert de tampon pour l'interaction d'un système de dimension infinie avec lui-même.

En ce sens, le système (5.1.1) est à mi-chemin entre une EDP et une EDO. Nous allons voir que son comportement dynamique présente des similarités avec des équations de champ dispersives non-linéaires standard. L'analyse globale de ces équations est très complexe et beaucoup de questions restent ouvertes ; au contraire, nous allons pouvoir relativement aisément caractériser le comportement asymptotique de (5.1.1), c'est sans doute une conséquence de l'aspect de dimension finie de l'interaction.

5.1.4 Autres modèles

D'autres modèles d'interaction champ-particule ont été considérés dans la littérature. Il est ainsi physiquement plus réaliste d'autoriser la particule à avoir un mouvement de rotation sur elle-même, cette possibilité est envisagée dans [83]. On peut remplacer l'équation de Maxwell satisfaite par le champ par une équation d'onde scalaire (Komech et Spohn [82]), une équation de Schrödinger (Komech et Kopylova [81]), ou une équation de Klein-Gordon (Imaikin, Komech et Vainberg [63]). Le comportement qualitatif de ces systèmes reste à peu près inchangé.

Une modification plus conséquente consiste à considérer l'équation de Lorentz classique (non relativiste). Cette possibilité est étudiée dans Bambusi et Galgani [17], mais il y a alors pour les grandes vitesses un hiatus entre cette équation classique, et l'équation de Maxwell, intrinsèquement relativiste. Enfin, le modèle de Lorentz consiste à imposer que la forme de la particule est invariante au sens de la relativité restreinte. Peu de résultats mathématiques semblent connus sur cette question, voir néammoins Spohn [116].

5.2 Comportement asymptotique

5.2.1 Les solitons

Certaines solutions de (5.1.1) se déplacent à vitesse constante sans se déformer : on les appelle solitons. Ces solitons sont de la forme

$$q = vt \quad , \quad E = eE_v(x - vt) \quad \text{et} \quad B = eB_v(x - vt) \ ,$$

où $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| < 1$, et E_v, B_v sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. La conjecture générale pour les équations dispersives non-linéaires est qu'elles se comportent en temps grand comme une superposition de solitons et d'une partie radiative. On peut attendre la même chose des solutions de (5.1.1) ; à ceci près que le nombre de solitons doit être exactement un, puisqu'il y a exactement une particule disponible. La conjecture naturelle est donc qu'une solution (q, E, B) de (5.1.1) vérifie

$$\text{si } t \to \infty, \quad \begin{cases} \dot{q}(t) \to v_\infty \\ E(t) - E_{\dot{q}(t)}(\cdot - q(t)) - E_L(t) \to 0 \\ B(t) - B_{\dot{q}(t)}(\cdot - q(t)) - B_L(t) \to 0 \ , \end{cases} \tag{5.2.2}$$

où $v_\infty \in \mathbb{R}^3$, $|v_\infty| < 1$ et $(E_L \, , \, B_L)$ est une solution libre des équations de Maxwell, c'est à dire que

$$\begin{cases} \dot{E}_L = \operatorname{rot} B_L \\ \dot{B}_L = -\operatorname{rot} E_L \\ \operatorname{div} B_L = 0 \\ \operatorname{div} E_L = 0 \ . \end{cases}$$

5.2.2 Résultats connus

Tout d'abord, la stabilité orbitale des solitons est toujours vraie, voir à ce sujet Imaikin, Komech et Mauser [61], mais la validité de (5.2.2) est plus ardue à établir et n'est pas connue sous des hypothèses générales aujourd'hui.

Sous la condition de Wiener que

$$\forall \xi \ \ , \ \ \widehat{\rho}(\xi) \neq 0 \ ,$$

et avec une hypothèse de décroissance de E_0 et B_0 à l'infini, Komech et Spohn [82] ont prouvé que (5.2.2) est vraie. Ces auteurs tirent parti, suivant une idée introduite par Komech et Spohn [82], d'un fait physique bien connu : une particule qui accélère irradie de l'énergie à l'infini. Comme la quantité d'énergie disponible est limitée, on obtient une borne sur $\ddot{q}$, qui permet de contrôler l'équation.

5.2.3 Résultats obtenus

Le théorème suivant enlève toute restriction sur les données initiales, autres que la finitude de l'énergie, qui est très naturelle dans ce problème. Il s'agit en fait du premier résultat qui établit (5.2.2) pour des données initiales d'énergie finie générales ; il s'agit aussi du premier résultat qui montre une convergence globale (et non sur tout compact) des champs dans (5.2.2).

