Sík mezőben hármas út

Pach János[1]

A rajzolás az egyik legősibb emberi tevékenység. Elődeink még barlangfalra rajzolták ábráikat (”*gráfjaikat*”), ma inkább a számítógép képernyőjét használjuk erre a célra. Matematikai szempontból nincs különbség: mindkét felület ”sík mező”. A későbbiekben a ”hármas utak” szerepére is fény derül. De ne vágjunk a dolgok elébe!

1 Kereszteződések – a téglagyári probléma

Minden gráf *csúcsokból* és *élekből* áll. Egy G gráf csúcshalmaza egy tetszőleges véges $V(G)$ halmaz, élhalmaza pedig egy $V(G)$ rendezetlen páraiból álló $E(G)$ halmaz. G gráf *lerajzolásán* G egy olyan reprezentációját értjük, melyben minden csúcsot a sík egy pontja ábrázol, az éleket pedig olyan önmagukat nem metsző, folytonos görbeívek, melyek a megfelelő pontpárokat kötik össze. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az ilyen lerajzolásokban (a) egyetlen él sem halad át semelyik (végpontjaitól különböző) csúcson; (b) nincs két olyan él, melyek érintik egymást (vagyis, ha két élnek van közös belső pontja, akkor ebben a pontban keresztezik egymást); és (c) minden pontban legfeljebb két él keresztezi egymást. Ha egy G gráfban nincs páratlan hosszúságú kör, akkor azt mondjuk, hogy G *páros gráf*.

Minden gráf sokféleképpen rajzolható le. Ha egy G gráf lerajzolható úgy, hogy semelyik két éle se keresztezze egymást, akkor azt mondjuk, hogy G *síkgráf*. Fáry István [11] egy észrevétele szerint, ha egy gráf síkgráf, akkor úgy is lerajzolható, hogy éleit egyenes szakaszok reprezentálják.

Nem minden gráf síkgráf. Könnyű ellenőrizni például, hogy $n \geq 5$ esetén a K_n-nel jelölt úgynevezett *teljes gráf*, amely n csúcsból és az őket összekötő összes $\binom{n}{2}$ lehetséges élből áll, nem síkgráf. Szintén nem síkgráf semmilyen $n, m \geq 3$ esetén $K_{n,m}$, egy *teljes páros gráf*, melynek csúcshalmaza egy n-elemű és egy m-elemű részhalmazból áll, és az első részhalmaz összes pontjából él vezet a második részhalmaz összes pontjába. Ha egy G gráf

[1]MTA Matematikai Kutató Intézete, 1364 Budapest, Pf. 127. A kutatásokat az OTKA és a National Science Foundation támogatták. E-mail: pach@math-inst.hu

nem síkgráf, akkor nyilván nem síkgráf egyetlen olyan gráf sem, amely G-ből úgy keletkezik, hogy éleit közös belső pont nélküli utakkal helyettesítjük. Ugyancsak nem lehetnek síkgráfok azok a gráfok, melyeknek valamilyen részgráfja nem síkgráf. Kuratowski egy nevezetes tétele szerint ezzel fel is soroltuk az összes olyan gráfot, amely nem síkgráf. A következő szakaszban a síkgráfokat egészen másképpen jellemezzük majd (ld. 2.3 Tétel).

Ha egy gráf nem síkgráf, akkor – definíció szerint – nem rajzolható le kereszteződések nélkül. Turán Pál [38] vetette fel a kérdést: hogyan kell lerajzolni egy G gráfot, hogy a kereszteződések száma a lehető legkisebb legyen? Ezt a számot G *keresztezési számának* hívjuk, és $\textsc{cr}(G)$-vel jelöljük. Pontosabban szólva, Turán – máig megoldatlan – problémája úgy szól, hogy minden $n, m \geq 3$ számpárra határozzuk meg $\textsc{cr}(K_{n,m})$-et. Zarankiewicz egy (tételből sejtéssé visszavedlett [14]) állítása szerint

$$\textsc{cr}(K_{n,m}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor,$$

de még a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\textsc{cr}(K_{n,n})}{n^4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\textsc{cr}(K_n)}{n^4}$$

határértékeket sem ismerjük [34], [20].

