A Happy End probléma –
A kombinatorikus geometria kezdetei

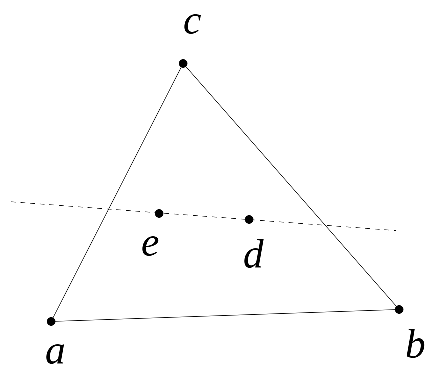
Pach János[1]
MTA Rényi Intézet, Budapest
és Courant Institute, New York

1 Városligeti kör és sokszögek

A történet 1932 őszére nyúlik vissza. Pesti egyetemisták egy kis köre – köztük Erdős Pál, Grünwald (később Gallai) Tibor, Klein Eszter, Szekeres György és Turán Pál – ekkoriban, főként hétvégeken rendszeresen összegyűlt a Városligetben. Az Anonymus-szobornál találkoztak, irodalomról, zenéről, politikáról beszélgettek, múltról és jövőről, álmaikról és csalódásaikról. És még valamiről, ami szenvedélyesen foglalkoztatta őket: a matematikáról. Tulajdonképp már ismeretségüket is a matematikának köszönhették. Gimnazistaként mindannyian a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok lelkes feladatmegoldói voltak. Fényképen már korábban látták egymást a legeredményesebb diákok arcképcsarnokában, melyet a lap évenként megjelentetett. Az egyetem padjaiban és a Városliget hatalmas platánjai alatt ezek a kapcsolatok aztán életreszóló barátsággá érlelődtek.

Egyik találkozójukra Klein Eszter egy érdekes kis feladattal érkezett. Észrevette, hogy akárhogy veszünk fel öt pontot a síkban úgy, hogy nincs három egy egyenesen, mindig kiválasztható közülük egy konvex négyszög négy csúcsa. A bizonyítás roppant egyszerű. Ha a pontok konvex burkának legalább négy csúcsa van, akkor készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy a konvex burok egy abc háromszög, melyen belül még két további pont van: d és e. A de egyenes szükségképpen elkerüli az abc háromszög egyik oldalát, mondjuk az ab szakaszt. Ekkor az a, b, d, e pontok nyilván egy konvex négyszöget feszítenek (ld. 1. ábra).

[1] e-mail: pach@renyi.hu, pach@cims.nyu.edu



1. ábra: Öt pont mindig meghatároz egy konvex négyszöget.

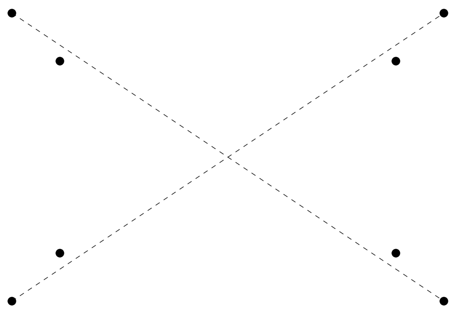
A feladat mindnyájuknak tetszett. A résztvevők visszaemlékezései szerint a társaság férfi tagjainak érdeklődését külön fokozta az a körülmény, hogy a kérdés egy hölgytől származott [26]. A problémát azonnal általánosították.

Egy síkbeli P ponthalmazt *általános helyzetűnek* mondunk, ha nincs három eleme egy egyenesen. P *konvex helyzetben* van, ha egybeesik egy konvex sokszög csúcshalmazával. Igaz-e, hogy minden $m \geq 4$ természetes számhoz van egy véges $f(m)$ szám, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább $f(m)$ általános helyzetű pontot a síkon, mindig kiválasztható közülük m, amely konvex helyzetben van? Amennyiben ilyen szám létezik, jelölje $f(m)$ a legkisebbet.

Makai Endre és Turán Pál hamarosan belátták, hogy $f(5)$ létezik, méghozzá $f(5) = 9$ (ld. 2. ábra). Még a tél beállta előtt Szekeres György büszkén újságolhatta barátainak, hogy minden m-re sikerült igazolnia $f(m)$ létezését. Erdős Pál – Szekeres eredeti bizonyítását jócskán megjavítva – sokkal kisebb felső korlátot adott $f(m)$-re. Sőt, nemsokára egy jó konstrukciót is találtak, és azzal a roppant elegáns sejtéssel álltak elő, miszerint minden m-re

$$f(m) = 2^{m-2} + 1.$$

Ezt a sejtést – dacára annak, hogy rengeteg profi és amatőr matematikus és komputerszakember próbálkozott vele – mindmáig senkinek sem sikerült bebizonyítania vagy megcáfolnia. Még az $m = 6$ eset sem tisztázott, bár Peters és Szekeres számítógépes kisérletei némi reménnyel kecsegtetnek.



2. ábra: Nyolc pont, amely nem határoz meg egy konvex ötszöget.

Erdős a feladatot Happy End problémának keresztelte el. Néhány évvel később ugyanis Klein Eszter és Szekeres György összeházasodtak, és máig boldogan élnek. A kérdés mindnyájuk életében és matematikai munkásságában kulcsszerepet játszott.

2 Ramsey és tételének újrafelfedezése

Szekeres fent említett bizonyítása a következő állításon alapult, melyről hamarosan kiderült, hogy néhány évvel korábban Frank Plumpton Ramsey már felfedezte és publikálta a Londoni Matematikai Társulat Közleményeiben [24].

Ramsey tétele: *Tetszőleges i, j és $k \geq i$ pozitív egészekhez van egy csak tőlük függő $R = R(i, j, k)$ szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan osztjuk be egy legalább R-elemű H halmaz összes i-elemű részhalmazát j osztályba, mindig van H-nak olyan k-elemű részhalmaza, melynek összes i-elemű része ugyanabba az osztályba esik.*

Ebből valóban könnyen levezethető az

Erdős-Szekeres tétel: *Minden $m \geq 4$ egészhez van egy legkisebb $f(m)$ szám, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább $f(m)$ általános helyzetű pontot a síkon, mindig kiválasztható közülük m, ami konvex helyzetben van.*

A tételre két bizonyítást is adunk.

