



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Αραιές Αναπαραστάσεις στα Τροπικά Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Τσιλιβή

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΟΡΑΣΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΗΜΑΤΩΝ
Αθήνα, Ιούλιος 2021





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και Επεξεργασίας
Σημάτων

Αραιές Αναπαραστάσεις στα Τροπικά Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Τσιλιβή

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 12η Ιουλίου 2021.

.....
Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αλέξανδρος Ποταμιάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δημήτριος Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2021

.....
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΤΣΙΛΙΒΗΣ
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © – All rights reserved Νικόλαος Τσιλιβής, 2021.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η εργασία αυτή ασχολείται με θέματα αραιής αναπαράστασης σημάτων σε μη γραμμικούς διανυσματικούς χώρους. Από τη δεκαετία του 1990 και έπειτα έχει πραγματοποιηθεί μια επανάσταση στον τομέα της Επεξεργασίας Εικόνας και Σήματος μέσω της Θεωρίας των Αραιών Αναπαραστάσεων, κατά την οποία έχουν γίνει φανερά τα πλεονεκτήματα χρήσης πλεοναστικών βάσεων αναπαράστασης για πολλές κλάσεις σημάτων και έχουν αναπτυχθεί ταχείς αλγόριθμοι για την εύρεση των απλούστερων/αραιότερων (εκείνων με τα περισσότερα μηδενικά) σημάτων στις βάσεις αυτές. Εδώ, θα αναφερθούμε στην επέκταση τέτοιων ιδεών σε μη γραμμικούς χώρους όπου κυριαρχούν οι πράξεις του maximum και της πρόσθεσης. Συχνά χρησιμοποιούνται οι όροι max-plus άλγεβρα και τροπική άλγεβρα/γεωμετρία για την αναφορά στους χώρους αυτούς. Έχουν χρησιμοποιηθεί στην Όραση Υπολογιστών και τη μη γραμμική Επεξεργασία Σήματος, παραδοσιακά εφαρμόστηκαν σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας, ενώ τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες για σύνδεση τους με προβλήματα της Μηχανικής Μάθησης. Μια θεωρία αραιών αναπαραστάσεων πιστεύουμε ότι μπορεί να ωφελήσει ποικιλοτρόπως τους παραπάνω τομείς. Θα μελετηθούν θέματα υπολογισμού αραιών λύσεων εξισώσεων, όπως η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος και εργαλεία βελτιστοποίησης που επιτρέπουν τη σχεδίαση αποδοτικών αλγόριθμων, εφαρμογές της θεωρίας στις περιοχές των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και της Μηχανικής Μάθησης, ενώ στο τέλος της εργασίας γίνονται βήματα προς τη γενίκευση των ιδεών σε πιο αφηρημένους διανυσματικούς χώρους.

Λέξεις-κλειδιά: Τροπικά Μαθηματικά, Αραιότητα, Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, Μαθηματική Μορφολογία, Max-plus Άλγεβρα, Μη Γραμμικά Συστήματα, Submodular Βελτιστοποίηση, Κυρτή Παλινδρόμηση, Μηχανική Μάθηση.

Abstract

This thesis studies sparse representations in nonlinear vector spaces. During the 1990s, a sparse revolution occurred in the fields of Signal and Image Processing. Since then, many works have highlighted the benefits of designing redundant linear bases to represent our signals, while much progress has been made in the theoretical analysis of the underlying optimization problems that allow fast and exact computation of sparse signals. Herein, we contribute to the extension of such ideas in spaces with a specific nonlinear structure, where the operations of maximum and addition dominate. Such spaces and algebras, which are usually called max-plus and tropical algebra, have been used in areas such as Computer Vision, nonlinear Signal Processing, Operations Research and Optimal Control, while the last years a connection with Machine Learning has been established. We will present the sparsity theory in max-plus algebra, highlighting aspects of fast computation of sparse vectors and connecting it with areas of applications in nonlinear dynamical systems and machine learning. In the last chapter, we will make a first few steps towards a unifying theory of sparsity in abstract nonlinear vector spaces with a lattice-like structure.

Keywords: Tropical Mathematics, Sparsity, Combinatorial Optimization, Mathematical Morphology, Max-plus Algebra, Nonlinear Systems, Submodular Optimization, Convex Regression, Machine Learning.

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας δε θα ήταν δυνατή χωρίς τη στήριξη ορισμένων ανθρώπων.

Κατ' αρχάς, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας κ. Πέτρο Μαραγκό. Οι διαλέξεις του και ο πλούτος των γνώσεων του αποτέλεσαν έμπνευση και κίνητρο για διαρκή ακαδημαϊκή πρόοδο, ενώ το ενδιαφέρον του, η καθοδήγηση του και οι ερευνητικές συμβολές και συμβουλές του στο πλαίσιο εκπόνησης της εργασίας πολύτιμες. Φυσικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα στο Πανεπιστήμιο της Πενσυλβάνια Τάσο Τσιάμη για την ανιδιοτελή βοήθεια που μου παρείχε σε όλα τα στάδια της εργασίας και τις καθοριστικές, τεχνικές και μη, συμβουλές του. Φίλοι, καθηγητές και συμφοιτητές συνέβαλαν επίσης στην απόκτηση των γνώσεων που σήμερα διαθέτω καθώς και στο σμίλευμα της προσωπικότητάς μου κατά τα προπτυχιακά χρόνια, ενώ ειδικά στους πρώτους είμαι υπόχρεος για τις χαρές, τα γέλια, τις λύπες, την υποστήριξη και τις αναμνήσεις. Σας ευχαριστώ μέσα απ' την καρδιά μου.

Τέλος, η εργασία αυτή αφιερώνεται στην οικογένειά μου, και ειδικά στα αδέρφια μου Θοδωρή και Αλέξη και στους γονείς μου Νάσο και Άννα, ως μια απειροελάχιστη αναγνώριση της στήριξης και αγάπης που μου δείχνουν.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	14
2	Τροπικά Μαθηματικά - max-plus άλγεβρα	18
2.1	Max-plus άλγεβρα	19
2.2	Τροπική Γεωμετρία	24
3	Submodularity	28
3.1	Ορισμός	28
3.2	Βελτιστοποίηση	30
3.2.1	Ελαχιστοποίηση submodular συναρτήσεων	30
3.2.2	Μεγιστοποίηση submodular συναρτήσεων	31
3.2.3	Submodular Set Cover	32
3.3	Submodularity ratio	33
4	Αραιές Αναπαραστάσεις	35
4.1	Κίνητρο - Αραιές αναπαραστάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα	35
4.2	Αραιές αναπαραστάσεις στη max-plus άλγεβρα	37
4.2.1	Αραιά διανύσματα με μικρό ℓ_∞ σφάλμα	43
5	Εφαρμογές	48
5.1	Εφαρμογή στον έλεγχο max-plus δυναμικών συστημάτων	48
5.2	Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών	51
5.3	Ελαχιστοποίηση Μορφολογικών Νευρωνικών Δικτύων	62
6	Αφηρημένοι Τροπικοί Χώροι και Αραιότητα	66
6.1	Πλέγματα (Lattices)	67
6.2	Άλγεβρες εφοδιασμένες με διάταξη	70
6.3	Complete Weighted Lattices	71
6.4	Εξισώσεις dilation τελεστών	75
6.5	Αραιές αναπαραστάσεις σε Complete Weighted Lattices	76

7	Επίλογος	81
7.1	Συνεισφορές	81
7.2	Μελλοντικές επεκτάσεις	81

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος. Απεικονίζεται η τροχιά ενός σημείου, η δυναμική του οποίου περιγράφεται από το σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων Lorenz.	15
2.1	Η συνάρτηση $f(a, b) = -h \ln(e^{-\frac{a}{h}} + e^{-\frac{b}{h}})$, $a, b > 0$ για διάφορες τιμές της σταθεράς h . Στο όριο $h \rightarrow 0^+$ είναι $f(a, b) = \min(a, b)$	20
2.2	Ο γράφος του παραδείγματος 2.1.3.	22
2.3	Το τροπικό πολυώνυμο $p(x) = (-2x + 1) \vee (-0.5x + 4) \vee (3x + 3)$. Η τροπική του υπερεπιφάνεια είναι το σύνολο $V(p) = \{-2, 2/7\}$	25
2.4	Το Newton πολύτοπο του $p(x, y) = (2x + 3y) \vee (x + 5y) \vee (-2x - 3y) \vee (0.5x + 0.5y) \vee (0.5x + 0y)$	26
3.1	Με μαύρο χρωματίζουμε τους κόμβους που υπάρχουν ήδη στο σύνολο A , με κόκκινο τον κόμβο k που προστίθεται. Όπως είναι εμφανές, η συμβολή ενός κόμβου στους γείτονες ενός συνόλου (περίπτωση (b)) είναι μικρότερη ή ίση απ' ότι στα υποσύνολα του (περίπτωση (a)).	30
4.1	Η πληθικότητα του support set που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο για το (4.29) (πορτοκαλί), και από την ευριστική μέθοδο της Πρότασης 16 (μπλέ). Δίδεται για 100 διαφορετικά ζεύγη δεδομένων \mathbf{A}, \mathbf{b}	46
5.1	Η εξέλιξη του state και του input	51
5.2	Ένα παράδειγμα μη κυρτού και κυρτού, αντίστοιχα, υποσυνόλου του επιπέδου. . . .	51
5.3	Η κυρτή συνάρτηση $y = x + \frac{x^4}{5}$ συνοδευόμενη από 4 εφαπτομένες της.	52
5.4	Μια κυρτή συνάρτηση μαζί με υποστηρικτικά υπερεπίπεδα.	53
5.5	Τμηματικά γραμμική υπό-εκτίμηση θορυβωδών δεδομένων.	55
5.6	Τμηματικά γραμμικές προσεγγίσεις της $f(x) = \max(-6x - 6, \frac{x}{2}, \frac{x^5}{5} + \frac{x}{2})$ με K περιοχές, όπως προκύπτουν από τους αλγόριθμους τροπικής παρεμβολής για διάφορες τιμές του επιτρεπτού σφάλματος ϵ και της νόρμας αναφοράς ℓ_p	58
5.7	Οι αραιοί εκτιμητές της επιφάνειας $z = x^2 + y^2 + \mathcal{N}(0, 0.25^2)$ για 2 εκτελέσεις του τροπικού αλγόριθμου.	59
5.8	Η σχέση RMS σφάλματος των SMMAE εκτιμητών με τον αριθμό των γραμμικών περιοχών K . Σύγκριση με τη μέθοδο τροπικής παρεμβολής [MT20].	61

5.9 Το RMS σφάλμα των εκτιμητών συναρτήσει του αριθμού των γραμμικών περιοχών του για τη συνάρτηση $g(\mathbf{x}) = \log(\exp(x_1) + \exp(x_2) + \exp(x_3))$	62
5.10 Μορφολογικά Νευρωνικά Δίκτυα.	63

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Στοιχεία των ℓ_1 και ℓ_2 SGLEs που προέρχονται απ' τη λύση του προβλήματος (4.12) για την εξίσωση (5.20), με $p = 1, 2$, αντίστοιχα, και ανώφλι σφάλματος ϵ^p . Αναφέρουμε το Root Mean Squared και Maximum Absolute σφάλμα, μαζί με την πληθικότητα του support set της λύσης (ο αριθμός των γραμμικών περιοχών του προκύπτοντος τροπικού πολυωνύμου).	56
5.2	ℓ_5 and ℓ_{150} SGLEs για πληθώρα διαφορετικών ανωφλίων θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.	57
5.3	ℓ_1 and ℓ_2 SMMAE εκτιμητές για πληθώρα διαφορετικών ανωφλίων θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.	57
5.4	ℓ_5 and ℓ_{150} SMMAE εκτιμητές για πληθώρα διαφορετικών ανωφλίων θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.	58
5.5	Τμηματικά γραμμικές προσεγγίσεις με τα σφάλματα τους για την επιφάνεια (5.21). K είναι ο αριθμός των γραμμικών περιοχών στο προκύπτον τροπικό πολυώνυμο. . .	61
5.6	Test set accuracy πριν και μετά την ελαχιστοποίηση.	64

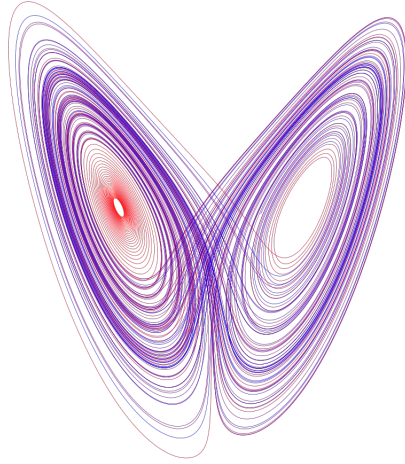
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Μια θετικιστική προσέγγιση του κόσμου μας έχει στον πυρήνα της τα, φυσικά και μη, σήματα. Τέτοια είναι το φως, οι ήχοι, οι παλμοί της ανθρώπινης καρδιάς, τα κύματα της θάλασσας. Επιπλέον της ασυνείδητης επεξεργασίας τους στο πλαίσιο της καθημερινής εμπειρίας, η ανθρώπινη σκέψη αντιστοιχεί στα αντικείμενα αυτά μαθηματικές αναπαραστάσεις και, μέσω του λογικού χειρισμού τους, ανακαλύπτει τις δομικές τους ιδιότητες και τα χειρίζεται προς όφελος της μέσω κατάλληλων συστημάτων.