THÉORÈME 22 ([7]) *Si $\frac{e^2}{m}$ est assez petit, et que les données initiales sont d'énergie finie, (5.2.2) est vraie. Plus précisément, les champs dans (5.2.2) convergent au sens de L^2.*

L'idée de la preuve de ce théorème est d'abord d'observer que la particule se déplace à une vitesse maximale plus petite que 1. Fixons la trajectoire d'une particule, et un champ d'énergie finie se propageant à vitesse 1. On observe que l'intégrale de l'accélération qu'un tel champ communiquerait à une telle particule converge.

Afin d'exploiter cette observation, il convient d'effectuer un changement d'inconnues ; les nouvelles inconnues correspondent essentiellement à la distance entre la solution, et l'ensemble des solitons. On montre que cette distance tend vers 0.

5.3 Perspectives

5.3.1 Un modèle pour les systèmes dispersifs ?

Les équations de Lorentz-Maxwell constituent un système hamiltonien non-linéaire de dimension infinie ; néammoins, la non-linéarité est, nous l'avons vu, d'une certaine manière de dimension finie.

Ceci explique que l'étude des équations de Lorentz-Maxwell soit assez aisée, bien que l'on observe déjà pour ces équations des comportements typiques de systèmes dispersifs non linéaires.

Ainsi, une conjecture générale pour les équations aux dérivées partielles dispersives est la suivante : le comportement asymptotique d'une solution est donné par la superposition de solitons et d'une solution libre. On ne sait pas à l'heure actuelle prouver cette conjecture, si ce n'est pour des cas particuliers. Or, le théorème 22 peut être vu comme la preuve de la conjecture pour le système (5.1.1).

On peut donc espérer que les équations d'interaction champ-particule fournissent des modèles simples reproduisant des phénomènes caractéristiques des équations de champ dispersives.

5.3.2 Dérivation de l'équation de Vlasov-Maxwell

L'équation de Vlasov-Maxwell est une équation cinétique décrivant le mouvement de particules chargées ; elle est fondamentale en physique des plasmas et conduit, en intégrant la vitesse v, à l'équation d'Euler-Maxwell.

Formellement, on peut obtenir cette équation en considérant un système de N particules chargées interagissant via le champ électromagnétique, et en laissant N tendre vers l'infini.

Mais à l'heure actuelle, il n'existe pas de preuve rigoureuse de cette dérivation, voir Elskens, Kiessling et Ricci [44] pour un résultat partiel dans cette direction. La difficulté par rapport à d'autres limites cinétiques $N \to \infty$ réside dans le fait qu'on ne peut considérer des particules ponctuelles. En effet, si $\rho = \delta$, le système (5.1.1) n'est pas bien défini, puisque le champ électromagnétique présente une singularité à l'endroit où la particule est localisée. On est donc conduit à considérer des particules de diamètre fini, et à laisser ce diamètre converger vers zéro si $N \to \infty$. Cette procédure est cependant délicate, puisque plus les particules sont localisées, plus le système est singulier.

On peut espérer que le théorème 22 conduise à une preuve rigoureuse de cette dérivation.

Chapitre 6

Rappels d'analyse harmonique et résultat sur les (para-)multiplicateurs

Les parties 6.1 et 6.2 de ce chapitre sont consacrées au rappel de notions classiques d'analyse harmonique ou fonctionnelle ; dans la troisième partie 6.3, des résultats originaux concernant les espaces de multiplicateurs et paramultiplicateurs sont présentés.

Dans ce qui suit, la transformée de Fourier de f est notée

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x) e^{-ix\xi} dx \ .$$

De plus, si ϕ est une fonction, le multiplicateur de Fourier $\phi(D)$ est donné par

$$\left(\phi(D) f\right)^{\wedge}(\xi) = \phi(\xi) \widehat{f}(\xi) \ .$$

6.1 Espaces fonctionnels

Nous introduisons dans cette partie certains espaces fonctionnels ; ils trouvent leur application dans l'analyse d'équations aux dérivées partielles effectuée dans les autres chapitres.