Első bizonyítás: Az $m = 4$ esetet a fentiekben már elintéztük, tehát feltehető, hogy $m \geq 5$. Vegyünk egy $n \geq R(4, 2, m)$ pontból álló általános helyzetű P halmazt a síkon, és osszuk be P összes 4-elemű részhalmazát 2 osztályba aszerint, hogy konvex helyzetben vannak vagy sem. Ramsey tétele szerint van olyan m-elemű $Q \subset P$ részhalmaz, melynek minden négyese ugyanabba az osztályba esik. Klein Eszter észrevétele szerint Q-nak van legalább egy olyan négyese, amely konvex helyzetben van. Következésképp Q összes négyese konvex helyzetben van, tehát Q maga is konvex helyzetben van.

Második bizonyítás (S. Johnson [16]): Vegyünk $n \geq R(3, 2, m)$ általános helyzetű pontot a síkon, és osszuk be az általuk meghatározott $\binom{n}{3}$ háromszöget 2 osztályba aszerint, hogy a belsejükben páros sok pont van vagy páratlan. Ramsey tétele értelmében kiválasztható m pont, hogy az összes általuk meghatározott háromszög ugyanabba az osztályba esik. Ezek a pontok szükségképpen konvex helyzetben vannak. Tegyük fel ugyanis, hogy van közöttük négy pont, melyek közül az egyik – nevezzük d-nek – a másik három által meghatározott abc háromszögbe esik. Az abc háromszög belsejében eggyel több pont van, mint az abd, bcd, acd háromszögek belsejében együttvéve. Ha tehát az a, b, c, d pontok által meghatározott összes háromszög belsejében páros (ill. páratlan) sok pont van, akkor az abc háromszög belsejében páros + páros + páros + 1 = páratlan sok (ill. páratlan + páratlan + páratlan + 1 = páros sok), ami nyilván lehetetlen.

Ramsey a John Maynard Keynes Cambridge-i filozófus és közgazdász köréhez tartozó fiatal kutatók talán legtehetségesebbike volt. Számos különböző tudományban alkotott maradandót: a filozófiában, a közgazdaságtanban, a logikában és a matematika elméleti megalapozásában. A fenti tételt egyetlen tisztán matematikai tárgyú dolgozatában közölte, de ennek hátterében is az a századelő legkiválóbb elméit foglalkoztató kérdés állt, hogy létezik-e egy általános eljárás, mellyel minden matematikai állítás vagy formula igazsága eldönthető. Bár Ramsey tételének segítségével igazolható volt, hogy bizonyos nagyon speciális formájú állítások eldönthetőek, hamarosan kiderült, hogy nincs "univerzálisan jó algoritmus". A szomorú felismerés alapjaiban rázta meg a tudományt.

Amikor Szekeres 1932-ben újra felfedezte Ramsey tételét, Ramsey már nem élt. 1930. január 19-ikén húnyt el; nem volt még huszonhét éves. Erdős és Szekeres korszakos jelentőségű dolgozata [11] nagyban hozzájárult a Ramsey-tétel népszerűsítéséhez. A Ramsey által találtaknál sokkal jobb, explicit korlátokat adtak az $R(i, j, k)$ függvény értékeire, melyek nagy részét máig sem sikerült jelentősen megjavítani. A kérdéskörből az utóbbi harminc évben *Ramsey-elmélet* néven a kombinatorika egészen új, önálló fejezete nőtt ki [13]. A Klein Eszter feladatának általánosítására adott válaszból szintén új tudományág született: a kombinatorikus geometria [20].

3 Hegyek között, völgyek között

Először ismertetjük az Erdős és Szekeres által talált legjobb felső korlátot a tételükben szereplő $f(m)$ függvényre:

$$f(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1. \tag{1}$$

Ennek igazolásához két új fogalomra van szükség. Rögzítsünk a síkban egy (x, y) koordinátarendszert, és tekintsünk egy $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ ponthalmazt, melynek elemeit x-koordinátáik növekvő sorrendjében soroltuk fel. P-t *hegynek* ill. *völgynek* nevezzük, ha konvex helyzetben van és összes p_i eleme $(1 < i < m)$ a p_1p_m egyenes felett ill. alatt helyezkedik el. Jelölje $f(k, l)$ a legkisebb olyan f számot, amely eleget tesz a következő feltételnek: a sík minden legalább f-elemű, általános helyzetű ponthalmaza tartalmaz vagy egy k-elemű hegyet, vagy pedig egy l-elemű völgyet.

3.1. Tétel [11]: *Minden $k, l \geq 3$ párra*

$$f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy érvényes a következő rekurziós formula:

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1. \tag{2}$$

Tekintsünk egy $(f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1)$-elemű, általános helyzetű P halmazt a síkon. Jelölje Q az összes P-ben található $(k-1)$-elemű hegy jobb végpontjainak halmazát. Ha $|Q| \geq f(k, l-1)$, és Q-ban nincs k-pontú hegy, akkor – az indukciós feltevés szerint – Q tartalmaz egy $(l-1)$-pontú völgyet, melynek utolsó pontját jelöljük q-val. A q pont egyidejűleg egy $(k-1)$-elemű H hegy utolsó és egy $(l-1)$-elemű V völgy első eleme. Ezek után könnyű ellenőrizni, hogy vagy H kiegészíthető V második elemével egy k-elemű heggyé, vagy V kiegészíthető H utolsóelőtti elemével egy l-elemű völggyé.

Feltehetjük tehát, hogy $|Q| < f(k, l-1)$, vagyis $|P \setminus Q| \geq f(k-1, l)$. Mivel $P \setminus Q$ – definíció szerint – nem tartalmaz $(k-1)$-elemű hegyet, ez esetben $P \setminus Q$-ban van l-pontú völgy, tehát a (2) formula most is érvényes.

Innen a 3.1. Tétel $k + l$ értékére vonatkozó teljes indukcióval könnyen adódik. A $k = 3$ ill. $l = 3$ esetekben az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyenek $k, l \geq 4$ olyan számok, melyekre az állítást még nem bizonyítottuk, és melyekre $k+l$ minimális. Ekkor

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$$
$$\leq \binom{k+l-5}{k-3} + 1 + \binom{k+l-5}{k-2} + 1 - 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1,$$

ami a bizonyítandó állítás egyik fele.

Másrészt tegyük fel, hogy már sikerült konstruálnunk egy olyan $\binom{k+l-5}{k-3}$-elemű R halmazt, melyben nincs se $(k-1)$-elemű hegy, sem pedig l-elemű völgy, továbbá egy olyan $\binom{k+l-5}{k-2}$-elemű S halmazt, melyben nincs se k-elemű hegy, se $(l-1)$-elemű völgy. Helyezzük el az R halmaz egy kongruens példányát az y-tengelytől balra. Majd vegyük fel az S halmaz egy példányát az y-tengelytől jobbra, és toljuk olyan alacsonyra, hogy az R pontpárjait összekötő egyenesek mindegyike S felett haladjon el, az S pontpárjait összekötő egyenesek mindegyike pedig R alatt. Világos, hogy az e két halmaz egyesítéseként előálló $R \cup S$ halmazban, ha egy hegy tartalmazza R egy pontját, akkor S-ben legfeljebb egy pontja lehet. Hasonlóképpen, ha $R \cup S$ egy völgye tartalmazza S egy pontját, akkor annak R-ben legfeljebb egy eleme lehet. Tehát $R \cup S$-ben nincs se k-elemű hegy, se l-elemű völgy. Másszóval

$$f(k,l) \geq |R \cup S| + 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1,$$

ami a bizonyítandó állítás másik fele.