Η πιο γνωστή και επιτυχημένη θεωρία ανάλυσης σημάτων βασίζεται σε ιδέες του Joseph Fourier από τον 19ο αιώνα. Ο Γάλλος μαθηματικός έδειξε ότι ένα τυχόν σήμα μπορεί να διασπαστεί σε ένα σύνολο απλούστερων ημιτονοειδών σημάτων, γεγονός που επιτρέπει την κατανόηση του σήματος σε έναν εναλλακτικό χώρο· αυτό της συχνότητας. Κατά τον 20ο αιώνα, η θεωρία αυτή ωρίμασε και, μεταξύ άλλων, οδήγησε στη ραγδαία πρόοδο της περιοχής των γραμμικών δυναμικών συστημάτων (δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις), καθώς και σε αυτή της στενά συνδεδεμένης επεξεργασίας σήματος. Με την πάροδο του αιώνα, οι δυνατότητες σε υλικό εξελίσσονταν, το ίδιο και οι φιλοδοξίες της ανθρωπότητας και νέοι κλάδοι, όπως η επεξεργασία εικόνας/βίντεο, ανέκυψαν. Ταυτόχρονα, περί τα μέσα του αιώνα, ξεκίνησαν και οι πρώτες προσπάθειες για σύνθεση συστημάτων με δυνατότητες εκμάθησης εννοιών και εργασιών μέσα από παραδείγματα (μηχανική μάθηση). Όπως μπορεί να φανταστεί κανείς, οι επιδιώξεις αυτές ώθησαν ερευνήτριες και ερευνητές προς νέες κλάσεις συστημάτων με μεγαλύτερη πολυπλοκότητα και πιο πλούσια, πιθανώς **μη γραμμική**, δομή. Μια τέτοια αποτελεί η κλάση των max-plus συστημάτων, τα οποία επιδρούν στα ερεθίσματα εισόδου μέσω των πράξεων της πρόσθεσης και του maximum, και όπως θα δούμε, παρ' όλη τη μη γραμμική τους φύση, διαθέτουν αρκετά κανονική δομή ώστε να επιτρέπουν τον αναλυτικό χειρισμό τους.

Στα τέλη του αιώνα, άρχισε να γίνεται εμφανής η σημασία και τα οφέλη των **αραιών** αναπαραστάσεων σημάτων. Αραιά καλούνται εκείνα τα σήματα που έχουν μονάχα λίγες μη μηδενικές τιμές και επομένως η πληροφορία είναι αραιά κατανομημένη μέσα τους. Διάφορα πολύπλοκα σήματα επιδέχονται μια τέτοια απλή αναπαράσταση αν περιγραφούν βάσει κατάλληλα επιλεγμένων σημάτων-ατόμων (διαφορετικά από τα κλασικά ημίτονα της Fourier ανάλυσης), γεγονός που με τη σειρά του οδηγεί σε ταχύτερους αλγόριθμους και πιο οικονομικές αναπαραστάσεις. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 2000, το διασημότερο ίσως τέκνο των ιδεών αυτών αποτελούσε ο αλγόριθμος JPEG2000 που κωδικοποιεί αποδοτικά εικόνες και μειώνει το μέγεθος μνήμης που απαιτείται για την



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος. Απεικονίζεται η τροχιά ενός σημείου, η δυναμική του οποίου περιγράφεται από το σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων Lorenz.

αποθήκευση τους. Περί το 2005 γεννήθηκε η περιοχή του Compressed Sensing, που έφερε ριζικές αλλαγές στη δειγματοληψία και ανάκτηση σημάτων μέσα από γραμμικές και τυχαίες μετρήσεις, και ξεκλείδωσε πρακτικά προβλήματα σε εφαρμογές όπως η μαγνητική τομογραφία.

Η παρούσα εργασία φιλοδοξεί να βοηθήσει στην επέκταση των ιδεών της αραιής αναπαράστασης σε μη γραμμικούς χώρους, όπως αυτών των max-plus συστημάτων. Η έννοια της αραιότητας στη max-plus άλγεβρα εισήχθη από τους Τσιάμης και Μαραγκός [TM19]. Εμείς θα συνεχίσουμε την οικοδόμηση της θεωρίας κυρίως στο κομμάτι των αραιών προσεγγιστικών λύσεων max-plus εξισώσεων, θα μελετήσουμε τη σύνδεση με εφαρμογές όπως ο αυτόματος έλεγχος max-plus δυναμικών συστημάτων, η κυρτή παρεμβολή και τα μορφολογικά νευρωνικά δίκτυα, και, τέλος, θα παρουσιάσουμε αφηρημένους μη γραμμικούς διανυσματικούς χώρους (οι οποίοι εμπεριέχουν ως ειδική περίπτωση το χώρο της max-plus άλγεβρας) και θα κάνουμε κάποια πρώτα βήματα προς την ανάπτυξη μιας καθολικής θεωρίας αραιών αναπαραστάσεων σε αυτούς. Η εύρεση αραιών λύσεων βασίζεται σε εργαλεία και αλγόριθμους της Submodular Βελτιστοποίησης, η οποία ανακύπτει επιπλέον και σε άλλα προβλήματα των τροπικών μαθηματικών. Για το λόγο αυτό, ενισχύοντας τον εκπαιδευτικό χαρακτήρα της εργασίας, θα προβούμε επίσης και σε μια ανασκόπηση της περιοχής. Πιο συγκεκριμένα για τη δομή της εργασίας:

- Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση των κυριότερων στοιχείων της max-plus άλγεβρας, καθώς και μια περιληπτική αναφορά στην τροπική γεωμετρία.
- Στο Κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε τα κυριότερα στοιχεία της Submodular Βελτιστοποίησης.
- Το Κεφάλαιο 4 αποτελεί τον πυρήνα της εργασίας, όπου παρουσιάζεται η θεωρία των αραιών αναπαραστάσεων στη max-plus άλγεβρα.

- Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται παρουσίαση του πρακτικού σκέλους της εργασίας, με σύνδεση της θεωρίας με εφαρμογές στις περιοχές των δυναμικών συστημάτων και της μηχανικής μάθησης.
- Στο Κεφάλαιο 6 θα παρουσιάσουμε μια αυστηρή θεμελίωση και γενίκευση των τροπικών μαθηματικών μέσα από εργαλεία της αλγεβρικής θεωρίας πλεγμάτων, ενώ θα εφοδιάσουμε τους χώρους αυτούς με αραιές αναπαραστάσεις επεκτείνοντας ιδέες από τα προηγούμενα κεφάλαια.
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 ολοκληρώνουμε την εργασία μας, συνοψίζοντας τις κύριες συνεισφορές της και προτείνοντας μελλοντικές επεκτάσεις των ιδεών που παρουσιάστηκαν.

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι θεωρητικές συνεισφορές της εργασίας στις αραιές αναπαραστάσεις της max-plus άλγεβρας μαζί με την εφαρμογή στα μορφολογικά νευρωνικά δίκτυα παρουσιάστηκαν το Μάιο του 2021 στο διεθνές συνέδριο Μαθηματικής Μορφολογίας Discrete Geometry & Mathematical Morphology [TTM21a], ενώ η εφαρμογή της θεωρίας στο πρόβλημα της κυρτής παρεμβολής παρουσιάστηκε τον Ιούνιο του ίδιου έτους στο διεθνές συνέδριο Επεξεργασίας Φωνής και Σήματος IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing [TTM21b]. Οι συνεισφορές στους γενικευμένους διανυσματικούς χώρους θα εμφανιστούν, μετά από επιλογή των κριτών του πρώτου συνεδρίου, στο Journal of Mathematical Imaging and Vision του διεθνούς εκδοτικού Springer.

Κεφάλαιο 2

Τροπικά Μαθηματικά - max-plus άλγεβρα

Με τον όρο Τροπικά Μαθηματικά αναφερόμαστε στον κλάδο των Μαθηματικών, και συγκεκριμένα των Idempotent Μαθηματικών, όπου οι γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντικαθίστανται από το maximum/minimum και την πρόσθεση, αντίστοιχα. Ο όρος “τροπικός” αποδόθηκε από Γάλλους μαθηματικούς θέλοντας να τιμήσουν το Βραζιλιάνο συνάδελφο τους Imre Simon, που ασχολήθηκε με την περιοχή και τις εφαρμογές της στα πεπερασμένα αυτόματα. Η τροπική άλγεβρα ($\min, +$) και η ισομορφική max-plus άλγεβρα ($\max, +$) έχουν χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση και την επίλυση διαφόρων προβλημάτων στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Cun79], τη Βελτιστοποίηση [AGG12], το Βέλτιστο Έλεγχο [AGL08], τη Μορφολογική Ανάλυση Εικόνας και Σήματος [Mar94], τη Φυσική, τη Γεωμετρία [MS15] κ.ά. Στη μελέτη μας (σε επόμενο κεφάλαιο) θα επεκτείνουμε την περιοχή που καλύπτει ο όρος και θα αναφερθούμε και σε πιο αφηρημένους χώρους, όπου η πράξη της πρόσθεσης αντικαθίσταται από άλλες. Παρ’ όλα αυτά, όπως αναφέρεται στο [MT21], θα εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο “τροπικός” στην ανάλυση μας, καθώς υποδηλώνει έμμεσα ότι οι χώροι αυτοί είναι εφοδιασμένοι με μία τμηματικά γραμμική γεωμετρία, στην οποία οι καμπύλες “τρέπουν”. Προτού παρουσιάσουμε τυπικά την περιοχή, θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε τη σημασία των Τροπικών Μαθηματικών μέσω ενός παραδείγματος από τη Φυσική.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας m , που βρίσκεται υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(x, t)$. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου $\psi(x, t)$ υπακούει την εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi \quad (2.1)$$

Ένα χαρακτηριστικό της παραπάνω εξίσωσης είναι η γραμμικότητα της, το γεγονός δηλαδή ότι αν οι συναρτήσεις ψ_1, ψ_2 αποτελούν λύσεις της, τότε το ίδιο συμβαίνει και για τη συνάρτηση $\Psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ_1, λ_2 . Η ιδιότητα αυτή είναι θεμελιώδης και εξηγεί το φαινόμενο της κβαντικής υπέρθεσης που διέπει τον κβαντικό κόσμο.