Turán általában "téglagyári problémának" titulálta a fenti kérdést, amely akkor fogalmazódott meg benne, amikor munkaszolgálatosként téglával megrakott vasúti vagonokat tologatott társaival egy gyárudvaron az égetőkemencéktől a raktárépületekig. Visszaemlékezései szerint a legnagyobb gondot mindig a sínek kereszteződéseinél tapasztalt zökkenők okozták. De nem foglalkoztak volna $\textsc{cr}(G)$ becslésével annyian az elmúlt negyedszázad során, ha ez lett volna a kérdés egyetlen "gyakorlati alkalmazása". A hetvenes évek elején – jórészt Tom Leighton [22] munkássága nyomán – kiderült, hogy egy elektromos hálózat nyomtatott áramkörön vagy szilikonlapocskán való megépítésének bonyolultsága szoros kapcsolatban áll azzal, hogy mekkora a megfelelő gráf keresztezési száma. Ez nagy lendületet adott a témakör kutatásának.

2 Kötések – Conway sejtése

Egy gráf lerajzolását *kötésnek* nevezzük, ha bármely két nem egy csúcsból kiinduló éle pontosan egyszer keresztezi egymást, az egy csúcsból kiinduló élek pedig másutt nem találkoznak.

Könnyű ellenőrizni, hogy pl. egy 4-hosszúságú kör (C_4) nem rajzolható le kötésként, viszont minden más kör igen [41]. Ha egy G gráf nem rajzolható le kötésként, akkor az olyan gráfok sem, melyek G-t részgráfként tartalmazzák. Következésképp, semmilyen kötés nem tartalmazhat 4-hosszúságú kört, tehát – Erdős Pál egy régi, extremális gráfelméleti tétele értelmében – G-nek legfeljebb $n^{3/2}$ éle lehet, ahol n jelöli G csúcsainak számát. Ennél jóval erősebb a következő régi

Sejtés (J. Conway): *Minden kötésnek legfeljebb annyi éle van, ahány csúcsa.*

A kötések élszámára az első n-ben lineáris korlátot Lovásszal és Szegedyvel [23] közösen találtuk.

2.1 Tétel ([23]): *Minden kötésnek legfeljebb kétszer annyi éle van, ahány csúcsa.*

A kötés és a síkgráf bizonyos értelemben ellentétes fogalmak: az egyikben bármely két él metszi egymást, a másikban nincs metsző élpár. A következő tétel mutatja, hogy a két fogalom mégis milyen közel áll egymáshoz.

Egy gráf lerajzolását *páratlan kötésnek* nevezzük, ha bármely két éle páratlan sokszor metszi egymást. Ha két él ugyanabból a pontból indul ki, akkor itt ezt a pontot is a két él metszéspontjának tekintjük. Nyilvánvaló, hogy minden kötés páratlan kötés, de ennek fordítottja nem igaz. A 4-hosszúságú kör például kötésként nem rajzolható le, de páratlan kötésként igen.

2.2 Tétel ([23]): *Egy páros gráf akkor és csak akkor rajzolható le páratlan kötésként, ha síkgráf.*

Erdős egy régi észrevétele szerint minden gráfnak van olyan páros részgráfja, amely az élek legalább felét tartalmazza. Ugyanakkor közismert, hogy minden n-csúcsú páros síkgráfnak legfeljebb $2n-4$ éle lehet. Ezért a 2.2 Tételből azonnal következik az a – 2.1 Tételnél kicsit gyengébb – állítás, hogy egy n-csúcsú kötésnek maximum $2(2n-4) = 4n-8$ éle lehet ($n \geq 3$).