A 3.1. Tételből az $f(m)$ függvényre vonatkozó (1) korlát azonnal következik, hiszen $f(m) \leq f(m,m)$. Ezt a becslést több mint hatvan évig senkinek sem sikerült megjavítania. A ma ismert legjobb eredmény is – amely Tóth Gézától és Pavel Valtrtól [27] származik – csak mintegy fele az eredeti korlátnak, és a sejtett $2^{m-2}+1$ értéknek majdnem a négyzete. A bizonyítás Fan Chung és Ron Graham [8] azon észrevételén alapul, hogy a fenti gondolatmenetben az (x,y) koordinátarendszert tetszőlegesen választhatjuk meg.

3.2. Tétel [27]: *Minden $m \geq 3$ egész számra*

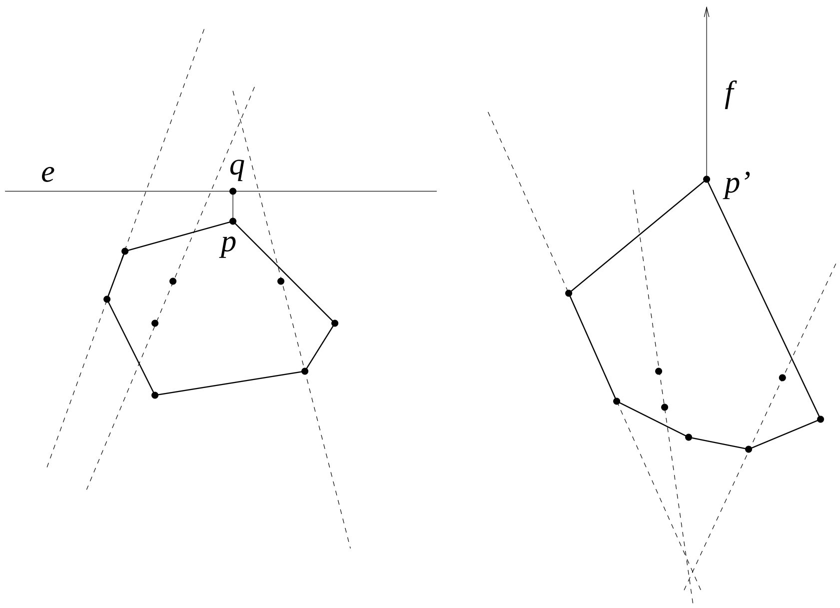
$$f(m) \leq \binom{2m-5}{m-3} + 2.$$

Bizonyítás: Legyen P egy általános helyzetű halmaz a síkon, amely

$$\binom{2m-5}{m-3} + 2 = \binom{m + (m-1) - 4}{m-2} + 2$$

pontból áll. Válasszunk egy olyan e egyenest, amely ugyan nem metszi P konvex burkát, de olyan közel halad annak egyik csúcsához, p-hez, hogy q-val jelölve a p pont e egyenesre eső merőleges vetületét, a pq szakaszt a $P \setminus \{p\}$ pontpárjait összekötő egyenesek egyike sem metszi.

Hajtsunk végre egy olyan *projektív transzformációt* (vagyis vetítést), ami az e egyenest a sík ún. *ideális* ("végtelenben lévő") egyenesébe viszi. Könnyű belátni, hogy egy ilyen transzformáció P minden konvex helyzetben lévő részhalmazát konvex helyzetű halmazba viszi. Ennek fordítottja is igaz: ha egy $Q \subseteq P$ részhalmaz képe konvex helyzetben van, akkor ez érvényes volt Q-ra is. A pq szakasz képe egy f félegyenes lesz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy f egybeesik az y-tengely pozitív felével. (Ld. 3. ábra.)



3. ábra: A projektív transzformáció előtt és után.

Az előző tételből következik, hogy $P \setminus \{p\}$ képe tartalmaz vagy egy m-elemű H hegyet, vagy egy $(m-1)$-elemű V völgyet. Az első esetben készen vagyunk, hiszen H pontjainak eredetileg egy konvex helyzetben lévő halmaz felelt meg. De a második esetben sincs probléma, hiszen a definícióból következően a p pont képével V egy konvex halmazzá egészül ki, melynek P-ben egy m-elemű konvex halmaz felelt meg.

Végül röviden vázoljuk azt a sejthetően legjobb konstrukciót, amely azt mutatja, hogy $f(m) \geq 2^{m-2} + 1$.

A 3.1. Tétel értelmében minden i-re $(0 \leq i \leq m-2)$ van olyan $\binom{m-2}{i}$-elemű, általános helyzetű P_i halmaz, amelyben nincs se $(m-i)$-elemű hegy, se $(i+2)$-elemű völgy. Az is feltehető, hogy a P_i pontjait összekötő egyenesek mindegyikének meredeksége -45 és $+45$ fok közé esik, ellenkező esetben a síkot az y-tengely irányában "ellapítjuk".

Jelölje p_i az origó körüli egységkör és az origón átmenő azon félegyenes metszéspontját, amely a pozitív x tengellyel $45 - \frac{i}{m-2}90$ fokos szöget zár be. Helyettesítsük minden i-re a p_i pontot a P_i halmaz egy nagyon pici példányával, és jelölje P ezen halmazok egyesítését. Ekkor

$$|P| = \sum_{i=0}^{m-2} |P_i| = \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m-2}{i} = 2^{m-2},$$

és nem nehéz ellenőrizni, hogy P-ben nincs n konvex helyzetben lévő pont.