Ας θεωρήσουμε τώρα, προσωρινά, ότι η σταθερά του Planck λαμβάνει φανταστικές τιμές, οπότε και θέτουμε $\hbar = \hbar i$

$$h \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi \quad (2.2)$$

2.1. Max-plus άλγεβρα

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $S(x, t) = -h \ln \psi(x, t) \Leftrightarrow \psi(x, t) = e^{-\frac{S(x, t)}{h}}$, έχουμε

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial S}{\partial t}e^{-S/h}\right) &= \frac{h^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial S}{\partial x}e^{-S/h}\right) + V(x, t)e^{-S/h} \\ -\frac{\partial S}{\partial t}e^{-S/h} &= -\frac{h}{2m}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}e^{-S/h} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\left(-\frac{1}{h}\right)e^{-S/h} + V(x, t)e^{-S/h}\right] \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - V(x, t) + \frac{h}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Η εξίσωση αυτή παύει να είναι γραμμική, ωστόσο από την γραμμικότητα της (2.1) και το μετασχηματισμό που θεωρήσαμε, προκύπτει ότι αν οι συναρτήσεις S_1, S_2 αποτελούν λύσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση

$$S = -h \ln\left(e^{-\frac{\lambda_1 + S_1}{h}} + e^{-\frac{\lambda_2 + S_2}{h}}\right), \quad (2.4)$$

δηλαδή υφίσταται μια διαφορετική μορφή υπέρθεσης. Αν λάβουμε το όριο των παραπάνω καθώς το $h \rightarrow 0^+$ (οπότε και προσεγγίζουμε το κλασικό όριο του κβαντικού συστήματος που μελετάμε) τα πράγματα ξεκαθαρίζουν, αφού η (2.3) γίνεται

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - V(x, t) = -H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right), \quad (2.5)$$

η οποία είναι η γνωστή εξίσωση Hamilton-Jacobi που περιγράφει την εξέλιξη της δράσης S ενός κλασικού μηχανικού συστήματος με Χαμιλτονιανή H για ένα σώμα μάζας m , ενώ για την υπέρθεση (2.4) έχουμε

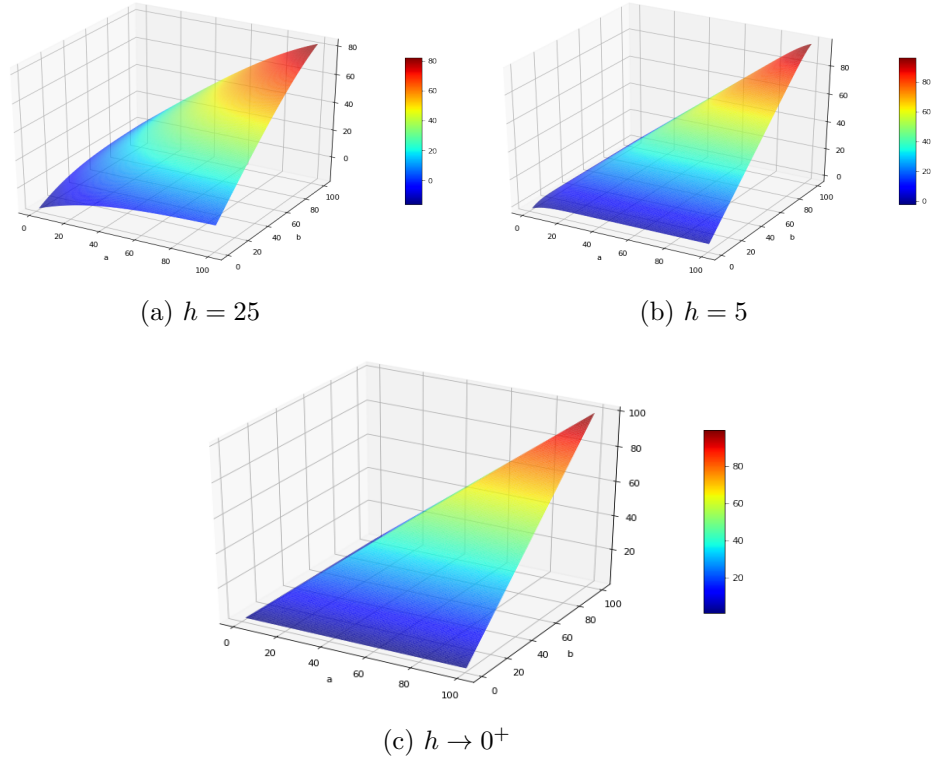
$$\begin{aligned} S &= -h \ln\left(e^{-\frac{\lambda_1 + S_1}{h}} + e^{-\frac{\lambda_2 + S_2}{h}}\right) \rightarrow -h \ln e^{\max\left(-\frac{\lambda_1 + S_1}{h}, -\frac{\lambda_2 + S_2}{h}\right)} \\ &= \min(\lambda_1 + S_1, \lambda_2 + S_2) = (\lambda_1 \odot S_1) \oplus (\lambda_2 \odot S_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

αν με \odot συμβολίσουμε την πρόσθεση και με \oplus το minimum.

Δηλαδή, καθώς μεταβαίνουμε από την κβαντική στην κλασική φυσική, η γραμμική υπέρθεση των κυματοσυναρτήσεων $(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)$ μετατρέπεται σε “γραμμική” υπέρθεση των αντίστοιχων δράσεων στην Τροπική Άλγεβρα $((\lambda_1 \odot S_1) \oplus (\lambda_2 \odot S_2))$. Η διαδικασία που περιγράψαμε ονομάζεται *αποκβαντοποίηση Maslov* (Maslov dequantization) [Mas87; Lit05] και είναι ενδεικτική της χρησιμότητας των Τροπικών Μαθηματικών στη μοντελοποίηση μη γραμμικών φαινομένων και προβλημάτων, καθώς και στην ανάδειξη αναλογιών μεταξύ “κλασικών” και τροπικών μαθηματικών.

2.1 Max-plus άλγεβρα

Επεκτείνοντας τους πραγματικούς αριθμούς, ώστε να περιέχουν και το $-\infty$, και εφοδιάζοντας τους με 2 διμελείς πράξεις, το \max και την πρόσθεση $+$, αποκτά κανείς έναν ημιδακτύλιο (*semiring*) ορισμένο στο $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Θα το συμβολίζουμε με $(\mathbb{R}_{\max}, \max, +)$. Στη δομή αυτή, το \max αντιπροσωπεύει την “πρόσθεση” με ουδέτερο στοιχείο το $-\infty$ και η συμβατική πρόσθεση $+$ τον “πολλαπλασιασμό” με ουδέτερο στοιχείο το 0 και “αντίστροφο στοιχείο” κάθε αριθμού το συμβατικό αντίθετό του. Η απουσία “αντιθέτου” στερεί απ’ τη δομή τον πλήρη χαρακτηρισμό της ως δακτύλιο. Για παράδειγμα η εξίσωση $\max(3, x) = 0$ δεν έχει λύση στο \mathbb{R}_{\max} . Ως **idempotency** ορίζουμε



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση $f(a, b) = -h \ln(e^{-\frac{a}{h}} + e^{-\frac{b}{h}})$, $a, b > 0$ για διάφορες τιμές της σταθεράς h . Στο όριο $h \rightarrow 0^+$ είναι $f(a, b) = \min(a, b)$.

την ιδιότητα $\max(x, x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_{\max}$. Από δω και στο εξής, υιοθετούμε τους συμβολισμούς $x \vee y = \max(x, y)$ και $x \wedge y = \min(x, y)$ που συνηθίζονται σε δομές πλεγμάτων (lattices) και εδώ υπονοούν την ύπαρξη μίας τέτοιας (στην οποία θα αναφερθούμε στο Κεφάλαιο 6).

Για να πραγματοποιήσουμε υπολογισμούς σε περισσότερες από μία διαστάσεις, επεκτείνουμε τις προηγούμενες πράξεις ομοίως με τη Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός 1. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\max}^n$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ και $\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times k}$, τότε ορίζουμε:

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = [x_i \vee y_i]_{i=1}^n \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = [a_{ij} \vee b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{C} = \left[\bigvee_{r=1}^n a_{ir} + c_{rj} \right]_{i,j} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A} \boxplus' \mathbf{C} = \left[\bigwedge_{r=1}^n a_{ir} + c_{rj} \right]_{i,j} \quad (2.10)$$

2.1. Max-plus άλγεβρα

Παρατηρήστε ότι τυπικά η τελευταία πράξη δεν αποτελεί επέκταση κάποιας πράξης του $(\mathbb{R}_{\max}, \max, +)$, αλλά του δυϊκού τροπικού ημιδακτύλιου $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$. Μια πιο αυστηρή θεμελίωση των αλγεβρικών δομών που θα μελετήσουμε θα παρουσιαστεί στο τελευταίο κεφάλαιο, αλλά δεν είναι απαραίτητη για την κατανόηση των ενδιάμεσων κεφαλαίων. Ορίζουμε, επίσης, τη διάταξη μεταξύ διανυσμάτων:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα είναι αύξουσα πράξη στην άλγεβρα αυτή:

Πρόταση 1. Αν $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, τότε $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{A} \boxplus \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{A}$.

Παράδειγμα 2.1.1.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5+2) \vee (0+(-1)) \vee (-2+0) \\ (-2+2) \vee (4+(-1)) \vee (6+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 2. Συμβολίζουμε με \mathbf{I} τον ουδέτερο πίνακα για τον “πολλαπλασιασμό” πινάκων που εξετάζουμε, ο οποίος έχει 0 (το ουδέτερο στοιχείο του “πολλαπλασιασμού”-πρόσθεσης) στην κύρια διαγώνιο και $-\infty$ (το ουδέτερο στοιχείο ως προς την “πρόσθεση”- maximum) αλλού, δηλαδή ισχύει

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{I} = \mathbf{I} \boxplus \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Παράδειγμα 2.1.2.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -\infty & 3 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5+0) \vee (-1+(-\infty)) & (5+(-\infty)) \vee (-1+0) \\ (-\infty+0) \vee (3+(-\infty)) & (-\infty+(-\infty)) \vee (3+0) \end{pmatrix}$$

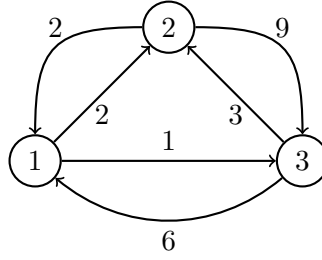
$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -\infty & 3 \end{pmatrix}$$

Μια βασική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τη max-plus άλγεβρα είναι η απουσία “αντίστροφου” ενός πίνακα, δηλαδή στη γενική περίπτωση η εξίσωση

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n} \quad (2.14)$$

δεν έχει λύση ως προς \mathbf{X} , ιδιότητα φυσικά που κληρονομείται απ’ την απουσία “αντιθέτου” στον ημιδακτύλιο $(\mathbb{R}_{\max}, \max, +)$.

Επίσης, ορίζουμε τις δυνάμεις ενός πίνακα για κάθε φυσικό αριθμό k ως εξής:



Σχήμα 2.2: Ο γράφος του παραδείγματος 2.1.3.

Ορισμός 3.

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{A}^{k-1} \boxplus \mathbf{A}, & k > 0 \\ \mathbf{I}, & k = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα από την περιοχή της Θεωρίας Γραφημάτων.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω ένας γράφος G , ο οποίος περιγράφεται από τον πίνακα γειτνίασης

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Αν ενδιαφερόμαστε να βρούμε την τιμή του βαρύτερου μονοπατιού, μήκους το πολύ 2, αρκεί να υπολογίσουμε

$$w_2^* = \max_{i,k,j} a_{ik} + a_{kj} \quad (2.17)$$

Αυτή όμως δεν είναι παρά η μεγαλύτερη τιμή του πίνακα

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \boxplus \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 15 & 12 & 9 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

δηλαδή το 15. Μάλιστα, οι συντεταγμένες του μέγιστου δίνουν την αρχή και το τέλος του μονοπατιού. Επιβεβαιώστε και εποπτικά το αποτέλεσμα στο Σχήμα 2.2.

Η προηγούμενη παρατήρηση είναι αληθής για όλα τα μονοπάτια μήκους το πολύ k και τις αντίστοιχες δυνάμεις του πίνακα \mathbf{A} και, ενώ μπορεί να μη δίνει άμεσα ταχύτερους αλγόριθμους υπολογισμού του βάρους των μονοπατιών, αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα για το πως οι 2 δαχτύλιοι μπορούν να αποτελέσουν μια γλώσσα που επιτρέπει τον αλγεβρικό χειρισμό προβλημάτων της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης.