Egy gráf lerajzolásában *hármas útnak* nevezünk minden olyan ($P_1(u,v)$, $P_2(u,v)$, $P_3(u,v)$) úthármast, melynek tagjai ugyanazon (u,v) pontpárt összekötő, más közös csúccsal nem rendelkező utak (melyek a csúcsoktól különböző helyeken persze még metszhetik egymást). Egy ($P_1(u,v)$, $P_2(u,v)$, $P_3(u,v)$) hármas útról azt mondjuk, hogy *fordító*, ha P_1, P_2 és P_3 kezdő szakaszainak u körüli ciklikus sorrendje ellentétes ugyanezen utak végső szakaszainak v körüli ciklikus sorrendjével.

2.3 Tétel ([23]): *Egy G gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha lerajzolható úgy, hogy minden hármas útja fordító legyen.*

Az állítás egyik fele triviális: amennyiben G síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy élei ne keresztezzék egymást, és ebben a lerajzolásban i nyilvánvalóan minden hármas út fordító. i Az állítás másik fele Kuratowski az előző i szakaszban már említett tételének segítségével igazolható.

A 2.1 Tételben szereplő kettes faktort G. Cairns és Y. Nikolayevsky [7] nemrég másfélre javította.

3 Más keresztezési számok?

Amint azt a 2.3 Tétel is mutatja, a gráfok éleinek kereszteződéseivel kapcsolatos feladatoknál természetes módon merülnek fel párossági (paritási) kérdések. Ennek oka részben abban a banális tényben rejlik, hogy ha elindulunk egy egyszerű (önmagát nem metsző), zárt síkgörbe belsejéből, akkor aszerint találjuk magunkat a görbe belsejében vagy külsejében, hogy azt páros vagy páratlan sokszor metszettük.

A következőkben definiáljuk a keresztezési szám fogalmának három változatát.

(1) Egy G gráf *lineáris keresztezési száma*, $\textsc{lin-cr}(G)$ az a legkisebb szám, ahány kereszteződéssel G lerajzolható úgy, hogy minden éle egyenes szakasz.

(2) G *páronkénti keresztezési száma*, $\textsc{pair-cr}(G)$ az a legkisebb szám, ahány metsző élpár lehet G legjobb lerajzolásában. (Itt az éleket tetszőleges folytonos görbék reprezentálhatják, tehát két él többször metszheti egymást, de minden metsző élpár csak eggyel járul hozzá $\textsc{pair-cr}(G)$ értékéhez.)

(3) G *páratlan keresztezési száma*, $\textsc{odd-cr}(G)$ az a legkisebb szám, ahány olyan élpár lehet G legjobb lerajzolásában, melyek páratlan sokszor metszik egymást.

A definíciókból azonnal következik, hogy

$$\textsc{odd-cr}(G) \leq \textsc{pair-cr}(G) \leq \textsc{cr}(G) \leq \textsc{lin-cr}(G).$$

Bienstock-nak és Dean-nek [6] sikerült olyan gráfokat konstruálnia, melyek keresztezési száma 4, de lineáris keresztezési számuk tetszőlegesen nagy lehet. Az viszont lehetséges, hogy bármely G gráfra

$$\textsc{odd-cr}(G) = \textsc{pair-cr}(G) = \textsc{cr}(G).$$

Mivel a páratlan keresztezési szám meghatározása átfogalmazható egy tisztán kombinatorikus feladattá, a fenti három keresztezési szám egybeesése szikrányi reményt adna arra, hogy viszonylag hatékonyan megbecsülhető $\textsc{cr}(G)$ értéke. Hanani (alias Chojnacki) [8] és William Tutte [39] egy figyelemreméltó tétele szerint, ha egy G gráf lerajzolható úgy, hogy bármely két éle páros sokszor messe egymást, akkor G metszések nélkül is lerajzolható. Másszóval, ha $\textsc{odd-cr}(G) = 0$, akkor $\textsc{cr}(G) = 0$. Megjegyezzük, hogy Fáry – az első szakaszban már idézett – észrevétele szerint ekkor az is igaz, hogy $\textsc{lin-cr}(G) = 0$.