6.1.1 Espace de Lebesgue

Les espaces de Lebesgue L^p sont donnés par la norme

$$\|f\|_p \overset{def}{=} \left(\int |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \ .$$

Les espaces de Lebesgue faibles $L^{p,\infty}$ sont donnés par la norme

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \overset{def}{=} \sup_{\alpha > 0} \alpha \left| \{ |f| > \alpha \} \right|^{1/p} \ .$$

6.1.2 Espace des fonctions à oscillation moyenne bornée : BMO

Dans de nombreux problèmes d'analyse harmonique, des propriétés sont fausses pour L^∞ mais deviennent vraies à condition de considérer l'espace (légèrement plus grand) BMO. Il est defini par la norme

$$\|f\|_{BMO} \stackrel{def}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\,,\,R>0} m\left(|f-m(f,x,R)|\,,\,x\,,\,R\right)$$

où $m(f,x,R)$ est la moyenne de f sur la boule de centre x et de rayon R :

$$m(f,x,R) \stackrel{def}{=} \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} f(y)\,dy\ .$$

6.1.3 Espaces de Sobolev

Nous nous restreignons aux espaces de Sobolev homogènes de base L^2. Ils sont donnés par la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \||D|^s f\|_2\ .$$

6.1.4 Espaces de Morrey

Si $1 < p \leq q \leq \infty$, l'espace de Morrey $M^{p,q}$ est donné par la norme

$$\|f\|_{M^{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\,,\,R>0} R^{d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{L^p(B(x,R))}\ .$$

Il est à noter que $M^{p,p} = L^p$ et en ce sens les espaces de Morrey généralisent les espaces de Lebesgue.

6.2 Théorie de Littlewood-Paley

6.2.1 Multiplicateurs de Fourier dyadiques

L'idée de base de la théorie de Littlewood-Paley est d'écrire une fonction donnée f comme somme de fonctions élémentaires f_n telles que chaque f_n soit localisée en fréquence sur un anneau dyadique de taille $\sim 2^n$.

Pour mettre en œuvre cette idée, considérons une fonction ψ, supportée dans la couronne $\mathcal{C}(0,3/4,8/3)$ et telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{pour } \xi \neq 0\ .$$

On définit alors les multiplicateurs de Fourier

$$\Delta_j = \psi\left(\frac{D}{2^j}\right) \quad \text{et} \quad S_j = Id - \sum_{k>j}\Delta_k\ .$$

Ceci donne une partition de l'unité homogène

$$Id = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j$$

(valide au moins modulo les polynômes) et une partition de l'unité inhomogène

$$Id = S_0 + \sum_{j\geq 0} \Delta_j \ .$$

6.2.2 Espaces de Besov

Si $(s,q) \in \mathbb{R}\times[1,\infty]$ et E est un espace de Banach, l'espace de Besov $\dot{B}^s_{E,q}$ est donné par la norme

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{E,q}} \stackrel{def}{=} \left\|2^{js}\,\|\Delta_j f\|_E\right\|_{\ell^q_j} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\,\|\Delta_j f\|_E^q\right)^{1/q}$$

(avec la modification usuelle au cas où l'indice q est infini).

Si E est l'espace de Lebesgue L^p, avec $1\leq p\leq\infty$, on note simplement $\dot{B}^s_{p,q}$ pour $\dot{B}^s_{E,q}$. Ainsi

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \stackrel{def}{=} \left\|2^{js}\,\|\Delta_j f\|_{L^p_x}\right\|_{\ell^q_j} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\,\|\Delta_j f\|_{L^p}^q\right)^{1/q} .$$

6.2.3 Paraproduit

On doit à Bony [20] la décomposition suivante du produit entre deux fonctions f et ϕ

$$\begin{aligned} f\phi &= \sum_j \Delta_j f S_{j-1}\phi + \sum_j S_{j-1} f \Delta_j\phi + \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_j f \Delta_k \phi \\ &\stackrel{def}{=} \quad \Pi(f,\phi) \quad + \quad \widetilde{\Pi}(f,\phi) \quad + \quad R(f,\phi) \ . \end{aligned}$$

Les termes $\Pi(f,\phi)$ et $\widetilde{\Pi}(f,\phi)$ sont appelés paraproduits ; le terme $R(f,\phi)$ reste.

6.3 Multiplicateurs et paramultiplicateurs

Une question naturelle et aux applications diverses en analyse harmonique est de comprendre quand l'opérateur de multiplication par une fonction f

$$M_f \ : \ \phi \ \mapsto \ f\phi$$

est borné d'un espace de Sobolev $\dot{H}^s$ dans un autre espace de Sobolev $\dot{H}^t$. Notre motivation pour étudier ce problème vient de la question de l'unicité fort-faible pour Navier-Stokes : voir partie 2.1.6.