Η γενικότερη μορφή που μπορεί να πάρει μιιά εξίσωση στην άλγεβρα πινάκων που μελετάμε είναι ως εξής:

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \vee \mathbf{b} = \mathbf{C} \boxplus \mathbf{x} \vee \mathbf{d} \quad (2.19)$$

Παρατηρήστε ότι στη Γραμμική Άλγεβρα η αντίστοιχη εξίσωση γράφεται

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}', \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{C}, \mathbf{b}' = \mathbf{d} - \mathbf{b}, \quad (2.20)$$

2.1. Max-plus άλγεβρα

αλλά κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στη max-plus άλγεβρα, λόγω της απουσίας “αντίθετου”. Οι ειδικές μορφές της (2.19) για τις οποίες έχει αναπτυχθεί αρκετή θεωρία είναι οι εξής δύο:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \boxplus \mathbf{x} \bigvee \mathbf{d}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{d}. \quad (2.22)$$

Η πρώτη θα μάς απασχολήσει μερικώς στις εφαρμογές και αναβάλλουμε τη μελέτη της για τότε, η δεύτερη όμως αποτελεί το θεμελιώδες αντικείμενο πάνω στο οποίο θα εργαστούμε στη διπλωματική αυτή.

Προτού το αντιμετωπίσουμε, κάνουμε ένα βήμα πίσω ώστε να ασχοληθούμε με το σχετικό (και ευκολότερο) πρόβλημα της επίλυσης μιας max-plus ανίσωσης:

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^n a_{ij} + x_j \leq b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.23)$$

Για καθεμία απ’ τις m αυτές ανισώσεις απαιτούμε το μέγιστο n όρων να ’ναι μικρότερο από μία σταθερά b_i , άρα ισοδύναμα απαιτούμε να βρίσκονται και οι n όροι κάτω από τη σταθερά. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} a_{ij} + x_j &\leq b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\leq -a_{ij} + b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\leq \bigwedge_{i=1}^m -a_{ij} + b_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{x} &\leq (-\mathbf{A}^T) \boxplus' \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Μόλις αποδείξαμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2 ([Cun79]). Έστω $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^m$. Τότε ισχύει

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ αν και μόνο εάν } \mathbf{x} \leq (-\mathbf{A}^T) \boxplus' \mathbf{b}. \quad (2.25)$$

Το διάνυσμα $(-\mathbf{A}^T) \boxplus' \mathbf{b}$ παίζει καθοριστικό ρόλο και στη λύση της εξίσωσης (2.22), όπως φανερώνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1 ([Cun79]). Έστω $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^m$. Η εξίσωση (2.22) έχει λύση αν και μόνο εάν το διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{x}} = (-\mathbf{A}^T) \boxplus' \mathbf{b} \quad (2.26)$$

αποτελεί λύση της. Η λύση αυτή καλείται **πρωτεύουσα (principal)** και αποτελεί τη μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης.

Απόδειξη. Έστω \mathbf{x} τέτοιο ώστε $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε και $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, άρα από Πρόταση 2 $\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{x}}$, η οποία λόγω της Πρότασης 1, γράφεται

$$\mathbf{A} \boxplus \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.27)$$

όποτε, συναληθεύοντας με την Πρόταση 2, έχουμε τελικά $\mathbf{A} \boxplus \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. □

Σκαλίζοντας λίγο περισσότερο τη δομή της εξίσωσης (2.22), μπορούμε να μάθουμε τα εξής γι' αυτήν:

Πρόταση 3. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ αποτελούν λύσεις της (2.22), τότε το ίδιο ισχύει και για το διάνυσμα $(c + \mathbf{x}) \vee (d + \mathbf{y})$ για κάθε $c, d \in \mathbb{R}_{\max}$ με $c \vee d = 0$.

Απόδειξη. Είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boxplus ((c + \mathbf{x}) \vee (d + \mathbf{y})) &= \left[\bigvee_{j=1}^n a_{ij} + ((c + x_j) \vee (d + y_j)) \right]_{i=1}^m \\ &= \left[\bigvee_{j=1}^n (a_{ij} + c + x_j) \vee (a_{ij} + d + y_j) \right]_{i=1}^m \\ &= \left[\left(\bigvee_{j=1}^n a_{ij} + c + x_j \right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^n a_{ij} + d + y_j \right) \right]_{i=1}^m \\ &= (c + \mathbf{b}) \vee (d + \mathbf{b}) = (c \vee d) + \mathbf{b} = \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

□

Η ιδιότητα αυτή καλείται *max-convexity*, καθώς προσομοιάζει τη γνωστή ιδιότητα της κυρτότητας. Με βάση αυτήν μπορούμε να δείξουμε το εξής για το πλήθος των λύσεων της max-plus εξίσωσης που μελετάμε:

Πρόταση 4. Κάθε εξίσωση της μορφής (2.22) έχει 0, 1 ή ∞ λύσεις.

Απόδειξη. Οι περιπτώσεις 0 και 1 έπονται από το Θεώρημα 1. Έστω \mathbf{x}, \mathbf{y} λύσεις της (2.22) και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $x_k < y_k$ για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε από την Πρόταση 3 κάθε διάνυσμα της μορφής $\mathbf{x} \vee (\gamma + \mathbf{y})$, όπου $\gamma \in (x_k - y_k, 0)$ αποτελεί επίσης λύση. Άρα, η (2.22) έχει άπειρες λύσεις. □

Κλείνουμε την περιληπτική παρουσίαση της max-plus άλγεβρας παραθέτοντας (χωρίς απόδειξη) ορισμένα στοιχεία αναφορικά με προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης (2.22).

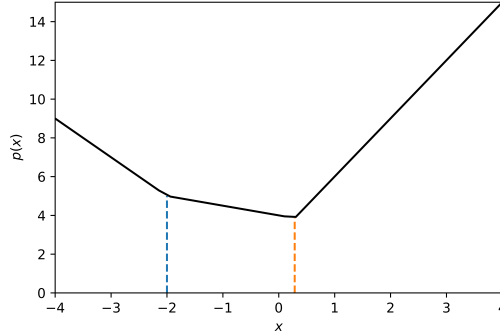
Πρόταση 5. Για το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}$ της εξίσωσης (2.26), ισχύει $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n: \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_p$ για κάθε ℓ_p νόρμα με $p < \infty$.

Πρόταση 6.

$$\hat{\mathbf{x}} + \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \hat{\mathbf{x}}\|_\infty}{2} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_\infty. \tag{2.29}$$

2.2 Τροπική Γεωμετρία

Αν και η προσέγγιση μας στην εργασία αυτή θα είναι κατά βάση αλγεβρική, θα ήταν φτωχή μια παρουσίαση των τροπικών μαθηματικών χωρίς κάποια αναφορά στην ενδιαφέρουσα γεωμετρία τους. Παραπέμπουμε τους ενδιαφερόμενους στο [MS15] για μια εισαγωγή στην περιοχή της Τροπικής Γεωμετρίας.



Σχήμα 2.3: Το τροπικό πολυώνυμο $p(x) = (-2x + 1) \vee (-0.5x + 4) \vee (3x + 3)$. Η τροπική του υπερεπιφάνεια είναι το σύνολο $V(p) = \{-2, 2/7\}$.

Ορισμός 4. Τροπικό μονώνυμο καλείται κάθε όρος της μορφής $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 5. Τροπικό πολυώνυμο καλείται το μέγιστο πολλών τροπικών μονωνύμων, δηλαδή $\bigvee_j (a_j x + b_j)$.

Παρατηρήστε ότι οι ορισμοί αυτοί είναι εντελώς ανάλογοι με αυτούς των κλασικών μονωνύμων και πολυωνύμων, με τη διαφορά ότι έχουμε αντικαταστήσει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού με αυτές του μέγιστου και της πρόσθεσης, αντίστοιχα.

Ως συνάρτηση του x κάθε τροπικό μονώνυμο ταυτίζεται με μία γραμμική συνάρτηση (ευθεία), ενώ τα τροπικά πολυώνυμα αποτελούν τμηματικά γραμμικές (piecewise linear) κυρτές συναρτήσεις (δείτε Σχήμα 2.3). Άμεση είναι η επέκταση των ορισμών σε περισσότερες από μία διαστάσεις, όπου έχουμε $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$ και $\bigvee_j (\mathbf{a}_j^T \mathbf{x} + b_j)$, αντίστοιχα. Προχωράμε στους ορισμούς δύο πολύ σημαντικών ποσοτήτων για κάθε τροπικό πολυώνυμο $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

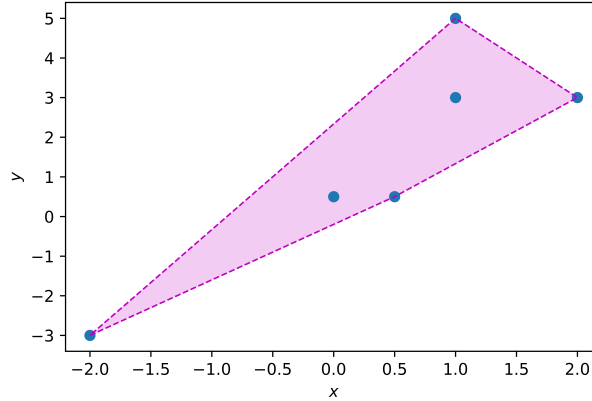
Ορισμός 6. Καλούμε τροπική υπερεπιφάνεια του p , και συμβολίζουμε με $V(p)$, το σύνολο των σημείων στα οποία το μέγιστο επιτυγχάνεται από τουλάχιστον δύο διαφορετικούς όρους-μονώνυμα. Δηλαδή είναι:

$$V(p) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \text{maximum of } p \text{ is attained by at least two terms}\}. \quad (2.30)$$

Ορισμός 7. Καλούμε πολύτοπο Newton του p , και συμβολίζουμε με $\text{Newt}(p)$, το κυρτό περίβλημα (convex hull) των συντελεστών του τροπικού πολυωνύμου. Δηλαδή είναι:

$$\text{Newt}(p) = \left\{ \sum_j \lambda_j \mathbf{a}_j \mid \sum_j \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \forall j \right\} \quad (2.31)$$

Η τροπική υπερεπιφάνεια περιέχει τα σημεία όπου το τροπικό πολυώνυμο είναι μη παραγωγίσιμο, ενώ το πολύτοπο Newton εκφράζει με συμπαγή τρόπο την ουσιαστική πληροφορία που φέρει το πολυώνυμο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρήστε $p(\mathbf{x}) = \bigvee_{j=1}^K (\mathbf{a}_j^T \mathbf{x})$. Τότε για δεδομένο \mathbf{x} , η τιμή του



Σχήμα 2.4: Το Newton πολύτοπο του $p(x, y) = (2x + 3y) \vee (x + 5y) \vee (-2x - 3y) \vee (0.5x + 0.5y) \vee (0.5x + 0y)$

τροπικού πολυώνυμου δίνεται από τη λύση του γραμμικού προγράμματος:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{c}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{c} \in \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K\} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Από τη θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού γνωρίζουμε ότι η βέλτιστη τιμή αντιστοιχεί σε κάποιο \mathbf{c} που βρίσκεται σε κορυφή του κυρτού περιβλήματος των σημείων $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K\}$. Άρα, εξ' ορισμού, σε κάποια κορυφή του $\text{Newt}(p)$. Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, βλέπουμε ότι οι γραμμικές περιοχές του p καθορίζονται πλήρως από τις κορυφές του $\text{Newt}(p)$. Αν το τροπικό πολυώνυμο περιέχει και σταθερούς όρους, τότε η προηγούμενη ιδιότητα μεταφέρεται στις κορυφές του άνω φλοιού του επεκτεταμένου πολύτοπου *Newton*, $\text{ENewt}(p) = \{\sum_j \lambda_j (\mathbf{a}_j, b_j) \mid \sum_j \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \forall j\}$, όπου b_j οι σταθεροί όροι των μονωνύμων. Παραπέμπουμε στο [CM17] για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις ιδιότητες των πολύτοπων *Newton* και λεπτομερείς αποδείξεις.

Τέλος, αναφέρουμε μια όμορφη ιδιότητα που ισχύει για τα τροπικά πολυώνυμα δύο μεταβλητών και συνδέει τους δύο προηγούμενους ορισμούς. Η τροπική τους υπερεπιφάνεια είναι ένας γράφος στο επίπεδο \mathbb{R}^2 με ευθείες ακμές (πιθανώς μη φραγμένες). Αν θεωρήσουμε και το γράφο της τριγωνοποίησης του *Newton* πολύγωνου, τότε τα δύο γραφήματα είναι δυϊκά, δηλαδή οι ακμές του ενός αντιστοιχούν στις κορυφές του άλλου.