A probléma fő nehézsége abban rejlik, hogy egy gráf annyi lényegesen különböző módon rajzolható le, hogy még egy nagy teljesítményű számítógép számára is reménytelenül nehéz feladat egy kb. 15-csúcsú gráf bármelyik keresztezési számának meghatározása [10].

3.1 Tétel [12],[31]: *Egy gráf keresztezési számának, páronkénti keresztezési számának és páratlan keresztezési számának meghatározása egyaránt bonyolult, úgynevezett NP-teljes számítási feladat.*

Egyelőre csak annyit tudunk belátni, hogy a 3.1 Tételben szereplő keresztezési számok, $\textsc{cr}(G)$, $\textsc{pair-cr}(G)$ és $\textsc{odd-cr}(G)$ értékei nem teljesen függetlenek egymástól.

3.2 Tétel [31]: *Bármely G gráfra*

$$\textsc{cr}(G) \leq 2(\textsc{odd-cr}(G))^2.$$

Ez utóbbi állítás bizonyítása a Hanani–Tutte tétel következő élesítésén alapul:

3.3 Tétel [31]: *Egy tetszőlegesen lerajzolt gráfot mindig újra lehet rajzolni úgy, hogy azok az élei, melyeket eredetileg minden más él páros sokszor metszett, ne vegyenek részt semmilyen metszésben.*

[28]-ban az eredeti Hanani–Tutte tételt alkalmazzuk egy robotikában felvetődő kérdés megválaszolására [19].

4 Egyenesvonalú gráfok

Conway sejtését, melyet a második szakaszban részletesebben tárgyaltunk, H. Hopf és E. Pannwitz [15] ill. (tőlük függetlenül) Erdős Pál jóval a feladat kitűzése előtt igazolták "egyenesvonalú kötésekre".

Az oly módon lerajzolt gráfokat, hogy az éleket egyenes szakaszok reprezentálják, *geometriai gráfoknak* hívjuk [24], [25], [26]. Két geometriai gráfot csak akkor tekintünk izomorfnak (egyformának), ha a sík alkalmas mozgatásával fedésbe hozhatóak.

Hopf–Pannwitz–Erdős Tétel: *Ha egy geometriai gráf bármely két éle metszi egymást, akkor legfeljebb annyi éle lehet, ahány csúcsa.*

A geometriai gráfokra vonatkozó extremális feladatok szisztematikus vizsgálatát S. Avital–H. Hanani [4], Erdős, Micha Perles és Yaakov Kupitz [21] kezdeményezték. Tőlük származik egyebek között a következő feladat: legfeljebb hány éle lehet egy n-csúcsú geometriai gráfnak, ha nincs benne k darab páronként diszjunkt él? (Itt "diszjunkton" azt értjük, hogy sem közös végpontjuk, sem metszéspontjuk nem lehet.) Jelöljük ezt a maximumot $e_k(n)$-nel!

A fenti tétel úgy is fogalmazható, hogy minden $n > 2$ esetén $e_2(n) = n$. Noga Alon és Erdős [2] bebizonyították, hogy $e_3(n) \leq 6n$. Ezt a korlátot azóta a felére javították [13]. Hosszú ideig megválaszolatlan volt a kérdés, hogy $e_k(n)$ minden rögzített k-ra lineáris-e n-ben.

4.1 Tétel [32]: *Minden k-ra és n-re $e_k(n) \leq (k-1)^4 n$.*

Ezt a becslést előbb Tóth Géza és Pavel Valtr [37] javította meg, majd Tóth Géza igazolta, hogy $e_k(n) \leq 100k^2 n$. Igen valószínűnek látszik, hogy tulajdonképpen $e_k(n)$ k-tól való függése is lineáris.