On appelle espace des multiplicateurs de $\dot{H}^s$ dans $\dot{H}^t$ l'espace $M(\dot{H}^s\,,\,\dot{H}^t)$ donné par la norme

$$\|f\|_{M(\dot{H}^s\,,\,\dot{H}^t)} \stackrel{def}{=} \|M_f\|_{\dot{H}^s\to\dot{H}^t} \ .$$

Pour étudier plus finement cet espace, on peut utiliser la décomposition de Bony décrite dans la partie 6.2.3

$$M_f\phi = f\phi = \Pi(f,\phi) + \widetilde{\Pi}(f,\phi) + R(f,\phi) \ .$$

Il est alors naturel d'introduire les espaces de paramultiplicateurs

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\Pi(\dot H^s\,,\,\dot H^t)} &\stackrel{def}{=} \|\Pi(f,\cdot)\|_{\dot H^s\to\dot H^t}\\
\|f\|_{\widetilde\Pi(\dot H^s\,,\,\dot H^t)} &\stackrel{def}{=} \|\widetilde\Pi(f,\cdot)\|_{\dot H^s\to\dot H^t}\\
\|f\|_{\widetilde R(\dot H^s\,,\,\dot H^t)} &\stackrel{def}{=} \|R(f,\cdot)\|_{\dot H^s\to\dot H^t}\ .
\end{aligned}
$$

Enfin, remarquant que $\Pi(L^2\,,\,L^2)$ n'est autre que BMO, on peut, suivant Youssfi [128] [129], définir

$$BMO^s \stackrel{def}{=} \Pi(\dot H^s\,,\,\dot H^s)\ .$$

Le théorème suivant montre que tous les espaces de multiplicateurs ou paramultiplicateurs peuvent être construits à partir des BMO^s par intégration ou dérivation fractionnaire. Quant aux espaces BMO^s eux-mêmes, en dépit de leur rôle important, ils semblent difficiles à appréhender ; on pourra pour plus d'informations se reporter aux articles de Youssfi cités plus haut.

THÉORÈME 23 ([2]) *Les espaces de paramultiplicateurs et de multiplicateurs sont décrits dans le tableau suivant*

Espace considéré	$\alpha>0$	$\alpha=0$	$\alpha<0$
$\Pi(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})$	$\lvert D\rvert^{-\alpha}BMO^s$	BMO^s	$\lvert D\rvert^{-\alpha}BMO^s$
$R(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})$	$\lvert D\rvert^{-\alpha}BMO^{-s-\alpha}$	BMO^{-s}	$\lvert D\rvert^{-\alpha}BMO^{-s-\alpha}$
$\widetilde\Pi(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})$		L^∞	$\dot B^{\alpha}_{\infty,\infty}$
$M(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})$	$\{0\}$	$L^\infty\cap BMO^{\lvert s\rvert}$	*Si* $s\neq-\alpha/2$, $\lvert D\rvert^{-\alpha}BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$

La description des espaces de multiplicateurs et de paramultiplicateurs donnée par ce théorème est essentiellement nouvelle. Gala et Lemarié-Rieusset [47] ont obtenu de manière indépendante un résultat proche : ils décrivent les espaces $\Pi(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})$ pour $\alpha>0$.

Notons enfin que l'espace $M(\dot H^s,\dot H^{-s})$ (donc $\alpha=-2s$) n'est caractérisé que dans le cas $s=1$ ou $1/2$: Maz'ya et Verbitsky [93] ont prouvé qu'il est alors égal à $|D|^{2s}BMO^s$. On peut conjecturer que cette égalité demeure vraie pour $s\in\left]-\frac{d}{2}\,,\,\frac{d}{2}\right[$.

Chapitre 7

Bibliographie

[1] *Equations de Navier-Stokes en deux dimensions : existence et comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie*, Bull. Sci. Math. **130** (2006), no.2, 123–151.

[2] *Multipliers, Paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations 226 (2006), no. 2, 373–428

[3] *Global infinite energy solutions of the critical semilinear wave equation*, accepté par la Revista Matematica Iberoamericana

[4] *Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations evolving from small data in BMO^{-1}*, avec Nataša Pavlovic et Gigliola Staffilani, accepté par Internat. Math. Res. Notices

[5] *Strong solutions and weak-strong uniqueness for the nonhomogeneous Navier-Stokes equation*, accepté par le Journal d'Analyse Mathématique.

[6] *Besov spaces and self-similar solutions for the wave-map equation*, accepté par Communications in Partial Differential Equations.

[7] *Finite energy scattering for the Lorentz-Maxwell equation*, accepté par les Annales de l'Institut Henri Poincaré.

[8] *The second iterate for the Navier-Stokes equation*, accepté par le Journal of Functional Analysis

Articles soumis

[9] *Self-similar solutions for the Schrödinger map equation*, avec Jalal Shatah et Chongchun Zeng.

[10] *Weak-strong uniqueness for the isentropic compressible Navier-Stokes system*

[11] *On the existence of smooth self-similar blow up profiles for the wave map equation*

[12] *Global solutions for 3D quadratic Schrdinger equations*, avec Nader Masmoudi et Jalal Shatah.