Κεφάλαιο 3

Submodularity

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τα κύρια στοιχεία της θεωρίας των submodular συναρτήσεων. Η έννοια του submodularity αφορά συναρτήσεις ορισμένες επί συνόλων και σπανιότερα σε γενικά lattices. Για τις ανάγκες της εργασίας μας, θα περιορίσουμε τη μελέτη σε συναρτήσεις συνόλων, όπου έτσι κι αλλιώς εστιάζει και η βιβλιογραφία και συναντώνται και οι περισσότερες εφαρμογές των συναρτήσεων αυτών στη Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, στην Όραση Υπολογιστών, στη Μηχανική Μάθηση κ.ά. Η συστηματική μελέτη των submodular συναρτήσεων απαντάται αρχικά στις εργασίες του Choquet το 1955 [Cho54] και του Edmonds το 1970 [Edm70], αφορμώμενοι από διαφορετικές αφετηρίες ο καθένας (η μελέτη του πρώτου αφορούσε τη χωρητικότητα των Borel συνόλων του \mathbb{R}^3 , ενώ ο δεύτερος φανέρωσε τη σχέση των submodular συναρτήσεων με τα matroids). Η παρουσίαση μας βασίζεται κυρίως στην εργασία του Lovasz [Lov83] και των Krause, Golovin [KG14].

Σε μια προσπάθεια μετάφρασης, οι submodular συναρτήσεις αποδίδονται ως “υπομοναδιαίες”, αλλά λόγω της ταύτισης του όρου “μοναδιαίος” με τον όρο “unitary” στην γραμμική άλγεβρα και για αποφυγή παρανοήσεων, θα αποφύγουμε τη χρήση του ελληνικού όρου.

3.1 Ορισμός

Ευτυχώς στη γλώσσα των μαθηματικών οι ορισμοί είναι εξαιρετικά ακριβείς.

Ορισμός 8. Έστω ένα σύμπαν συνόλων U και συνάρτηση $f : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$. Η f καλείται *submodular* αν

$$f(A \cup \{k\}) - f(A) \geq f(B \cup \{k\}) - f(B) \quad \forall A \subseteq B \subseteq U, k \notin B. \quad (3.1)$$

Επίσης, μια συνάρτηση f καλείται *supermodular* αν και μόνο αν η $-f$ είναι submodular.

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές αποδίδουν μεγαλύτερη “αξία” στην προσθήκη στοιχείων σε μικρά σύνολα παρά σε μεγάλα. Συχνά χρησιμοποιείται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 9. Έστω ένα σύμπαν συνόλων U και συνάρτηση $f : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$. Η f καλείται submodular αν

$$f(A \cap B) + f(A \cup B) \leq f(A) + f(B) \quad (3.2)$$

3.1. Ορισμός

Αν και κατά τη γνώμη μας ο Ορισμός 8 μεταφέρει πολύ καλύτερα την έννοια του submodularity, έχει αξία να παρουσιαστούν και οι 2, καθώς χρησιμοποιούνται πολύ συχνά αμφότεροι για την απόδειξη ιδιοτήτων και θεωρημάτων για τις submodular συναρτήσεις. Θα αποδείξουμε ότι οι 2 ορισμοί είναι πράγματι ισοδύναμοι.

Πρόταση 7. Οι Ορισμοί 8 και 9 είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (3.1) και έστω $L_1, L_2 \subseteq U$. Είναι $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1$ (ισχύει ακόμα και αν τα L_1, L_2 είναι ξένα μεταξύ τους). Εφαρμόζοντας την (3.1) για $A = L_1 \cap L_2, B = L_1, k_1 \in L_2 \setminus L_1$ έχουμε:

$$f((L_1 \cap L_2) \cup \{k_1\}) - f(L_1 \cap L_2) \geq f(L_1 \cap \{k_1\}) - f(L_1). \quad (3.3)$$

Είναι, όμως, τώρα $(L_1 \cap L_2) \cup \{k_1\} \subseteq L_1 \cup \{k_1\}$ και άρα για κάποιο $k_2 \in L_2 \setminus L_1, k_2 \neq k_1$ έχουμε πάλι απ' την (3.1):

$$f((L_1 \cap L_2) \cup \{k_1, k_2\}) - f((L_1 \cap L_2) \cup \{k_1\}) \geq f(L_1 \cup \{k_1, k_2\}) - f(L_1 \cup \{k_1\}). \quad (3.4)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, γράφουμε τις ανισώσεις που προκύπτουν με τη σταδιακή εισαγωγή όλων των στοιχείων του $L_2 \setminus L_1$ και προσθέτοντας τες κατά μέλη, έχουμε:

$$\begin{aligned} f((L_1 \cap L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)) - f(L_1 \cap L_2) &\geq f(L_1 \cup (L_2 \setminus L_1)) - f(L_1) \iff \\ \iff f(L_2) + f(L_1) &\geq f(L_1 \cup L_2) + f(L_1 \cap L_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Για την ανάποδη κατεύθυνση, υποθέτουμε συνάρτηση f που ικανοποιεί την (3.2) και για $A \subseteq B, k \notin B$ είναι:

$$\begin{aligned} f(A \cup \{k\}) + f(B) &\geq f(A \cup \{k\} \cup B) + f((A \cup \{k\}) \cap B) \iff \\ \iff f(A \cup \{k\}) + f(B) &\geq f(B \cup \{k\}) + f(A) \iff \\ \iff f(A \cup \{k\}) - f(A) &\geq f(B \cup \{k\}) - f(B). \end{aligned} \quad (3.6)$$

□

Ακολούθως, θα δείξουμε ότι οι submodular συναρτήσεις που ορίσαμε μοντελοποιούν φυσικά πολλά προβλήματα της επιστήμης των υπολογιστών.

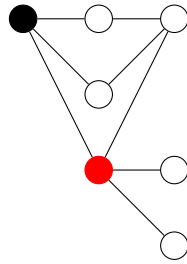
Παράδειγμα 3.1.1. Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. Ορίζουμε ως γείτονες ενός κόμβου $u \in V$, και συμβολίζουμε με $n(u)$, το σύνολο των κόμβων με τους οποίους συνδέεται (δηλαδή υπάρχει ακμή που τους ενώνει). Έστω συνάρτηση $f : 2^V \rightarrow \mathbb{N}$ που αποτιμά πόσους γείτονες έχει ένα σύνολο από κόμβους του γράφου, δηλαδή:

$$f(A) = \left| \bigcup_{u \in A} n(u) \right|$$

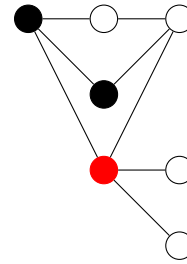
Η συνάρτηση αυτή είναι submodular (βλ. Σχήμα 3.1).

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση της από κοινού εντροπίας είναι επίσης submodular. Μπορεί να το διαπιστώσει κανείς αυτό, μέσω της ερμηνείας της εντροπίας ως μέτρο αβεβαιότητας. Πιο συγκεκριμένα, η αύξηση της αβεβαιότητας περιμένουμε να 'ναι μικρότερη, όταν προσθέτουμε μια τυχαία μεταβλητή σε ένα ήδη μεγάλο σύνολο τυχαίων μεταβλητών, απ' ότι σε ένα υποσύνολο τους.

Παράδειγμα 3.1.3. Η cut function ενός γραφήματος με θετικά βάρη είναι submodular.



(a) Νέοι γείτονες: 4
 $f(A \cup \{k\}) - f(A) = 7 - 3 = 4$



(b) Νέοι γείτονες: 2
 $f(A \cup \{k\}) - f(A) = 7 - 5 = 2$

Σχήμα 3.1: Με μαύρο χρωματίζουμε τους κόμβους που υπάρχουν ήδη στο σύνολο A , με κόκκινο τον κόμβο k που προστίθεται. Όπως είναι εμφανές, η συμβολή ενός κόμβου στους γείτονες ενός συνόλου (περίπτωση (b)) είναι μικρότερη ή ίση απ' ό τι στα υποσύνολα του (περίπτωση (a)).

3.2 Βελτιστοποίηση

Η μεγάλη σημασία των submodular συναρτήσεων έγκειται στο γεγονός πως επιτρέπουν, σε αρκετές περιπτώσεις, την αποδοτική εύρεση των ακροτάτων τους και συνεπώς την αποδοτική εύρεση βέλτιστης λύσης στα προβλήματα που μοντελοποιούν. Η βελτιστοποίηση στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου περιλαμβάνει, εν γένει, εκθετικούς το πλήθος υποψηφίους και χωρίς πρόσθετη γνώση για την δομή του προβλήματος, δεν μπορούμε να ελπίζουμε σε πολυωνυμικούς αλγόριθμους. Στη συνεχή βελτιστοποίηση, οι κυρτές συναρτήσεις παίζουν κεντρικό ρόλο, αφού επιτρέπουν την εξασφαλισμένη εύρεση ολικών ελαχίστων και απ' αυτές πηγάζουν τα κύρια εργαλεία μας για την μη γραμμική βελτιστοποίηση [Roc70; BV04]. Αντίστοιχα σπουδαία φαίνεται να είναι η σημασία των submodular συναρτήσεων στη διακριτή βελτιστοποίηση [Lon83].

3.2.1 Ελαχιστοποίηση submodular συναρτήσεων

Έστω submodular συνάρτηση $F : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{S \subseteq U} F(S) \tag{Π1}$$

Για την επίλυση του γενικού αυτού προβλήματος, είναι χρήσιμη η έννοια της **επέκτασης Lovasz (Lovasz extension)** μιας συνάρτησης. Κίνητρο για τον ορισμό που ακολουθεί είναι η επιθυμία να επεκτείνουμε συναρτήσεις από έναν διακριτό χώρο σε έναν συνεχή. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να παρατηρήσουμε πως μια συνάρτηση που είναι ορισμένη επί συνόλων είναι, ισοδύναμα, ορισμένη στις κορυφές του μοναδιαίου υπερκύβου (αφού κάθε στοιχείο του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου είναι μια συλλογή από άσους, τα στοιχεία που ανήκουν σε αυτό, και μηδενικά, όσα δεν ανήκουν). Ο συνεχής χώρος που θα επεκτείνουμε τη συνάρτηση είναι το εσωτερικό του υπερκύβου και αυτό θα γίνει με τον εξής τρόπο.

Ορισμός 10. Έστω συνάρτηση $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η Lovasz επέκτασή της ορίζεται ως η συνάρτηση $\hat{f} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\lambda \sim U([0,1])} [f(\{i | x_i \geq \lambda\})], \forall \mathbf{x} \in [0, 1]^n \tag{3.7}$$

3.2. Βελτιστοποίηση

Είναι φανερό ότι η \hat{f} αποτελεί πράγματι επέκταση της f αφού $\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n$. Η σημασία της επέκτασης Lovasz γίνεται εμφανής με τις επόμενες δύο προτάσεις.

Πρόταση 8. [Bac13] Έστω *submodular* συνάρτηση $F : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$, f η αντίστοιχη συνάρτηση ορισμένη στις κορυφές του υπερκύβου διάστασης $|U|$ και \hat{f} η Lovasz επέκταση της. Τότε ισχύει:

$$\min_{S \subseteq U} F(S) = \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{|U|}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in [0,1]^{|U|}} \hat{f}(\mathbf{x})$$

Πρόταση 9. [Bac13] Έστω $F : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$, f η αντίστοιχη συνάρτηση ορισμένη στις κορυφές του υπερκύβου διάστασης $|U|$ και \hat{f} η Lovasz επέκταση της. Η F είναι *submodular* αν και μόνο αν η \hat{f} είναι κυρτή.

Επομένως, το πρόβλημα (Π1) που μας ενδιαφέρει, μεταφράζεται σε ένα πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης για το οποίο έχουμε αλγόριθμους για να το επιλύσουμε, αποδοτικά, σε πολυωνυμικό χρόνο (π.χ μέσω της μεθόδου του Ελλειψοειδούς). Επίσης, με τις παραπάνω προτάσεις θεμελιώνεται και η σχέση των *submodular* με τις κυρτές συναρτήσεις.