A fentiekkel teljesen analóg módon felvethető, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú geometriai gráfnak, ha nincs benne k páronként kereszteződő él. Jelöljük ezt a számot $f_k(n)$-nel! Euler egy klasszikus formulájából azonnal adódik, hogy $n > 2$ esetén minden n-csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n-6$ éle lehet. Ez úgy is fogalmazható, hogy $f_2(n) = 3n-6$.

4.2 Tétel [1]: $f_3(n) = O(n)$.

4.3 Tétel [27]: *Minden rögzített $k > 3$ esetén $f_k(n) = O(n \log^{2k-6} n)$.*

Nemrég Valtr-nak [40] sikerült belátnia, hogy minden rögzített $k > 3$ esetén $f_k(n) = O(n \log n)$, de sejthetően $f_k(n) = O(n)$. Az sem kizárt, hogy van egy olyan c konstans, hogy minden k-ra és n-re $f_k(n) \leq ckn$, de egyelőre még azt sem tudjuk eldönteni, hogy vajon minden teljes n-csúcsú geometriai gráf tartalmaz-e legalább konstansszor n páronként metsző élt. A legerősebb ilyen irányú eredmény a következő:

4.4 Tétel [3] *Minden teljes n-csúcsú geometriai gráfban van legalább $\lfloor\sqrt{n/12}\rfloor$ páronként metsző él.*

Egy közelmúltban született cikksorozatunkban [16], [17], [18] geometriai gráfokra vonatkozó úgynevezett *Ramsey-típusú* tételeket bizonyítottunk, melyek szorosan kapcsolódnak e szakasz témájához, [9]-ben pedig a fenti eredményeket általánosítottuk *geometriai hipergráfokra* (szimplexrendszerekre).

5 Egy számítógépes grafikai alkalmazás

Nagy öröm egy matematikus számára, ha kutatásai némi érdeklődést váltanak ki szakterületének berkein kívül is. Még különlegesebb érzés, ha eredményeit más tudományokban – vagy nagy ritkán a gyakorlatban – hasznosítják.

Az elmúlt húsz évben a kombinatorikus geométereknek viszonylag gyakran lehetett részük ebben a felemelő élményben. A gyártási feladatok automatizálása a *robotika* forradalmához vezetett, ami olyan matematikai kérdések tömkelegét hozta felszínre, melyek megoldása új kombinatorikus geometriai módszereket igényelt [35]. Hasonló hatással volt a témakör fejlődésére a *számítógépes grafika*, melyet a tervező mérnököktől a filmgyártókig szinte mindenki használ, akinek komputerrel van dolga [5].

Befejezésül röviden vázolunk egy olyan matematikai eredményt, amely viszonylag közvetlenül alkalmazható a a komputeres grafikában. Ma már majdnem minden forgalomban lévő grafikai programcsomagban vannak olyan (úgynevezett *warping* vagy *morphing*) programok, amelyek alkalmasak ábrák, képek deformálására. Ezen programok jó részét eredetileg az animációs- és reklámfilmek készítői számára írták, de a felhasználók köre azóta jelentősen bővült.

Az ilyen típusú programokban általában az egyik fontos lépés, hogy rögzítjük a kiindulási ábra (mondjuk egy egyenes szakaszokkal rajzolt síkgráf) néhány alappontját (csúcsát), majd kijelöljük a síkon ezen pontok új helyét. Szeretnénk a gráfot úgy lerajzolni, hogy élei továbbra se messék egymást. Általában nem követelhető meg, hogy az éleket ebben a lerajzolásban is szakaszok reprezentálják, mert többnyire nincs olyan rajz, ami ennek a feltételnek is eleget tesz. Célunk az, hogy az éleket egymást nem keresztező töröttvonalakkal ábrázoljuk, és lehetőleg kevés töréspontot vezessünk be. Programunk bonyolultsága és futásideje egyenesen arányos a bevezetett töréspontok számával.