Autres références

[13] Abraham, M., *Prinzipien der Dynamik des Elektrons*, Ann. Physik **10** (1903) 105–179

[14] Auscher, Pascal ; Dubois, Sandrine ; Tchamitchian, Patrick, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space.* J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 6, 673–697.

[15] Bahouri, Hajer ; Chemin, Jean-Yves, *Global solutions of a nonlinear cubic wave equation*, Internat. Math. Res. Notices **2006**

[16] Baldes, Alfred, *Stability and uniqueness properties of the equator map from a ball into an ellipsoid.* Math. Z. **185** (1984), no. 4, 505?516

[17] Bambusi, D ; Galgani L., *Some rigorous results on the Pauli-Fierz model of classical electrodynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **58** (1993), no. 2, 155–171

[18] Bejenaru, Ioan ; Ionescu, Alexandru ; Kenig, Carlos, *Global existence and uniqueness of Schrdinger maps in dimensions* $d \geq 4$. Adv. Math. **215** (2007), no. 1, 263–291.

[19] Bejenaru, Ioan, *Global results for Schrdinger maps in dimensions* $n \geq 3$. Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), no. 1-3, 451–477

[20] Bony, Jean-Michel, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure **14**, 209-246 (1981)

[21] Bourgain, Jean ; Pavlović, Nataša, *Ill-posedness of the Navier-Stokes equation in a critical space in 3D*, preprint

[22] Cannone, Marco, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes.* With a preface by Yves Meyer. Diderot Editeur, Paris, 1995.

[23] Cannone, Marco ; Meyer, Yves ; Planchon, Fabrice, *Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes*, Séminaire EDP Ecole polytechnique 1993-1994, Exposé VIII

[24] Cazenave, Thierry ; Shatah, Jalal ; Tahvildar-Zadeh, Shadi, *Harmonic maps of the hyperbolic space and development of singularities in wave maps and Yang-Mills fields* Ann. Inst. H. Poincar Phys. Thor. **68** (1998), no. 3, 315?349

[25] Chang, Nai-Heng ; Shatah, Jalal ; Uhlenbeck, Karen, *Schrdinger maps.* Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 5, 590–602.

[26] Chemin, Jean-Yves, *Le système de Navier-Stokes incompressible soixante-dix ans après Jean Leray*, Actes des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray 99–123, Sémin. Congr. **9**, Soc. Math. France, Paris (2004)

[27] Chemin, Jean-Yves; Gallagher, Isabelle, *On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data.* Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 4, 679–698

[28] Chemin, Jean-Yves; Gallagher, Isabelle, *Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^3$. arXiv:math/0611044

[29] Chemin, Jean-Yves ; Gallagher, Isabelle ; Paicu, Marius, *On global solutions of* arXi/0508374

[30] Cho, Yonggeun ; Choe, Hi Jun ; Kim, Hyunseok, *Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids.* J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 2, 243–275

[31] Choe, Hi Jun, Kim, Hyunseok, *Strong solutions of the Navier-Stokes equations for nonhomogeneous incompressible fluids.* Communications in Partial Differential Equations **28** (2003), no. 5-6, 1183–1201

[32] Christodoulou, Demetrios, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data.* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 2, 267–282

[33] Christodoulou, Demetrios ; Klainerman, Sergiu, *The global nonlinear stability of the Minkowski space.* Princeton University Press, Princeton (1995)

[34] Cohn, S, *Global existence for the nonresonant Schrödinger equation in two space dimensions.* Canad. Appl. Math. Quart. **2** (1994), 247–282

[35] Coifman, Ronald R.; Meyer, Yves, *Au del des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque, **57**. Société Mathématique de France, Paris, 1978

[36] Coron, Jean-Michel, *Nonuniqueness for the heat flow of harmonic maps.* Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linaire **7** (1990), no. 4, 335–344.

[37] Dafermos, Mihalis, *The second law of thermodynamics and stability.* Arch. Rational Mech. Anal. **70** (1979), no. 2, 167–179

[38] Danchin, Raphaël, *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.* Invent. Math. **141** (2000), no. 3, 579?614.