3.2.2 Μεγιστοποίηση *submodular* συναρτήσεων

Έστω *submodular* συνάρτηση $F : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max_{S \subseteq U} F(S) \tag{Π2}$$

Όπως είδαμε ήδη απ' τα παραδείγματα, το πρόβλημα αποτελεί γενίκευση του προβλήματος εύρεσης μέγιστου cut σε ένα γράφημα, οπότε το αντίστοιχο του (Π2) πρόβλημα απόφασης είναι \mathcal{NP} -complete. Επομένως, δε μπορούμε να προσβλέπουμε σε πολυωνυμικούς αλγόριθμους για την επίλυση του, όπως είχαμε στην προηγούμενη ενότητα. Μάλιστα, για συναρτήσεις χωρίς εγγυήσεις για την μονοτονία ή το πρόσημο τους, το (Π2) είναι μη προσεγγίσιμο (inapproximable) σε πολυωνυμικό χρόνο. Ωστόσο, για μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων υπάρχουν αποδοτικοί αλγόριθμοι με εγγυημένο σταθερό λόγο προσέγγισης.

Ορισμός 11. Έστω σύνολο U και συνάρτηση $F : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$. Η F καλείται αύξουσα αν

$$F(A) \leq F(B) \quad \forall A \subseteq B \subseteq U$$

Γι' αυτή την κλάση συναρτήσεων και με έναν περιορισμό πληθικότητας του συνόλου της βέλτιστης λύσης, έχουμε

$$\max_{S \subseteq U} F(S) \text{ s.t } |S| \leq k \tag{Π2'}$$

Για το πρόβλημα αυτό, το 1978 οι Nemhauser και Wolsey έδειξαν ότι ο, φυσικός, άπληστος αλγόριθμος για το πρόβλημα πετυχαίνει σταθερό λόγο προσέγγισης. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε με το κενό σύνολο και προσθέτουμε σε κάθε βήμα το στοιχείο εκείνο του $U \setminus S_k$ με την μεγαλύτερη δυνατή συνεισφορά $F(S_k \cup \{u_i\}) - F(S_k)$. Επαναλαμβάνουμε k φορές και για το προκύπτον σύνολο S_k ισχύει $F(S_k) \geq (1 - \frac{1}{e})F(S^*)$, όπου $F(S^*)$ η βέλτιστη λύση του (Π2').

3.2.3 Submodular Set Cover

Συχνά στις εφαρμογές ανακύπτει ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι η πληθικότητα ενός συνόλου υπό κάποιον περιορισμό για τη λύση που εκφράζεται μέσω μιας submodular συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, μια μεγάλη κλάση προβλημάτων μοντελοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} \arg \min_{C \subseteq J} |C| \\ \text{s.t. } F(C) = F(J), \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου F μία αύξουσα και submodular συνάρτηση. Το πρόβλημα φέρει την ονομασία Submodular Set Cover, καθώς αποτελεί γενίκευση του γνωστού προβλήματος Minimum Set Cover. Υπενθυμίζουμε ότι στο Minimum Set Cover δίνεται ένα σύνολο $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, μια συλλογή υποσυνόλων του S_1, S_2, \dots, S_k και ζητείται η μικρότερη συλλογή εξ' αυτών που καλύπτει (cover) το U .

Πρόταση 10. Το Minimum Set Cover μπορεί να γραφεί στη μορφή (3.8).

Απόδειξη. Έστω $J = \{1, 2, \dots, k\}$ και $F(C) = |\bigcup_{j \in C} S_j|$, $C \subseteq J$. Φυσικά, εξετάζουμε στιγμιότυπα του προβλήματος που έχουν λύση, δηλαδή τέτοια ώστε $\bigcup_{j \in J} S_j = U$ και, άρα $|\bigcup_{j \in J} S_j| = |U|$. Επομένως, η εύρεση του ελάχιστου καλύμματος του U μέσω των S_1, S_2, \dots, S_k εκφράζεται:

$$\begin{aligned} \arg \min_{C \subseteq J} |C| \\ \text{s.t. } F(C) = |U| = F(J), \end{aligned} \quad (3.9)$$

Μένει να δείξουμε το submodularity της F . Έστω $B \subseteq J, l \notin B$, τότε

$$\begin{aligned} F(B \cup \{l\}) - F(B) &= \left| \bigcup_{j \in B \cup \{l\}} S_j \right| - \left| \bigcup_{j \in B} S_j \right| \\ &= |\{u_i \in U \mid u_i \in S_l \setminus (\bigcup_{j \in B} S_j)\}| \\ &\geq |\{u_i \in U \mid u_i \in S_l \setminus (\bigcup_{j \in A} S_j)\}|, \forall A \subseteq B \\ &= F(A \cup \{l\}) - F(A), \forall A \subseteq B, \end{aligned} \quad (3.10)$$

που, μαζί με την εύκολη παρατήρηση της μονοτονίας της F , ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Για την κλάση αυτή των προβλημάτων, μια παραλλαγή του άπληστου αλγόριθμου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα για τη μεγιστοποίηση μιας submodular συνάρτησης επιτυγχάνει και εδώ σταθερό λόγο προσέγγισης. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας από το κενό σύνολο $S_0 = \emptyset$, διαλέγουμε σε κάθε επανάληψη k , το στοιχείο εκείνο j_k που την τρέχουσα στιγμή προσφέρει την μεγαλύτερη ωφέλεια αναφορικά με τη συνάρτηση F , δηλαδή $S_k = S_{k-1} \cup \{j_k\}$ όπου $j_k = \arg \max_{j \in J \setminus S_{k-1}} F(S_{k-1} \cup j)$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν το $F(S_k)$ γίνει ίσο με $F(J)$. Στο [Wol82] αποδεικνύεται ότι για το μέγεθος της λύσης που παράγει η παραπάνω διαδικασία, έστω μετά από T βήματα, ισχύει:

Πρόταση 11. Αν S^* είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.8), τότε

$$|S| \leq |S^*| \left(1 + \ln\left(\frac{F(J) - F(\emptyset)}{F(J) - F(S_{T-1})}\right)\right). \quad (3.11)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση F λαμβάνει μονάχα ακέραιες τιμές, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$|S| \leq |S^*| H(\max_{j \in J} F(\{j\}) - F(\emptyset)), \quad (3.12)$$

όπου $H(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ ο νιοστός αρμονικός αριθμός.

3.3 Submodularity ratio

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε εμφανής η πρακτική σημασία του submodularity μιας συνάρτησης, ωστόσο προφανώς δεν είναι κάθε συνάρτηση συνόλων submodular ή supermodular. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να επεκτείνουμε ιδέες και αλγόριθμους απ' τη submodular βελτιστοποίηση και σε συναρτήσεις που μοιάζουν με αυτές. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι μέσω του παρακάτω ορισμού [DK18]:

Ορισμός 12. Έστω σύμπαν συνόλων U και $f : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Το submodularity ratio της f ορίζεται ως

$$\gamma_{U,k}(f) = \min_{L \subseteq U, S: |S| \leq k, S \cap L = \emptyset} \frac{\sum_{x \in S} f(L \cup \{x\}) - f(L)}{f(L \cup S) - f(L)} \quad (3.13)$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύει την έννοια του submodularity, όπως φαίνεται και από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 12. Μια αύξουσα συνάρτηση $f : 2^U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι submodular αν και μόνο εάν $\gamma_{U,k}(f) \geq 1$, $\forall U, k$.

Τα παραπάνω επιτρέπουν τη θεωρητική ανάλυση των αλγόριθμων που παρουσιάστηκαν στη προηγούμενη ενότητα για συναρτήσεις που δεν είναι κατ' ανάγκη submodular, ενώ αποτελούν επίσης ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη του submodularity μιας συνάρτησης.

Κεφάλαιο 4

Αραιές Αναπαραστάσεις

4.1 Κίνητρο - Αραιές αναπαραστάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα

Τις τελευταίες 2 δεκαετίες έχει γνωρίσει ιδιαίτερα μεγάλη άνθηση η περιοχή των Αραιών αναπαραστάσεων [Ela10]. Στον πυρήνα της περιοχής αυτής βρίσκεται το απλό σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

όπου οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους (δηλαδή $m < n$) και ο πίνακας \mathbf{A} είναι πλήρους τάξης. Όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Η θεωρία των Αραιών αναπαραστάσεων ενδιαφέρεται για τη λύση εκείνη με τα περισσότερα μηδενικά, την *αραιότερη* (*sparsest*). Καλείται έτσι, διότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (επομένως δε χρειάζεται να αποθηκευτούν αυτές οι τιμές ώστε να υπολογιστεί ο πολλαπλασιασμός \mathbf{Ax}) και η πληροφορία που φέρει η λύση είναι, επομένως, αραιά κατανεμημένη στο διάνυσμα \mathbf{x} . Αν με $\|\mathbf{x}\|_0$ συμβολίσουμε το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x} , η αναζήτηση του αραιότερου διανύσματος γράφεται:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που το παραπάνω πρόβλημα είναι ενδιαφέρον για μαθηματικούς, αλλά και μηχανικούς. Πολλά ψηφιακά όργανα μέτρησης, όπως μικρόφωνα και κάμερες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ένας γραμμικός μετασχηματισμός επί του σήματος εισόδου. Επομένως, το πρόβλημα (4.1) περιγράφει το σενάριο κατά το οποίο έχουν ληφθεί λίγες μετρήσεις \mathbf{b} ενός άγνωστου σήματος/αντικειμένου \mathbf{x} μέσω ενός γνωστού μηχανήματος \mathbf{A} . Εμείς επιθυμούμε να μάθουμε το αρχικό \mathbf{x} που παρήγαγε τις μετρήσεις, αλλά η Γραμμική Άλγεβρα μάς πληροφορεί ότι υπάρχουν άπειροι υποψήφιοι. Η απαίτηση της αραιότητας του διανύσματος \mathbf{x} τοποθετείται αρχικά για να μειώσει το πλήθος των πιθανών αυτών λύσεων. Φαινομενικά, κανείς δε μάς εγγυάται ότι αυτή είναι μια εύλογη απαίτηση που θα μάς επιτρέψει να βρούμε το πραγματικό άγνωστο \mathbf{x} , αλλά η επιτυχία των Αραιών Αναπαραστάσεων έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι στην πράξη πάρα πολλά σήματα

είναι αραιά ή μπορούν να γίνουν αραιά σε κατάλληλη βάση. Για παράδειγμα, μία ψηφιακή αναπαράσταση ενός δειγματοληπτημένου ημιτόνου δεν είναι αραιή, αλλά ο DFT αυτής είναι. Το ίδιο ισχύει και για φυσικές εικόνες ή σεισμικά σήματα, τα οποία έχουν αραιούς wavelet μετασχηματισμούς. Έτσι, η απαίτηση της αραιότητας καθίσταται εύλογη, καθώς έχουμε τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε κατάλληλα το όργανο της μέτρησης \mathbf{A} (συχνά καλείται και λεξικό-*dictionary*¹) και, άρα, και η ανάκτηση του άγνωστου σήματος \mathbf{x} πιθανή.

Δυστυχώς, όμως, το (4.2) είναι ένα δύσκολο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Σκεφτείται το ανάλογο του (4.2) πρόβλημα απόφασης για την ειδική περίπτωση όπου το \mathbf{x} λαμβάνει μονάχα τις τιμές 0 και 1: Υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ με $\|\mathbf{x}\|_0 = k$ τέτοιο ώστε $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$; Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ πιθανές λύσεις και δε μοιάζει να υπάρχει τρόπος να γλυτώσουμε την εξαντλητική αναζήτηση τους. Πράγματι [Nat95], το πρόβλημα είναι \mathcal{NP} -hard και φαίνεται η κουβέντα που προηγήθηκε να οδηγεί σε ένα αδιέξοδο. Τουναντίον! Στην πραγματικότητα, εδώ ξεκινάει η θεωρία των αραιών αναπαραστάσεων που μελετάει υπό ποιές προϋποθέσεις (που αφορούν τον πίνακα \mathbf{A}) το πρόβλημα (4.2) μπορεί να λυθεί αποδοτικά (σε πολυωνυμικό χρόνο), διάφορους αλγόριθμους για την επίλυση του, σε ποιές περιπτώσεις υπάρχει μοναδική λύση, καθώς και διάφορες παραλλαγές του (4.2) (π.χ. παρουσία θορύβου στις μετρήσεις). Το πλήθος των σύγχρονων εφαρμογών των αραιών σημάτων πιστοποιεί την επιτυχία αυτής της θεωρίας, ενώ ιδέες που ξεκίνησαν απ' αυτή γέννησαν την περιοχή του Compressed Sensing [Don06; CRT06], μια καινοτομική προσέγγιση στη μη-προσαρμοστική δειγματοληψία σημάτων μέσω τυχαίων και incoherent μετρήσεων με πολύ μεγάλο όγκο πρακτικών εφαρμογών (π.χ. σε MRIs).