5.1 Tétel [33]: *Minden n-csúcsú síkgráf újrarajzolható úgy, hogy csúcspontjainak új helyét tetszőlegesen rögzítjük, és minden élét egy legfeljebb $24n$ szakaszból álló töröttvonal reprezentálja.*

Egy ilyen rajz egy konstansszor n^2 futásidejű algoritmussal megszerkeszthető.

A következő állítás mutatja, hogy a fenti tétel lényegesen nem javítható.

5.2 Tétel [33]: *Minden n-re van olyan n-csúcsú G_n síkgráf, melyre kijelölhető a csúcspontok új helye úgy, hogy G_n minden töröttvonalú lerajzolásában legalább $n/100$ olyan él van, amely legalább $n/100$ szakaszból áll.*

E tétel bizonyítása egy Leighton [22] által felfedezett (és [27]-ban kissé továbbfejlesztett) állításon alapul, amely rendkívül hasznosnak bizonyult számos más – gráfok beágyazásaival kapcsolatos – extremális és algoritmikus feladat megoldásában.

Egy gráf egy csúcsának *fokán* a benne találkozó élek számát értjük. Egy gráf *kettévágási száma* az a legkisebb egész, ahány él elhagyásával a gráf két olyan darabra esik szét, melyek között nem fut él, és a nagyobbik darab legfeljebb kétszer annyi csúcsból áll, mint a másik.

5.3 Tétel [22],[27]: *Legyen G egy n-csúcsú gráf, melynek keresztezési száma* $\text{CR}(G)$, *és csúcsainak foka* $d_1, d_2, \ldots, d_n$. *Ekkor G kettévágási száma legfeljebb*

$$1.58\sqrt{16\text{CR}(G) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2}.$$

Irodalomjegyzék

[1] P. Agarwal, B. Aronov, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir: Quasi-planar graphs have a linear number of edges, *Combinatorica* **17** (1997), 1–9.

[2] N. Alon, P. Erdős: Disjoint edges in geometric graphs, *Discrete and Computational Geometry* **4** (1989), 287-290.

[3] B. Aronov, P. Erdős, W. Goddard, D. J. Kleitman, M. Klugerman, J. Pach, L. J. Schulman: Crossing families, *Combinatorica* **14** (1994), 127–134.

[4] S. Avital, H. Hanani: Graphs, *Gilyonot Lematematika* **3** (1966), 2-8 (héber nyelven).

[5] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf: *Computational Geometry – Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

[6] D. Bienstock, N. Dean: Bounds for rectilinear crossing numbers, *Journal of Graph Theory* **17** (1993), 333–348.

[7] G. Cairns, Y. Nikolayevsky: Bounds for generalized thrackles, *Discrete and Computational Geometry*, to appear.

[8] Ch. Chojnacki (A. Hanani): Über wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume, *Fund. Math.* **23** (1934), 135–142.

[9] T. K. Dey, J. Pach: Extremal problems for geometric hypergraphs, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 473–484.

[10] P. Erdős, R. K. Guy: Crossing number problems, *American Mathematical Monthly* **80** (1973), 52–58.

[11] I. Fáry: On straight line representation of planar graphs, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.* **11** (1948), 229–233.

[12] M. R. Garey, D. S. Johnson: Crossing number is NP-complete, *SIAM Journal of Algebraic and Disccrete Methods* **4** (1983), 312–316.

[13] W. Goddard, M. Katchalski, D. J. Kleitman: Forcing disjoint segments in the plane, *European Journal of Combinatorics* **17** (1996), 391-395.

[14] R. K. Guy: The decline and fall of Zarankiewicz's theorem, in: *Proof Techniques in Graph Theory*, Academic Press, New York, 1969, 63–69.

[15] H. Hopf, E. Pannwitz: Aufgabe No. 167, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **43** (1934), 114.

[16] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth: Ramsey-type results for geometric graphs. I, *Discrete and Computational Geometry* **18** (1997), 247–255.