4 Üres sokszögek – egy meglepetés

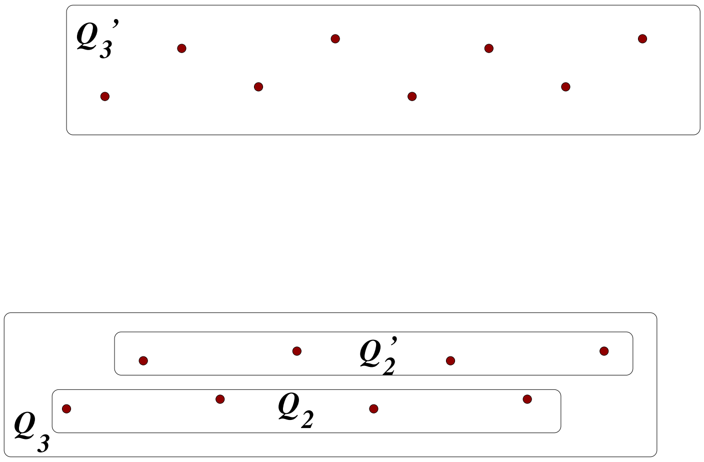
Erdős és Szekeres mindig is úgy gondolták, hogy elég sok általános helyzetű pont közül kiválasztható m, melyek konvex helyzetben vannak, és konvex burkukban nincs további pont. Nyomtatásban ez a sejtés mégis talán csak 1978-ban jelent meg [9]. Másszóval úgy képzelték, hogy minden m-re van egy legkisebb $g = g(m)$ szám, mely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan veszünk fel legalább g általános helyzetű pontot a síkon, ezek között mindig van m, amely egy *üres* konvex m-szöget határoz meg. Sok évvel ezelőtt a Bolyai Társulat egyik konferenciáján Szekeres vázolt is egy bizonyítást erre az állításra, de hamarosan kiderült, hogy a bizonyítás hiányos. Ennek dacára úgy tűnt, hogy csupán technikai jellegű nehézséggel van dolgunk: az üres sokszögek többnyire nagyon hosszúak és vékonyak, ezért kellemetlen kezelni őket.

Nyilvánvaló, hogy $g(3) = 3$, $g(4) = 5$, Harborth [14] pedig belátta, hogy $g(5) = 10$ $(\neq f(5) = 9)$. Nagy meglepetésre a kérdés negatív irányban dőlt el: Horton [15] 1983-ban egy viszonylag egyszerű konstrukció segítségével megmutatta, hogy $g(7)$ nem létezik!

4.1. Tétel [15]: *Megadható tetszőlegesen sok általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy ezek közül semelyik* 7 *sem határoz meg üres konvex hétszöget.*

Bizonyítás: Rögzítsünk egy (x, y) merőleges koordinátarendszert a síkban, és jelöljük Q_1-gyel a $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokból álló kételemű halmazt. A konstrukció rekurzív.

Tegyük fel, hogy valamely $i \geq 1$ egészre már definiáltunk egy 2^i-elemű Q_i halmazt, melyben bármely négyelemű hegy alatt ill. négyelemű völgy fölött van legalább egy további pont.



4. ábra: Q_4 konstrukciója.

Toljuk el a Q_i halmazt egy kevéssel jobbra és messzire felfelé úgy, hogy a keletkező Q_i' halmaz eleget tegyen a következő feltételeknek:

1. Q_i és Q_i' elemeinek x-koordinátái felváltva követik egymást,

2. a Q_i pontpárjait összekötő egyenesek mindegyike Q_i' összes pontja alatt halad el, a Q_i' pontpárjait összekötő egyenesek mindegyike pedig Q_i pontjai felett.

Legyen $Q_{i+1} = Q_i \cup Q_i'$. (Ld. 4. ábra.)

Be fogjuk látni, hogy Q_{i+1} eleget tesz az indukciós feltevéseknek ($i+1$-re), vagyis $|Q_{i+1}| = 2^{i+1}$, és bármely négyelemű hegy alatt ill. négyelemű völgy fölött van legalább egy további pont. Az első állítás nyilvánvaló.

Tekintsük Q_{i+1} egy négyelemű hegyét (ill. völgyét). Ha ennek mind a négy pontja Q_i-hez vagy mind a négy pontja Q_i'-höz tartozik, akkor az indukciós feltevés szerint mindig van alatta (ill. felette) további pont. Feltehetjük tehát, hogy a kérdéses hegy (ill. völgy) mind Q_i-ből, mind pedig Q'_i-ből tartalmaz legalább egy-egy pontot. Vegyük észre, hogy ekkor a két középső elem feltétlenül Q'_i-höz (ill. Q_i-hez) tartozik, tehát a fenti 1. tulajdonság miatt van közöttük legalább egy további pont, ami szükségszerűen a hegy alatt (ill. a völgy felett) helyezkedik el.

Nem nehéz bebizonyítani, hogy Q_{i+1}-ben nincs üres konvex hétszög. A feltételek szerint ugyanis egy ilyen H hétszög csúcsai két összefüggő sorozatra bomlanának, melyek közül az egyik Q'_i egy hegye, a másik pedig Q_i egy völgye. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ezek közül Q_i völgyének legalább 4 eleme van. Ekkor az indukciós feltevés szerint e völgy felett Q_i-nek (tehát Q_{i+1}-nek is) van legalább egy további pontja, ami a fenti 2. tulajdonság miatt csak a H hétszög belsejében lehet. Ez ellentmond annak, hogy H üres, vagyis a 4.1. Tételt maradéktalanul bebizonyítottuk.

Érdekes lenne eldönteni, hogy létezik-e (véges-e) az utolsó ismeretlen érték, $g(6)$. Másszóval megadható-e tetszőlegesen sok általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy ne határozzanak meg egyetlen üres konvex sokszöget sem?

Solymosi József [25], aki Pavel Valtr-hoz [28] hasonlóan matematikus pályáját az Erdős-Szekeres tétellel kapcsolatos feladatok vizsgálatával kezdte, és doktori disszertációjának is részben ez a témája, erre vonatkozóan a következő érdekes kérdést vetette fel:

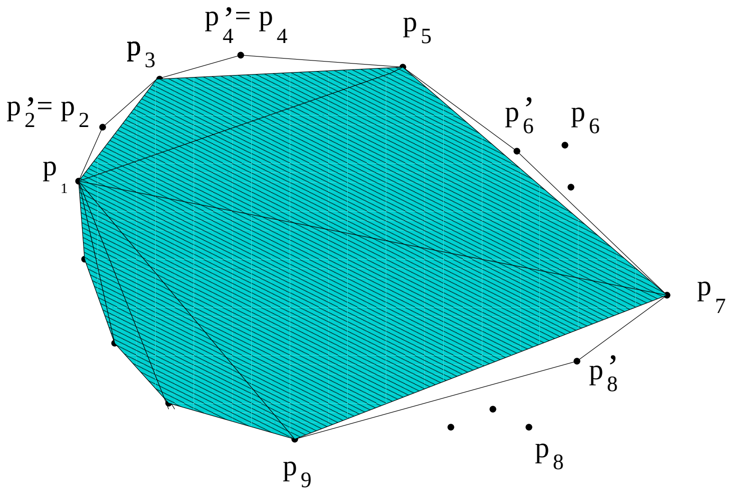
4.2. Probléma: *Adott n általános helyzetű pont a síkon. Színezzük ki a általuk meghatározott összes szakaszt pirossal és kékkel. Igaz-e, hogy ha n elég nagy, akkor mindig van olyan üres háromszög, amelynek mind a három oldala ugyanolyan színű?*

Ha erre a kérdésre a válasz tagadó, akkor $g(6)$ nem létezik. Tegyük fel ugyanis, hogy minden elég nagy, általános helyzetű pontrendszer meghatároz agy üres konvex H hatszöget. Ha a H csúcsai között futó $\binom{6}{3} = 15$ szakaszt két színnel megszinezzük, akkor mindig találunk egy egyszínű háromszöget, ami persze üres is (hiszen – a Ramsey tételben használt jelöléssel élve – $R(2,2,3) = 6$).