[39] Danchin, Raphaël, *Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A **133** (2003), no. 6, 1311?1334

[40] Danchin Raphaël, *The inviscid limit for density-dependent incompressible fluids.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **15** (2006), no. 4, 637–688

[41] Delort, Jean-Marc, *Global solutions for small nonlinear long range perturbations of two dimensional Schrdinger equations.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 91 (2002)

[42] Desjardins, Benoît, *Regularity of weak solutions of the compressible isentropic Navier- Stokes equations.* Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), no. 5-6, 977?1008

[43] Dubois, Sandrine, *Uniqueness for some Leray-Hopf solutions to the Navier-Stokes equations.* J. Differential Equations **189** (2003), no. 1, 99–147

[44] Elskens Y. ; Kiessling M.K. ; Ricci V., *The Vlasov limit and its fluctuations for a system of particles which interact by means of a wave field.* preprint

[45] Feireisl, Eduard, *Dynamics of viscous compressible fluids.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **26**. Oxford University Press, Oxford, 2004

[46] Fujita, Hiroshi; Kato, Tosio, *On the Navier-Stokes initial value problem. I.* Arch. Rational Mech. Anal. **16** 1964 269–315

[47] Lemarié-Rieusset, Pierre-Gilles ; Gala, Sadek, *Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation.* J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), no. 2, 1030–1054.

[48] Gallagher, Isabelle, *Profile decomposition for solutions of the Navier-Stokes equations.* Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 2, 285–316.

[49] Gallagher, Isabelle ; Planchon, Fabrice, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations in two dimensions.* Arch. Ration. Mech. Anal. **161** (2002), no. 4, 307–337

[50] Gallagher, Isabelle ; Planchon, Fabrice, *On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation.* Rev. Math. Iberoam. **19** (2003), 161–177

[51] Gallay, Thierry ; Wayne, Eugene, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier- Stokes and Vorticity equations on* $\mathbb{R}^2$*.* Archive for Rational and Mechanical Analysis **163**, 209–258 (2002)

[52] Y. Giga et O. Sawada, *On regularizing-decay rate estimates for solutions to the Navier-Stokes initial value problem.* Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 1, 2, 549–562, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003

[53] Ginibre, Jean ; Hayashi, Nakao, *Almost global existence of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in three space dimensions*, Math. Z. **219** (1995), no. 1, 119–140

[54] Grillakis, Manoulos, *Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity*, Ann. Math. **132** (1990), 485–509

[55] Guo, Yan, *Smooth irrotational flows in the large to the Euler-Poisson system in* $\mathbb{R}^{3+1}$, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 249–265

[56] Hayashi, Nakao ; Miao ; Naumkin, Pavel, *Global existence of small solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation.* Asymptotic Analysis **21** (1999), 133–147

[57] Hayashi, Nakao ; Mizumachi ; Naumkin, Pavel *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrdinger equations in 3D.* Differential Integral Equations **16** (2003), no. 2, 159–179

[58] Hayashi, Nakao ; Naumkin, Pavel, *On the quadratic nonlinear Schrödinger equation in three space dimensions.* Internat. Math. Res. Notices **2000**, 115–132

[59] Hélein, Frédéric, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames.* Translated from the 1996 French original. With a foreword by James Eells. Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics, **150**. Cambridge University Press, Cambridge, 2002

[60] Hélein, Frédéric, *Regularity and uniqueness of harmonic maps into an ellipsoid.* Manuscripta Math. 60 (1988), no. 2, 235?-257

[61] Imaikin V. ; Komech A. ; Mauser N., *Soliton-type asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations.* Ann. Henri Poincaré **5** (2004), no. 6, 1117–1135

[62] Imaikin, V. ; Komech A. ; Spohn H, *Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit.* Monatsh. Math. **142** (2004), no. 1-2, 143–156

[63] Imaikin V. ; Komech A. ; Vainberg B, *On scattering of solitons for the Klein-Gordon equation coupled to a particle.* Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 158–187

[64] Ionescu, Alexandru ; Kenig, Carlos, *Low-regularity Schrdinger maps. II. Global well-posedness in dimensions* $d \geq 3$. Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 2, 523–559.

[65] Ionescu, Alexandru ; Kenig, Carlos, *Low-regularity Schrdinger maps.* Differential Integral Equations **19** (2006), no. 11, 1271–1300.