Το βάθος της θεωρίας και οι εφαρμογές της στο σύγχρονο κόσμο μάς ώθησαν να μελετήσουμε παρόμοιες ιδέες σε προβλήματα μη γραμμικής φύσεως που περιλαμβάνουν max-+ υπερθέσεις, όπως αυτές που συναντώνται στη max-plus άλγεβρα. Έτσι, λοιπόν, ο πυρήνας της θεωρίας που θα αναπτύξουμε είναι η εξίσωση:

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\max}^m, \quad (4.3)$$

Θα ενδιαφερθούμε για τις αραιές λύσεις αυτής της εξίσωσης, με τη διαφορά ότι πλέον θα καλούμε ένα διάνυσμα αραιό όταν έχει πολλές τιμές ίσες με $-\infty$, καθώς αυτό είναι το ουδέτερο στοιχείο της “πρόσθεσης” (του max) στους χώρους που μελετάμε. Η έννοια της αραιότητας στη max-plus άλγεβρα εισήχθη από τους Τσιάμης και Μαραγκός στην εργασία τους [TM19], όπου θεμελιώθηκε η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος, ξεκίνησε η ανάπτυξη της θεωρίας αραιών προσεγγιστικών λύσεων μιας max-plus και μελετήθηκε υπό ποιές προϋποθέσεις μπορεί να ανακτηθεί ένα πραγματικά αραιό διάνυσμα. Προτού παρουσιάσουμε τη θεωρία, κρίνουμε σκόπιμο να δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής όπου μια αραιά λύση της παραπάνω εξίσωσης θα ήταν χρήσιμη.

Έστω το μη γραμμικό σύστημα επεξεργασίας σήματος

$$y[n] = \max(y[n-1] + a, x[n]), \quad n \geq 0, \quad (4.4)$$

όπου a ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση που το σύστημα y έχει αρχική κατάσταση $-\infty$, δηλαδή $y[-1] = -\infty$, τότε μπορούμε να δούμε μέσω επαγωγής ότι η απόκριση του

¹Όπως οι άνθρωποι συνθέτουν μεγάλα λεξικά λέξεων ώστε να μπορούν να κατασκευάζουν μικρές και περιεκτικές προτάσεις, έτσι και οι μηχανικοί σχεδιάζουν πλεοναστικά λεξικά-βάσεις όπου τα σήματα ενδιαφέροντος εκφράζονται με περιεκτικό ή, καλύτερα, *sparse* τρόπο [Mal09].

4.2. Αραιές αναπαραστάσεις στη max-plus άλγεβρα

συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$y[n] = \bigvee_{k=0}^n x[k] + (n - k)a, \quad n \geq 0. \quad (4.5)$$

Στο [Mar94], όπου μελετώνται συστήματα τέτοιου τύπου, αποδεικνύεται ότι το συγκεκριμένο σύστημα δρα ως ένα φίλτρο “υψηλών κλίσεων”, αφού αφήνει να περάσουν στην έξοδο μονάχα τα κομμάτια του x με κλίση μεγαλύτερη ή ίση από a . Υποθέτουμε ότι λαμβάνουμε ορισμένες μετρήσεις από την έξοδο του συστήματος στις αύξουσα διατεταγμένες χρονικές στιγμές m_1, m_2, \dots, M και αναζητούμε το αρχικό σήμα $x[0], x[1], \dots, x[M]$. Έχουμε δηλαδή την εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} y[m_1] \\ y[m_2] \\ \vdots \\ y[M] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 a & (m_1 - 1)a & \dots & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & \dots & -\infty \\ m_2 a & (m_2 - 1)a & \dots & (m_2 - m_1)a & \dots & 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M a & (M - 1)a & \dots & (M - m_1)a & \dots & (M - m_2)a & \dots & a & 0 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[M] \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

η οποία είναι της μορφής (4.3). Η πιο αραιή λύση της περιγράφει το αρχικό σήμα που εξηγεί τα δεδομένα και μπορεί να αποθηκευτεί με το μικρότερο δυνατό κόστος. Πέρα απ' αυτό, μπορεί να χαρακτηριστεί ως η απλούστερη εξήγηση των μετρήσεων και είναι επιθυμητή στο φιλοσοφικό πλαίσιο που διέπει την αραιή επανάσταση στην επεξεργασία σήματος. Για τους λόγους αυτούς, ο υπολογισμός της αραιότερης λύσης είναι σημαντικός. Αφότου παρουσιάσουμε τη θεωρία, θα μελετήσουμε κι άλλες εφαρμογές των αραιών λύσεων max-plus εξισώσεων.

4.2 Αραιές αναπαραστάσεις στη max-plus άλγεβρα

Ορισμός 13. Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ καλείται *αραιό* (*sparse*) αν έχει πολλές τιμές ίσες με $-\infty$.

Ορισμός 14. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$. Ονομάζουμε *σύνολο υποστήριξης* (*support set*) του \mathbf{x} , και συμβολίζουμε με $\text{supp}(\mathbf{x})$, το σύνολο που υποδεικνύει τις θέσεις στις οποίες το \mathbf{x} δε λαμβάνει την τιμή $-\infty$. Είναι δηλαδή:

$$\text{supp}(\mathbf{x}) = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_j \neq -\infty\}. \quad (4.7)$$

Παράδειγμα 4.2.1. Για $\mathbf{a} = (1, -3, 4.5, -\infty, 0, -\infty)^T$ και $\mathbf{b} = (-\infty, 6, -20, 12, 1, 1)^T$ είναι $\text{supp}(\mathbf{a}) = \{1, 2, 3, 5\}$ και $\text{supp}(\mathbf{b}) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Το \mathbf{a} θεωρείται αραιότερο του \mathbf{b} , καθώς $|\text{supp}(\mathbf{a})| < |\text{supp}(\mathbf{b})|$.

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς, το πρόβλημα εύρεσης της αραιότερης λύσης μιας max-plus εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n} |\text{supp}(\mathbf{x})| \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Το πρόβλημα γράφεται ως αναζήτηση επί ενός διανυσματικού χώρου, αλλά οι max-plus περιορισμοί το περιορίζουν στην ουσία σε έναν διακριτό χώρο. Για να το δούμε αυτό, χρειάζεται να θυμηθούμε τον ορισμό της πρωτεύουσας λύσης μιας max-plus εξίσωσης:

$$\hat{\mathbf{x}} = (-\mathbf{A})^T \boxplus \mathbf{b}. \quad (4.9)$$

Εξ' ορισμού είναι δηλαδή:

$$\hat{x}_j = \bigwedge_{i=1}^m (-a_{ij} + b_i), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

Η συνδυαστική υφή του προβλήματος εμφανίζεται αν θεωρήσουμε, για κάθε στήλη j , το σύνολο των γραμμών i που επιτυγχάνεται η παραπάνω ελαχιστοποίηση, ήτοις:

$$M_j = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \hat{x}_j = -a_{ij} + b_i\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Παρατηρήστε ότι κάθε γραμμή i πρέπει να εμφανίζεται σε τουλάχιστον ένα M_j ώστε να ισχύει η ισότητα της συγκεκριμένης γραμμής στην εξίσωση. Δηλαδή το σύνολο των γραμμών $\{1, 2, \dots, m\}$ πρέπει να καλύπτεται από τα $(M_j)_{j=1}^n$. Αν κάποιο M_j μπορεί να αφαιρεθεί απ' τη συλλογή, χωρίς να “χαλάσει” το κάλυμμα, τότε ισοδύναμα μπορούμε να θέσουμε την αντίστοιχη τιμή x_j όσο μικρή (μέχρι και $-\infty$!) θέλουμε, χωρίς να χαλάσουμε το αποτέλεσμα της πράξης $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}$. Έπεται, λοιπόν, ότι προκειμένου να θέσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες τιμές ίσες με $-\infty$, αρκεί να βρούμε το ελάχιστο κάλυμμα του $\{1, 2, \dots, m\}$ μέσω των $(M_j)_{j=1}^n$. Μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει αναγωγή του προβλήματος Set Cover στο πρόβλημα (4.8), επομένως τα δύο προβλήματα είναι ακριβώς ισοδύναμα.

Θεώρημα 2 ([TM19]). *Το αντίστοιχο του (4.8) πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard.*

Παραπέμπουμε στο [TM19] για τη λεπτομερή και αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος (που σκιαγραφήσαμε παραπάνω), ενώ στο Κεφάλαιο 6 θα παρουσιαστεί μια γενίκευση του. Φυσικά, η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος δεν πρέπει να αποθαρρύνει την ενασχόληση με την περιοχή, διότι αφενός η σύνδεση με το Minimum Set Cover επιτρέπει την άμεση προσεγγιστική επίλυση του με προσεγγιστικούς αλγόριθμους (βλέπε Κεφάλαιο 3), αφετέρου στη Γραμμική Άλγεβρα το πρόβλημα (4.2) είναι υπολογιστικά όμοιο αλλά τελικά η θεωρία αποδείχτηκε πλούσια.

Γενικεύουμε, τώρα, το πρόβλημα υπό την εξής έννοια: θα συνεχίσουμε να αναζητούμε αρκετά αραιά διανύσματα, αλλά θα επιτρέψουμε στη λύση να ικανοποιεί μονάχα προσεγγιστικά την εξίσωση $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Αν και μοιάζει φιλόδοξο να μελετήσουμε τη γενίκευση ενός ήδη δύσκολου προβλήματος, θα αποδείξουμε ότι το νέο πρόβλημα λύνεται επίσης προσεγγιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Έτσι, δε χάνουμε σε υπολογιστική πολυπλοκότητα, αλλά αντιθέτως κερδίζουμε σε ευρωστία, αφού το νέο πρόβλημα εφαρμόζεται και στην περίπτωση ύπαρξης θορύβου στις μετρήσεις \mathbf{b} . Δεδομένου ενός αποδεκτού λάθους ϵ , σχηματίζουμε λοιπόν το νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n} |\text{supp}(\mathbf{x})| \\ \text{s.t. } \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_p^p \leq \epsilon, \quad p < \infty, \\ \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2. Αραιές αναπαραστάσεις στη *max-plus* άλγεβρα

Η μορφή του προβλήματος αυτού για $p = 1$ εξετάστηκε στο [TM19]. Το σφάλμα προσέγγισης το μετράμε μέσω οποιασδήποτε $l_p, p < \infty$, νόρμας, ενώ εισάγουμε και έναν επιπλέον περιορισμό ως προς τη διάταξη του διανύσματος \mathbf{x} . Συγκεκριμένα περιορίζουμε τη διαστολή του \mathbf{x} μέσω του πίνακα \mathbf{A} να βρίσκεται “κάτω” από το διάνυσμα \mathbf{b} ή ισοδύναμα (Θεώρημα 2) το \mathbf{x} να βρίσκεται “κάτω” από την πρωτεύουσα λύση $\hat{\mathbf{x}} = (-\mathbf{A})^\top \boxplus \mathbf{b}$. Ο περιορισμός αυτός είναι συχνά θεμιτός στην πράξη (ειδικά σε προβλήματα συγχρονισμού), αλλά τοποθετείται εδώ κυρίως για τεχνικούς λόγους. Ένας τρόπος να απαλλαγούμε απ’ αυτόν θα συζητηθεί στη συνέχεια. Τέλος, παρατηρήστε ότι για $\epsilon = 0$ το πρόβλημα ταυτίζεται με το προηγούμενο (4.8).

Το νέο πρόβλημα αναζητεί ένα διάνυσμα επί του \mathbb{R}_{\max}^n , αλλά θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης επί ενός συνόλου, όπως ακριβώς και το (4.8). Έστω $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Λήμμα 1. (Προβολή επί του *support set*, l_p case) Έστω $T \subseteq J$,

$$X_T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n : \text{supp}(\mathbf{x}) = T, \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad (4.13)$$

και $\mathbf{x}|_T$ διάνυσμα τέτοιο ώστε $\hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο T και $-\infty$ εκτός, όπου $\hat{\mathbf{x}}$ η πρωτεύουσα λύση (δηλαδή το $\mathbf{x}|_T$ είναι ο περιορισμός του $\hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο σύνολο T). Είναι:

- $\mathbf{x}|_T \in X_T$.
- $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T\|_p^p \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_p^p \forall \mathbf{x} \in X_T$.