Bialostocki, Dierker es Voxman [2] azzal az első pillantásra meglepő ötlettel álltak elő, hogy a nagy üres konvex sokszögek létezésére vonatkozó sejtés esetleg igaz valamilyen "moduláris" értelemben. Hogy a kérdést pontosabban megfogalmazhassuk, szükségünk lesz egy definícióra. Legyen q egy pozitív egész szám, P pedig egy általános helyzetű halmaz. Egy $Q \subseteq P$ részhalmazról azt mondjuk hogy *mod q üres konvex sokszöget* határoz meg, ha konvex helyzetben van, és P azon elemeinek a száma, melyek Q konvex burkának belsejében vannak osztható q-val (másképpen: egyenlő 0-val mod q).

4.3. Sejtés [2]: *Minden $q \geq 2$ és $m \geq 3$ egészhez van egy olyan legkisebb $g = g_q(m)$ szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan veszünk fel legalább g általános helyzetű pontot a síkon, ezek között mindig van m, mely egy modulo q üres konvex m-szöget határoz meg.*

Bialostocki és szerzőtársai észrevették, hogy az $m \geq q + 2$ esetben $g_q(m)$ létezése könnyen igazolható. Írjuk fel m-et $m = iq + 2 + j$ alakban, ahol $i \geq 1$ és $0 \leq j < q$. Azt állítjuk, hogy $g_q(m) \leq f\left(R(3, q, m)\right)$, ahol f és R az Erdős-Szekeres tételben ill. a Ramsey tételben szereplő függvényeket jelenti (ld. a második szakaszban).



5. ábra: Modulo q üres sokszögek konstrukciója.

Tekintsünk $n \geq f\left(R(3, q, m)\right)$ általános helyzetű pontot a síkon. Az Erdős-Szekeres tétel értelmében mindig kiválasztható ezek közül $R(3, q, m)$ pont, amely konvex helyzetben van. Osszuk be az ezen pontok által meghatározott háromszögeket q osztályba aszerint, hogy a belsejükben lévő pontok száma q-val osztva milyen maradékot ad. Ramsey tétele szerint vannak olyan $p_1, p_2, \ldots, p_m$ pontok (az óra járásával ellentétes irányban számozva), hogy az általuk feszített háromszögek mindegyike ugyanabba az osztályba esik. Jelölje S azt a konvex $m - j = iq + 2$-szöget, melynek csúcsai $p_1, p_3, \ldots, p_{2j+1},\ p_{2j+2},\ p_{2j+3}, \ldots, p_m$. Minden k-ra $(1 \leq k \leq j)$ vizsgáljuk meg a $p_{2k-1}p_{2k}p_{2k+1}$ háromszöget. Amennyiben ebben a háromszögben van pont, válasszunk a belsejében egy olyan p'_{2k} pontot, melyre a $p_{2k-1}p'_{2k}p_{2k+1}$ háromszög már üres. Ellenkező esetben legyen $p'_{2k} = p_{2k}$.(Ld. 4. ábra.) Világos, hogy a $p_1, p'_2, p_3, p'_4, \ldots, p_{2j+1}, p_{2j+2}, \ldots, p_m$ pontok által meghatározott T konvex m-szög belsejében ugyanannyi pont van, mint S belsejében. Ha S tetszőleges pontjából minden átlót behúzunk, akkor az $m - j - 2 = iq$ háromszögre esik szét. Mivel ezen háromszögek mindegyike mod q ugyanannyi pontot tartalmaz, az S (és a T) sokszög belsejében lévő pontok száma q-val osztható, amit bizonyítani akartunk.

A fenti gondolatmenetből csak egy nagyon gyenge, szuper-exponenciális felső becslés nyerhető a $g_q(m)$ függvény értékeire. Később Yair Caro [7] egy másik bizonyítást talált, miszerint $g_q(m) \leq C_q^m$, ahol C_q egy alkalmas, q-tól függő konstans. Mindkét bizonyítás erősen kihasználta az $(m \geq q + 2)$ feltevést.

Nemrég Károlyi Gyulával és Tóth Gézával közösen [17] sikerült valamit enyhítenünk ezen a feltételen. Megmutattuk, hogy $g_q(m)$ minden olyan m-re létezik, ami nagyobb, mint $\frac{5}{6}q + C$. (Itt C egy 50-nél kisebb konstans.) Egy síkbeli ponthalmazról azt mondjuk, hogy *majdnem konvex* helyzetben van, ha általános helyzetű és minden általa meghatározott háromszög belsejében legfeljebb egy pont van. A bizonyítás egyik döntő eleme a következő tétel:

4.4. Tétel [17]: *minden $m \geq 3$ egészhez van egy legkisebb $g^* = g^*(m)$ szám, mely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan veszünk fel legalább g^* majdnem konvex helyzetben lévő pontot a síkon, ezek között mindig van m, ami egy* üres *konvex m-szöget határoz meg.*

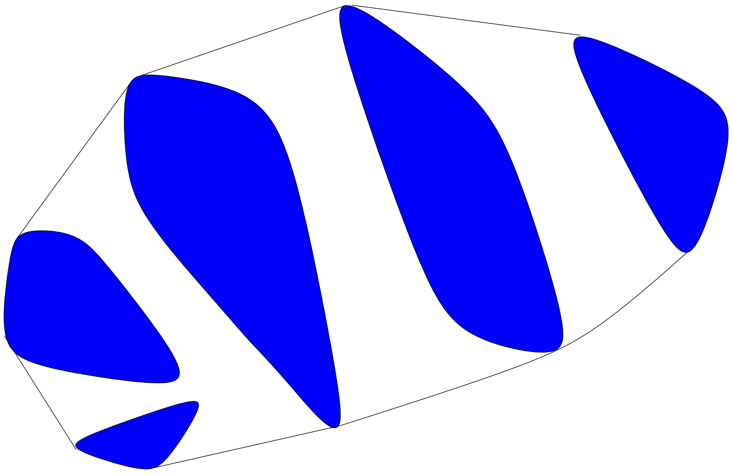
5 Pontok helyett konvex halmazok

Bisztriczky Tibor és Fejes Tóth Gábor [3],[5] rájött, hogy az Erdős-Szekeres tétel olyan rendszerekre is általánosítható, melyek pontok helyett tetszőleges konvex *testekből* (zárt konvex halmazokból) állnak. Konvex testek egy rendszeréről azt mondjuk, hogy *konvex helyzetben* van, ha egyik eleme sincs benne a többi egyesítésének konvex burkában (ld. 6. ábra).