[66] Jäger, Willi ; Kaul, Helmut, *Rotationally symmetric harmonic maps from a ball into a sphere and the regularity problem for weak solutions of elliptic systems.* J. Reine Angew. Math. **343** (1983), 146–161

[67] John, Fritz,*Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions.* Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981)

[68] Hoff, David, *Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations of multidimensional, compressible flow.* SIAM J. Math. Anal. **37** (2006), no. 6, 1742–1760

[69] C. Kahane, *On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **33** (1969), 386–405

[70] Kato, Tosio, *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in R^m, with applications to weak solutions.* Math. Z. **187** (1984), no. 4, 471–480

[71] Kawahara, Y., *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D.* Differential Integral Equations **18** (2005), no. 2, 169–194

[72] Kenig, Carlos ; Merle, Frank, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case.* Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675

[73] Kenig, Carlos E. ; Merle, Frank, *On the energy critical focusing non-linear wave equation.* Séminaire: quations aux Dérivées Partielles. 2006–2007, Exp. No. V, 14 pp., Sémin. qu. Dériv. Partielles, cole Polytech., Palaiseau, 2007

[74] Kenig, Carlos ; Ponce, ; Vega, Luis, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linéaire **10** (1993), no. 3, 255?288

[75] Kenig, Carlos ; Ponce, ; Vega, Luis, *Global well-posedness for semi-linear wave equations.* Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), 1741–1752

[76] Klainerman, Sergiu, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations.* Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), 293–326, Lectures in Appl. Math., 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986

[77] Klainerman, Sergiu, *Global existence of small solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions.* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 5, 631–641

[78] Klainerman, Sergiu ; Ponce, Gustavo, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations.* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 1, 133–141

[79] Klainerman, Sergiu ; Selberg, Sigmund, *Bilinear estimates and applications to nonlinear wave equations.* Commun. Contemp. Math. **4** (2002), no. 2, 223–295

[80] Koch, Herbert ; Tataru, Daniel, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations.* Adv. Math. **157** (2001), no. 1, 22–35

[81] Komech, A ; Kopylova, E, *Scattering of solitons for the Schrödinger equation coupled to a particle.* Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 158–187

[82] Komech, A ; Spohn H, *Long-time asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations.* Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), no. 3-4, 559–584

[83] Komech, A ; Spohn, H, *Soliton-like asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field.* Nonlinear Anal. **33** (1998), no. 1, 13–24

[84] Krieger, Joachim ; Schlag, Wilhelm ; Tataru, Daniel, *Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps.* Invent. Math. **171** (2008), no. 3, 543–615

[85] Le Jan, Yves ; Sznitman, Alain, *Cascades aléatoires et équations de Navier-Stokes.* C.R. Acad. Sci. Paris **324** Série I (1997), 823–826.

[86] Lemarié-Rieusset, Pierre-Gilles, *Une remarque sur l'analyticité des solutions milds des équations de Navier-Stokes dans* $\mathbb{R}^3$. C. R. Acad. Sci. Paris **330** Série I (2000), 183–186.

[87] Lemarié-Rieusset, Pierre-Gilles, *Recent developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, **431**. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002

[88] Leray, Jean, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math. **63** (1934), no. 1, 193–248

[89] Lions, Pierre-Louis, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **3**. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996

[90] Lions, Pierre-Louis, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 10. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998

[91] Masuda, K., *On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier-Stokes equation.* Proc. Japan Acad. **43** (1967), 827–832.

[92] Matsumura, Akitaka ; Nishida, Takaaki, *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases.* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 1, 67–104

[93] Maz'ya, Vladimir ; Verbitsky, Igor, *The Schrödinger operator on the energy space: Boundedness and compactness criteria.* Acta Mathematica **188**, 263–302 (2002)

[94] Mellet, Antoine ; Vasseur, Alexis, *Existence and uniqueness of global strong solutions for one-dimensional compressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. **39** 1344–1365 (2007-2008)

[95] Meyer, Yves, *Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations.* International Press (2007)

[96] Montgomery-Smith, Stephen, *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 10, 3025–3029

[97] Muscalu, Camil, *Paraproducts with flag singularities. I. A case study.* Rev. Mat. Iberoam. **23** (2007), no. 2, 705–742

[98] Nakanishi, Kenji ; Ozawa, T, *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002), no. 1, 45–68

[99] Nash, John, *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général.* Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 487–497

[100] Planchon, Fabrice, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$*.* Revista Matematica Iberoamericana **14**, 71-93 (1998)

[101] Planchon, Fabrice, *Self-similar solutions and semi-linear wave equations in Besov spaces.* J. Math. Pur. Appl. IX, Série **79** (2000), 809–820

[102] Prodi, Giovanni, *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** 1959 173–182

[103] Rodnianski, Igor ; Schlag, Wilhelm, *Time decay for solutions of Schrdinger equations with rough and time-dependent potentials.* Invent. Math. **155** (2004), no. 3, 451–513

[104] Rodnianski, Igor ; Sterbenz, Jacob, *On the Formation of Singularities in the Critical* $O(3)$ *Sigma-Model*, arXiv:math/0605023

[105] Sawada, Okihiro, *On analyticity rate estimates of the solutions to the Navier-Stokes equations in Bessel-potential spaces.* J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), no. 1, 1–13