[17] G. Károlyi, J. Pach, G. Tardos, G. Tóth: An algorithm for finding many disjoint monochromatic edges in a complete 2-colored geometric graph, in: Intuitive Geometry (I. Bárány , K. Böröczky, eds.) Bolyai Society Mathematical Studies **6**, Budapest, 1997, 367–372.

[18] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, P. Valtr: Ramsey-type results for geometric graphs. II, *Discrete and Computational Geometry* **20** (1998), 375–388.

[19] K. Kedem, R. Livne, J. Pach, M. Sharir: On the union of Jordan regions and collision–free translational motion amidst polygonal obstacles, *Discrete and Computational Geometry* **1** (1986), 59–71.

[20] D. J. Kleitman: The crossing number of $K_{5,n}$, *Journal of Combinatorial Theory* **9** (1970), 315–323.

[21] Y. Kupitz: Extremal problems in combinatorial geometry, *Aarhus University Lecture Notes Series* **53**, Aarhus University, Denmark, 1979.

[22] T. Leighton: *Complexity Issues in VLSI, Foundations of Computing Series,* MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

[23] L. Lovász, J. Pach, M. Szegedy: On Conway's thrackle conjecture, *Discrete and Computational Geometry* **18** (1997), 369–376.

[24] J. Pach: Notes on geometric graph theory, in: Discrete and Computational Geometry (J.E. Goodman et al., eds.), DIMACS Series, Vol 6, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, 273–285.

[25] J. Pach: Geometric graphs and geometric hypergraphs, *Graph Theory Notes of New York* **31** (1996), 39–43.

[26] J. Pach, P.K. Agarwal: *Combinatorial Geometry*, J. Wiley and Sons, New York, 1995.

[27] J. Pach, F. Shahrokhi, M. Szegedy: Applications of the crossing number, *Algorithmica* **16** (1996), 111–117.

[28] J. Pach, M. Sharir: On the boundary of the union of planar convex sets, *Discrete and Computational Geometry* (1998), to appear.

[29] J. Pach, J. Spencer, G. Tóth: New bounds for crossing numbers, in preparation.

[30] J. Pach, G. Tóth: Graphs drawn with few crossings per edge, *Combinatorica* **17** (1997), 427–439.

[31] J. Pach, G. Tóth: Which crossing number is it, anyway?, in: FOCS'98 (megjelenés alatt). Also in: *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B.*

[32] J. Pach, J. Törőcsik: Some geometric applications of Dilworth's theorem, *Discrete and Computational Geometry* **12** (1994), 1–7.

[33] J. Pach, R. Wenger: Embedding planar graphs with fixed vertex locations, in: Graph Drawing '98 (Sue Whitesides, ed.), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1999, megjelenés alatt.

[34] R. B. Richter, C. Thomassen: Relations between crossing numbers of complete and complete bipartite graphs, *American Mathematical Monthly*, February 1997, 131–137.

[35] M. Sharir: Motion planning, in: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, (J. E. Goodman and J. O'Rourke, Eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida, 1997, 733–754.

[36] G. Tóth: Geometric graphs with few disjoint edges II, in preparation.

[37] G. Tóth, P Valtr: Geometric graphs with few disjoint edges, in: Proc. 14th Annual Symp. on Computational Geometry, ACM Press, 1998, 184–191. Also in: *Discrete and Computational Geometry*, to appear.

[38] P. Turán: A note of welcome, *Journal of Graph Theory* **1** (1977), 7–9.

[39] W. T. Tutte: Toward a theory of crossing numbers, *Journal of Combinatorial Theory* **8** (1970), 45–53.

[40] P. Valtr: On geometric graphs with no k pairwise parallel edges, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 461–469.

[41] D. R. Woodall: Thrackles and deadlock, in: *Combinatorial Mathematics and Its Applications* (D.J.A. Welsh, ed.), Academic Press, London, 1969, 335–348.