Ahhoz, hogy kimondhassuk, hogy páronként diszjunkt, konvex testek minden elég nagy rendszerének van sok konvex helyzetben lévő eleme, szükségünk van valamilyen további feltételre, ami annak a pontokra vonatkozó tulajdonságnak az általánosítása, hogy nincs három kollineáris elem. Annak illusztrálására, hogy milyen feltételre lehet szükség, tekintsük az $s_1, \ldots, s_n$ szakaszokat a síkban, ahol s_i két végpontja (i, i^2) és $(i, -i^2)$. Nyilvánvaló, hogy ezek között a szakaszok között még három sincs konvex helyzetben.

5.1. Tétel [3]: *Minden $m \geq 4$ egészhez van egy legkisebb $F = F(m)$ szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább F páronként diszjunkt, konvex testet a síkon úgy, hogy bármely három konvex helyzetben van, mindig* *kiválasztható közülük m, ami konvex helyzetben van.*

Bisztriczky és Fejes Tóth mindkét bizonyítása a Ramsey-tételt használta, ezért az $F(m)$ függvényre csak gyenge, szuper-exponenciális felső korlátot szolgáltatott. A ma ismert legjobb becslést Tóth Gézával közösen találtuk.



6. ábra: Konvex helyzetben lévő testek.

5.2. Tétel [22]: *Minden* $m \geq 4$ *egész számra*

$$F(m) \leq \binom{2n-4}{n-2}^2 + 1.$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{K}$ egy legalább $\binom{2n-4}{n-2}^2 + 1$ páronként diszjunkt, konvex testből álló rendszer, melynek bármely három eleme konvex helyzetben van. Könnyű belátni, hogy ekkor van egy olyan $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ részrendszer, melynek legalább $\binom{2n-4}{n-2} + 1$ eleme van, és eleget tesz a következő feltételek egyikének:

1. $\mathcal{K}'$ bármely két eleme elválasztható egy függőleges egyenessel,

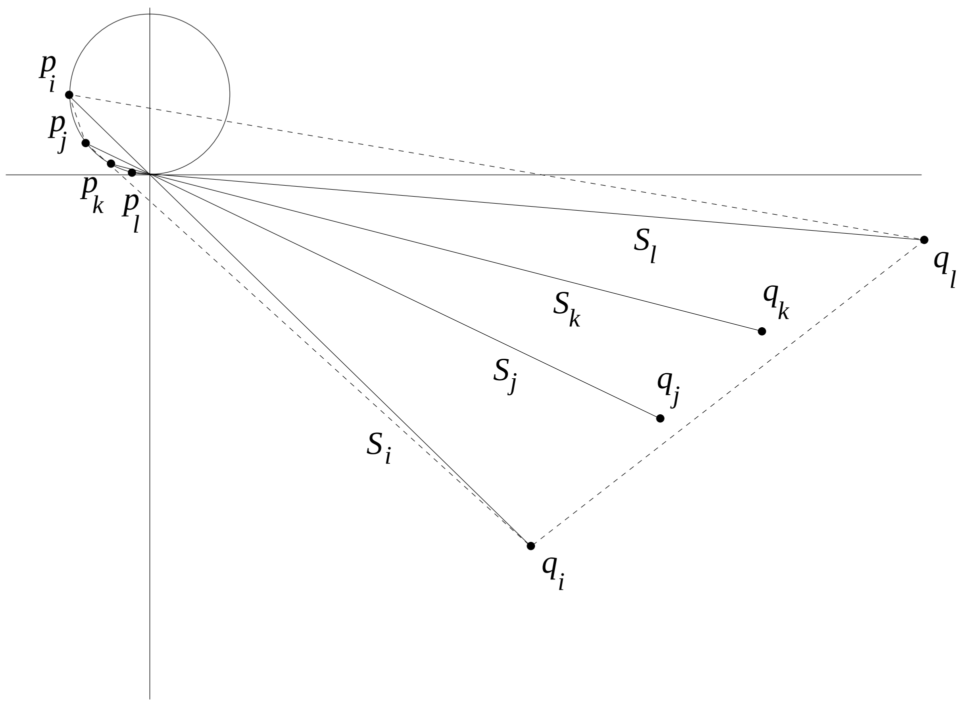
2. van egy olyan függőleges egyenes, amely $\mathcal{K}'$ összes elemét metszi.

Az 1. esetben a *hegyek* és *völgyek* fogalmát könnyen kiterjeszthetjük pontokról tetszőleges konvex testekre úgy, hogy a 2.1. Tétel bizonyítása szinte szó szerint megismételhető legyen. Azt kapjuk tehát, hogy ekkor $\mathcal{K}'$-ben van m-elemű hegy vagy völgy, aminek elemei szükségképpen konvex helyzetben vannak.

A 2. esetben az ábrát célszerű 90 fokkal elfordítani úgy, hogy a $\mathcal{K}'$ elemeit metsző egyenes vízszintes legyen. Egy kis elővigyázatossággal a fenti bizonyítási ötlet most is keresztülvihető, de ennek részleteit ezúttal a nyájas olvasóra bízzuk.

Ismeretes, hogy az $m = 4$ és $m = 5$ esetben $F(m)$ értéke megegyezik a – pontrendszerekre vonatkozó – Erdős-Szekeres tételben szereplő $f(m)$ számmal [4]. Érdekes lenne eldönteni, hogy vajon $F(m) = f(m)$ minden m-re.

Felmerül az a kérdés is, hogy az ebben a szakaszban szereplő tételeknél fontos-e feltenni, hogy a szóbanforgó konvex testek *páronként diszjunktak*. Valamilyen feltételre nyilván szükség van. Amint azt a 7. ábra mutatja, megadható a síkon végtelen sok konvex test (szakasz) úgy, hogy közülük bármely három konvex helyzetben van, de semelyik négy nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal [23].



7. ábra: Bármely 3 szakasz konvex helyzetben van, de semelyik 4 nincs.