[106] Segal, I. E., *The Cauchy problem for a relativistic vector field with power interaction.*, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 129–135

[107] Serrin, James, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations.* in Nonlinear problems, University of Wisconsin Press (R. E. Langer editor), 69-98 (1963)

[108] Shatah, Jalal, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations.* J. Differential Equations **46** (1982), no. 3, 409–425

[109] Shatah, Jalal, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations.* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 5, 685–696

[110] Shatah, Jalal, *Weak solutions and development of singularities of the SU(2)* σ*-model.* Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 4, 459?469

[111] Shatah, Jalal ; Struwe, Michael, *Regularity results for nonlinear wave equations.*, Ann. Math. **138** (1993), 503–518

[112] Shatah, Jalal ; Struwe, Michael, *Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth.*, Internat. Math. Res. Notices **1994**, 303–309

[113] Shatah, Jalal ; Struwe, Michael, *The Cauchy problem for wave maps.* Int. Math. Res. Not. 2002, no. 11, 555–571.

[114] Shatah, Jalal ; Zeng, Chongchun, *A priori estimates for fluid interface problems.* Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), no. 6, 848–876

[115] Shatah, Jalal ; Zeng, Chongchun, *Schrdinger maps and anti-ferromagnetic chains.* Comm. Math. Phys. **262** (2006), no. 2, 299–315

[116] Spohn, H, *Dynamics of charged particles and their radiation field*, Cambridge University Press, Cambridge (2004)

[117] Stein, Elias, *Harmonic analysis*, Princeton University press

[118] Strauss, Walter, *Nonlinear Scattering at low energy.* J. Funct. Anal. **41** (1981), no. 1, 110–133

[119] Tataru, Daniel, *On global existence and scattering for the wave maps equation.* Amer. J. Math. **123** (2001), no. 1, 37–77

[120] Tao, Terence, *Local and global analysis of nonlinear dispersive and wave equations.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **106**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[121] Tao, Terence, *Global regularity of wave maps. I. Small critical Sobolev norm in high dimension.* Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 6, 299–328.

[122] Tao, Terence, *Global regularity of wave maps. II. Small energy in two dimensions.* Comm. Math. Phys. 224 (2001), no. 2, 443–544

[123] Tao, Terence, *Global regularity of wave maps III. Large energy from* $\mathbb{R}^{1+2}$ *to hyperbolic spaces.* arXiv:0805.4666

[124] Tao, Terence, *Global regularity of wave maps IV. Absence of stationary or self-similar solutions in the energy class.* arXiv:0806.3592

[125] Thiele, Christoph, *Wave packet analysis.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **105**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[126] Weissler, Fred, *The Navier-Stokes initial value problem in* L^p. Arch. Rational Mech. Anal. **74** (1980) 3 219–280.

[127] von Wahl, Wolf, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Aspects of Mathematics, E8. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985

[128] Youssfi, Abdellah, *Function spaces related to singular integral operators*, dans Function spaces, differential operators and nonlinear analysis, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1993

[129] Youssfi, Abdellah, *Duality of type H1 - BMO and bilinear operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **190**, 780-794 (1995)

Chapitre 8

Travaux présentés

Articles publiés ou acceptés pour publication

1. *Equations de Navier-Stokes en deux dimensions : existence et comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie*, Bull. Sci. Math. **130** (2006), no.2, 123–151.
2. *Multipliers, Paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations 226 (2006), no. 2, 373–428
3. *Global infinite energy solutions of the critical semilinear wave equation*, accepté par la Revista Matematica Iberoamericana
4. *Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations evolving from small data in BMO^{-1}*, avec Nataša Pavlovic et Gigliola Staffilani, accepté par Internat. Math. Res. Notices
5. *Strong solutions and weak-strong uniqueness for the nonhomogeneous Navier-Stokes equation*, accepté par le Journal d'Analyse Mathématique.
6. *Besov spaces and self-similar solutions for the wave-map equation*, accepté par Communications in Partial Differential Equations.
7. *Finite energy scattering for the Lorentz-Maxwell equation*, accepté par les Annales de l'Institut Henri Poincaré.
8. *The second iterate for the Navier-Stokes equation*, accepté par le Journal of Functional Analysis

Articles soumis

1. *Self-similar solutions for the Schrödinger map equation*, avec Jalal Shatah et Chongchun Zeng.
2. *Weak-strong uniqueness for the isentropic compressible Navier-Stokes system*
3. *On the existence of smooth self-similar blow up profiles for the wave map equation*
4. *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations*, avec Nader Masmoudi et Jalal Shatah.