Két belső ponttal rendelkező (vagyis nem elfajuló) síkbeli konvex testről azt mondjuk, hogy *keresztezik egymást*, ha határaik több mint két pontban metszik egymást. Ha az ilyen kereszteződéseket megtiltjuk, akkor a 5.1 Tétel akkor is érvényben marad, ha nem kötjük ki, hogy halmazaink páronként diszjunktak.

5.3. Tétel [23]: *Minden* $m \geq 4$ *egészhez van egy legkisebb* $F^* = F^*(m)$ *szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább* F^* *páronként nem kereszteződő, belső ponttal rendelkező, konvex testet a síkon úgy, hogy bármely három konvex helyzetben van, mindig kiválasztható közülük* m*, ami konvex helyzetben van.*

Megjegyezzük, hogy ha a 6. ábrán szereplő szakaszokat kissé "felfújjuk" (hogy legyen belső pontjuk), akkor bármely kettő határa négy pontban keresztezi egymást, tehát a 5.3. Tételben szereplő feltétel nem teljesül. Ha a 5.2 Tételt nem feltétlenül diszjunkt szakaszokra kivánjuk általánosítani, akkor nem elég megkövetelnünk, hogy bármely *három* szakasz konvex helyzetben legyen. Többre van szükség.

5.4. Tétel [23]: *Minden* $m \geq 5$ *egészhez van egy legkisebb* $F' = F'(m)$ *szám, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább* F' *szakaszt a síkon úgy, hogy bármely négy konvex helyzetben van, mindig kiválasztható közülük* m*, ami konvex helyzetben van.*

6 Zárótételek

Először Solymosi [25] és Nielsen [19] vette észre, később Bárány Imre és Valtr fogalmazta meg általánosabb formában azt a tényt, hogy egy rögzített m érték mellett minden elég nagy n-elemű ponthalmazban az m-elemű részhalmazok pozitív százaléka konvex helyzetben van, ráadásul ezek nagy része egy jól meghatározott, "kanonikus" módon kapható meg.

6.1. Tétel [1]: *Bármely* $m \geq 4$ *egészhez van egy* $c_m > 0$ *szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: a sík minden általános helyzetű,* n*-elemű ponthalmazának van* m *olyan páronként diszjunkt* $\lfloor c_m n \rfloor$*-elemű részhalmaza, hogy mindegyikből tetszőlegesen kivéve egy-egy elemet, a kapott* m *pont mindig konvex helyzetben van.*

Felmerül a kérdés, hogy minimum hány konvex m-szöget határoz meg n általános helyzetű pont a síkon. A fentiek értelmében a válasz *nagyságrendje* világos. A *pontos* választ már az $m = 4$ esetben sem tudjuk, pedig ez ekvivalens azzal a nevezetes problémával, hogy miként kell lerajzolni a síkban egy teljes n-pontú gráfot egyenesvonalú élekkel úgy, hogy a keresztező élpárok száma a lehető legkisebb legyen [10]. A ma ismert legjobb konstrukcióban [6] a keresztező élpárok (és a konvex helyzetben lévő pontnégyesek) száma aszimptotikusan

$$\frac{6467}{16848}\binom{n}{4} \sim 0.3838\binom{n}{4}.$$

Az 6.1. Tételben szereplő c_m konstansra a legjobb alsó becslés [21]-ben található. Ugyanebből a dolgozatból az is kiderül, hogy az állítás viszonylag zökkenőmentesen általánosítható konvex testekre.

6.2. Tétel [21]: *Bármely $m \geq 4$ egészhez van egy $c_m^* > 0$ szám, amely eleget tesz a következő feltételnek: minden n páronként diszjunkt konvex testből álló halmazrendszernek, melynek bármely három eleme konvex helyzetben van, létezik m olyan páronként diszjunkt $\lfloor c_m^* n \rfloor$-elemű részrendszere, hogy mindegyikből tetszőlegesen kivéve egy-egy elemet, a kapott m test mindig konvex helyzetben van. Ráadásul*

$$c_m^* = 2^{-O(k^2)}.$$

Nyilvánvaló, hogy az itt tárgyalt kérdések mindegyike felvethető magasabb dimenziós terekben is. A d-dimenziós euklideszi tér pontjainak egy P halmaza *általános helyzetben* van, ha semelyik $d+1$ eleme nincs ugyanazon a hipersíkon. *P konvex helyzetben* van, ha megegyezik egy konvex politóp csúcshalmazával. Bármely $m > d+1$ egész számra jelöljük $f_d(m)$-mel azt a legkisebb f számot, amely eleget tesz a következő feltételnek: a d-dimenziós tér minden legalább f általános helyzetű pontból álló halmazának van m olyan eleme, ami konvex helyzetben van. Ezt a jelölést használva az Erdős-Szekeres tételben szereplő $f(m)$ függvény azonos $f_2(m)$-mel.

Világos, hogy minden általános helyzetű d-dimenziós pontrendszer levetíthető egy alkalmasan választott 2-dimenziós síkra úgy, hogy a vetület általános helyzetű legyen. Következésképp minden d-re

$$f_d(m) \leq f(m) \leq \binom{2m-5}{m-3} + 2.$$

Meglepő módon még az sem ismeretes, hogy $f_3(m)$ legalább exponenciálisan gyorsan nő. A legjobb becslés Károlyitól és Valtr-tól származik [18], akiknek csak annyit sikerült igazolniuk, hogy egy alkalmasan választott $C > 1$ konstanssal

$$f_3(m) \geq C^{\sqrt{m}}.$$

Köszönetnyilvánítás: Ez az áttekintés azon előadásom szövegét követi, melyet 1998. augusztusában a montreali McGill Egyetemen tartottam Erdős Pál Vendégelőadóként. Ugyanezt az anyagot – kisebb változtatásokkal – 1999. januárjában Sydney-ben is előadtam, a Macquarie Egyetemen, Klein Eszter és Szekeres György jelenlétében. Hálás köszönettel tartozom vendéglátásukért és a témával kapcsolatos érdekes megjegyzéseikért.

Hivatkozások

[1] I. Bárány és P. Valtr: A positive fraction Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 335–342.

[2] A. Bialostocki, P. Dierker és B. Voxman: Some notes on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete Mathematics* **91** (1991), 231–238.

[3] T. Bisztriczky és G. Fejes Tóth: A generalization of the Erdős-Szekeres convex n-gon theorem, *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 167–170.

[4] T. Bisztriczky és G. Fejes Tóth: Nine convex sets determine a pentagon with convex sets as vertices, *Geometriae Dedicata* **31** (1989), 89–104.

[5] T. Bisztriczky és Fejes Tóth Gábor: Convexly independent sets, *Combinatorica* **10** (1990), 195–202.

[6] A. Brodsky, S. Durocher és E. Gethner: Toward the rectilinear crossing number of K_n: new embeddings, upper bounds, and asymptotics, in: *Graph Drawing 2000, Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, megjelenés alatt.

[7] Y. Caro: On the generalized Erdős-Szekeres conjecture – a new upper bound, *Discrete Mathematics* **160** (1996), 229-233.

[8] F. R. Chung és R. L. Graham: Forced convex n-gons in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 367–371.

[9] P. Erdős: Some more problems on elemntary geometry, *Australian Math. Soc. Gazette* **5** (1978), 52–54.

[10] P. Erdős és R. K. Guy: Crossing number problems, *American Mathematical Monthly* **80** (1973), 52–58.

[11] P. Erdős és G. Szekeres: A combinatorial problem in Geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463–470.

[12] P. Erdős és G. Szekeres: On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **3-4** (1961), 53–62.

[13] R. Graham, B. Rothschild és J. Spencer: *Ramsey Theory, 2nd ed.* J. Wiley & Sons, New York, 1990.

[14] H. Harborth: Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen, *Elemente d. Mathematik* **33** (1978), 116–118.

[15] J. D. Horton: Sets with empty convex 7-gons, *Canadian Math. Bulletin* **26** (1983), 482–484.

[16] S. Johnson: A new proof of the Erdős-Szekeres convex k-gon result, *J. Combinatorial Theory, Ser. A* **42** (1986), 318–319.

[17] G. Károlyi, J. Pach és G. Tóth: A modular version of the Erdős-Szekeres theorem, *Studia Sci. Math. Hung.*, megjelenés alatt.

[18] G. Károlyi és P. Valtr: Sets in R^d without large convex subsets, előkészületben.

[19] M. J. Nielsen: Transverse matchings of a finite planar set (manuscript), University of Idaho, Moscow, 1995.

[20] J. Pach and P.K. Agarwal: *Combinatorial Geometry,* J. Wiley & Sons, New York, 1995.

[21] J. Pach és J. Solymosi: Canonical theorems for convex sets, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 427–435.

[22] J. Pach és G. Tóth: A generalization of the Erdős-Szekeres theorem for disjoint convex sets, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 437–445.

[23] J. Pach és G. Tóth: Erdős-Szekeres theorems for segments and non-crossing convex sets, *Geometriae Dedicata*, megjelenés alatt.

[24] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930), 338–384.

[25] J. Solymosi: *Kombinatorikus problémák a véges Ramsey-elméletben (szakdolgozat)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1988.

[26] G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, Reminiscences, in: *P. Erdős: The Art of Counting, Selected Writings (J. Spencer, ed.)*, MIT Press, Cambridge, MA, 1973, XIX–XXII.

[27] G. Tóth és P. Valtr: Note on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 457–459.

[28] P. Valtr: *Several Results Related to the Erdős-Szekeres Theorem (Doctoral Dissertation)*, Charles University, Prague, 1996.

References

[1] I. Bárány és P. Valtr: A positive fraction Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 335–342.

[2] A. Bialostocki, P. Dierker és B. Voxman: Some notes on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete Mathematics* **91** (1991), 231–238.

[3] T. Bisztriczky és G. Fejes Tóth: A generalization of the Erdős-Szekeres convex n-gon theorem, *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 167–170.

[4] T. Bisztriczky és G. Fejes Tóth: Nine convex sets determine a pentagon with convex sets as vertices, *Geometriae Dedicata* **31** (1989), 89–104.

[5] T. Bisztriczky és Fejes Tóth Gábor: Convexly independent sets, *Combinatorica* **10** (1990), 195–202.

[6] A. Brodsky, S. Durocher és E. Gethner: Toward the rectilinear crossing number of K_n: new embeddings, upper bounds, and asymptotics, in: *Graph Drawing 2000, Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, megjelenés alatt.

[7] Y. Caro: On the generalized Erdős-Szekeres conjecture – a new upper bound, *Discrete Mathematics* **160** (1996), 229-233.

[8] F. R. Chung és R. L. Graham: Forced convex n-gons in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 367–371.

[9] P. Erdős: Some more problems on elemntary geometry, *Australian Math. Soc. Gazette* **5** (1978), 52–54.

[10] P. Erdős és R. K. Guy: Crossing number problems, *American Mathematical Monthly* **80** (1973), 52–58.

[11] P. Erdős és G. Szekeres: A combinatorial problem in Geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463–470.

[12] P. Erdős és G. Szekeres: On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **3-4** (1961), 53–62.

[13] R. Graham, B. Rothschild és J. Spencer: *Ramsey Theory, 2nd ed.* J. Wiley & Sons, New York, 1990.

[14] H. Harborth: Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen, *Elemente d. Mathematik* **33** (1978), 116–118.

[15] J. D. Horton: Sets with empty convex 7-gons, *Canadian Math. Bulletin* **26** (1983), 482–484.

[16] S. Johnson: A new proof of the Erdős-Szekeres convex k-gon result, *J. Combinatorial Theory, Ser. A* **42** (1986), 318–319.

[17] G. Károlyi, J. Pach és G. Tóth: A modular version of the Erdős-Szekeres theorem, *Studia Sci. Math. Hung.*, megjelenés alatt.

[18] G. Károlyi és P. Valtr: Sets in R^d without large convex subsets, előkészületben.

[19] M. J. Nielsen: Transverse matchings of a finite planar set (manuscript), University of Idaho, Moscow, 1995.

[20] J. Pach and P.K. Agarwal: *Combinatorial Geometry,* J. Wiley & Sons, New York, 1995.

[21] J. Pach és J. Solymosi: Canonical theorems for convex sets, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 427–435.

[22] J. Pach és G. Tóth: A generalization of the Erdős-Szekeres theorem for disjoint convex sets, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 437–445.

[23] J. Pach és G. Tóth: Erdős-Szekeres theorems for segments and non-crossing convex sets, *Geometriae Dedicata*, megjelenés alatt.

[24] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930), 338–384.

[25] J. Solymosi: *Kombinatorikus problémák a véges Ramsey-elméletben (szakdolgozat)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1988.

[26] G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, Reminiscences, in: *P. Erdős: The Art of Counting, Selected Writings (J. Spencer, ed.)*, MIT Press, Cambridge, MA, 1973, XIX–XXII.

[27] G. Tóth és P. Valtr: Note on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 457–459.

[28] P. Valtr: *Several Results Related to the Erdős-Szekeres Theorem (Doctoral Dissertation)*, Charles University, Prague, 1996.