Απόδειξη.

- Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T \leq \mathbf{b}$. Για $j \in T$ είναι $[\mathbf{x}|_T]_j = \hat{x}_j$, ενώ για $j \in J \setminus T$, $[\mathbf{x}|_T]_j = -\infty \leq \hat{x}_j$. Άρα,

$$\mathbf{x}|_T \leq \hat{\mathbf{x}} \iff \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T \leq \mathbf{A} \boxplus \hat{\mathbf{x}} \implies \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T \leq \mathbf{b}. \quad (4.14)$$

Δηλαδή, $\mathbf{x}|_T \in X_T$.

- Έστω $\mathbf{x} \in X_T$, τότε $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \iff \mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{x}}$, το οποίο συνεπάγεται (μιας και τα $\mathbf{x}, \mathbf{x}|_T$ έχουμε τιμές ίσες με $-\infty$ εξωτερικά του T):

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{x}|_T \iff \mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T \leq \mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}. \quad (4.15)$$

Άρα:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T\|_p^p = \sum_{j \in T} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T)_j^p \leq \sum_{j \in T} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x})_j^p = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_p^p. \quad (4.16)$$

□

Το προηγούμενο Λήμμα μάς πληροφορεί ότι μπορούμε να θέσουμε τις πεπερασμένες τιμές του \mathbf{x} ίσες με αυτές της πρωτεύουσας λύσης $\hat{\mathbf{x}}$. Πράγματι,

Πρόταση 13. Αν \mathbf{x}_{OPT} η βέλτιστη λύση του (4.12), τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα λύση με ίδιο support set και τιμές ίσες με τις αντίστοιχες της πρωτεύουσας λύσης $\hat{\mathbf{x}}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathbf{z} = \begin{cases} \hat{x}_j, & j \in \text{supp}(\mathbf{x}_{\text{OPT}}) \\ -\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (4.17)$$

τότε $\text{supp}(\mathbf{x}_{\text{OPT}}) = \text{supp}(\mathbf{z})$ και, από το Λήμμα 1, $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{z}\|_p^p \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{\text{OPT}}\|_p^p$ and $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{z} \leq \mathbf{b}$. Δηλαδή, το \mathbf{z} αποτελεί επίσης βέλτιστη λύση του (4.12). \square

Επομένως, η μόνη μεταβλητή που έχει σημασία στο πρόβλημα (4.12) είναι το support set. Για να γίνει σαφές αυτό, προχωράμε στους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 15. Έστω $T \subseteq J$ ένα υποψήφιο support set, και \mathbf{A}_j η j -ιστή στήλη του \mathbf{A} . Καλούμε διάνυσμα λάθους και συμβολίζουμε με $\mathbf{e} : 2^J \rightarrow \mathbb{R}^m$ την εξής παράσταση:

$$\mathbf{e}(T) = \begin{cases} \mathbf{b} - \bigvee_{j \in T} (\mathbf{A}_j + \hat{x}_j), & T \neq \emptyset \\ \bigvee_{j \in J} \mathbf{e}(\{j\}), & T = \emptyset. \end{cases} \quad (4.18)$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε T , ισχύει $\bigvee_{j \in T} (\mathbf{A}_j + \hat{x}_j) \leq \bigvee_{j \in J} (\mathbf{A}_j + \hat{x}_j) \leq \mathbf{b}$, που σημαίνει ότι το παραπάνω διάνυσμα $\mathbf{e}(T) = (e_1(T), e_2(T), \dots, e_m(T))^T$ είναι πάντα μη αρνητικό. Ορίζουμε, επίσης, τη συνάρτηση λάθους $E_p : 2^J \rightarrow \mathbb{R}$:

$$E_p(T) = \|\mathbf{e}(T)\|_p^p = \sum_{i=1}^m (e_i(T))^p. \quad (4.19)$$

Με βάση τους ορισμούς αυτούς, το πρόβλημα (4.12) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{T \subseteq J} |T| \\ & \text{s.t. } E_p(T) \leq \epsilon \end{aligned} \quad (4.20)$$

Θα θεωρήσουμε στιγμιότυπα του προβλήματος που έχουν λύση, δηλαδή τέτοια ώστε $E_p(J) \leq \epsilon$. Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας βασίζονται στις εξής ιδιότητες της E_p .

Θεώρημα 3. Η συνάρτηση λάθους E_p είναι φθίνουσα και *supermodular*.

Απόδειξη. Σχετικά με τη μονοτονία, έστω $\emptyset \neq C \subseteq B \subseteq J$, τότε

$$\bigvee_{j \in C} (\mathbf{A}_j + \hat{x}_j) \leq \bigvee_{j \in B} (\mathbf{A}_j + \hat{x}_j) \iff \mathbf{e}(B) \leq \mathbf{e}(C), \quad (4.21)$$

και άρα υψώνοντας τις, μη αρνητικές, συνιστώσες των δύο διανυσμάτων στην p -ιστή δύναμη και αθροίζοντας τις ανισότητες, λαμβάνουμε $E_p(B) \leq E_p(C)$. Η περίπτωση για $C = \emptyset$ ελέγχεται εύκολα μέσω του ορισμού του \mathbf{e} .

4.2. Αραιές αναπαραστάσεις στη max-plus άλγεβρα

Θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό (12) του submodularity ratio ώστε να αποδείξουμε το supermodularity της συνάρτησης. Έστω $S, L \subseteq U \subseteq J$, με $|S| \leq K, S \cap L = \emptyset$ και θεωρήστε $f(U) = -E_p(U), \forall U$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_{U,K}(f) &= \min_{L,S} \frac{\sum_{s_k \in S} f(L \cup \{s_k\}) - f(L)}{f(L \cup S) - f(L)} = \\ &= \min_{L,S} \frac{\sum_{s_k \in S} \{-\sum_{i=1}^m [b_i - \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + \sum_{i=1}^m [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p\}}{-\sum_{i=1}^m [b_i - \bigvee_{j \in LUS} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + \sum_{i=1}^m [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p} = \\ &= \min_{L,S} \frac{\sum_{s_k \in S} \sum_{i=1}^m -[b_i - \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p}{\sum_{i=1}^m -[b_i - \bigvee_{j \in LUS} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα I_1 το σύνολο:

$$I_1 = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \bigvee_{j \in LUS} (A_{ij} + \hat{x}_j) = \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j) \right\}, \quad (4.22)$$

ενώ για κάθε $s_k \in S$, ορίζουμε δύο σύνολα δεικτών:

$$I_2(s_k) = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j) = \bigvee_{j \in LUS} (A_{ij} + \hat{x}_j) > \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j) \right\} \quad (4.23)$$

και:

$$I_3(s_k) = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \bigvee_{j \in LUS} (A_{ij} + \hat{x}_j) > \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j) > \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j) \right\}. \quad (4.24)$$

Τότε, αν

$$\Sigma_1 = \sum_{s_k \in S} \sum_{i \in I_1, I_2(s_k)} -[b_i - \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p, \quad (4.25)$$

το submodularity ratio γίνεται:

$$\begin{aligned} \gamma_{U,K}(f) &= \min_{L,S} \frac{\Sigma_1 + \sum_{s_k \in S} \sum_{i \in I_3(s_k)} -[b_i - \bigvee_{j \in LU\{s_k\}} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p + [b_i - \bigvee_{j \in L} (A_{ij} + \hat{x}_j)]^p}{\Sigma_1} \\ &\geq 1, \forall U, K. \end{aligned}$$

που σημαίνει (Πρόταση 12) ότι η f είναι submodular ή ισοδύναμα η $E_p = -f$ είναι supermodular. \square

Θέτοντας $\tilde{E}_p(T) = \max(E_p(T), \epsilon)^2$, το (4.20) γράφεται:

$$\begin{aligned} \arg \min_{T \subseteq J} |T| \\ \text{s.t. } \tilde{E}_p(T) = \tilde{E}_p(J) \end{aligned} \quad (4.26)$$

²Η νέα, φραγμένη, συνάρτηση λάνθους παραμένει supermodular; βλέπε [KG14].

Algorithm 1: Approximate solution of problem (4.12)

Input: \mathbf{A}, \mathbf{b}
 Compute $\hat{\mathbf{x}} = (-\mathbf{A})^\top \boxplus \mathbf{b}$
if $E_p(J) > \epsilon$ **then**
 | **return** Infeasible
 Set $T_0 = \emptyset, k = 0$
while $E_p(T_k) > \epsilon$ **do**
 | $j = \arg \min_{s \in J \setminus T_k} E_p(T_k \cup \{s\})$
 | $T_{k+1} = T_k \cup \{j\}$
 | $k = k + 1$
end
 $x_j = \hat{x}_j, j \in T_k$ and $x_j = -\infty$, otherwise
return \mathbf{x}, T_k

άρα αποτελεί ένα παράδειγμα submodular set cover προβλήματος. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε τέτοιο πρόβλημα λύνεται προσεγγιστικά απ' τον φυσικό άπληστο αλγόριθμο. Έτσι, ο Αλγόριθμος 1 λύνει το πρόβλημα (4.26), άρα και το αρχικό (4.12), προσεγγιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Για την υπολογιστική του πολυπλοκότητα, ο υπολογισμός της πρωτεύουσας λύσης απαιτεί $\mathcal{O}(nm)$ χρόνο και η άπληστη δόμηση - δείκτη προς δείκτη- του support set της λύσης πραγματοποιείται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$. Καλούμε τις λύσεις *Sparse Greatest Lower Estimates (SGLE)* του \mathbf{b} . Σχετικά με το λόγο προσέγγισης μεταξύ της βέλτιστης λύσης και της εξόδου του Αλγόριθμου 1, έχουμε:

Πρόταση 14. Έστω \mathbf{x} η έξοδος του Αλγόριθμου 1 μετά από $k > 0$ επαναλήψεις του εσωτερικού βρόγχου και T_k το αντίστοιχο support set. Αν T^* είναι το support set της βέλτιστης λύσης του προβλήματος (4.12), τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\frac{|T_k|}{|T^*|} \leq 1 + \log \left(\frac{m\Delta^p - \epsilon}{E_p(T_{k-1}) - \epsilon} \right), \quad (4.27)$$

όπου $\Delta = \bigvee_{i,j} (b_i - A_{ij} - \hat{x}_j)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 11 ισχύει το εξής φράγμα για την έξοδο του άπληστου αλγόριθμου σε supermodular set cover προβλήματα:

$$\frac{|T_k|}{|T^*|} \leq 1 + \log \left(\frac{f(\emptyset) - f(J)}{f(T_{k-1}) - f(J)} \right) \quad (4.28)$$

Στην περίπτωση μας είναι $f = \tilde{E}_p$. Παρατηρήστε ότι, καθώς $k > 0$, είναι $\tilde{E}_p(\emptyset) = E_p(\emptyset) \leq m\Delta^p$, $0 \leq \tilde{E}_p(J) = \epsilon$ και $\tilde{E}_p(T_{k-1}) > \epsilon$. Το ζητούμενο φράγμα έπεται. \square

Ο παραπάνω λόγος μάς προειδοποιεί να περιμένουμε λιγότερο βέλτιστα support set και, επομένως, λιγότερο αραιά διανύσματα καθώς αυξάνουμε την τάξη της νόρμας p με την οποία μετράμε το σφάλμα προσέγγισης. Μάς προειδεάζει, επίσης, για ένα αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας καθώς το $p \rightarrow \infty$, το οποίο θα θεμελιωθεί στην επόμενη υποενότητα.

4.2.1 Αραιά διανύσματα με μικρό ℓ_∞ σφάλμα

Σε αυτή την υποενότητα θα συζητήσουμε έναν τρόπο να άρουμε τον περιορισμό $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ στο πρόβλημα (4.12). Παρ' ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η εισαγωγή του είναι απαραίτητη [TM19], σε άλλες αποτρέπει την εξέταση πιθανώς αραιότερων διανυσμάτων. Παραλείποντας τον περιορισμό, από την άλλη, καθιστά ασαφή την αναζήτηση λύσεων με μικρό ℓ_p ($p < \infty$) σφάλμα. Για παράδειγμα, υπάρχει πρόσφατη αναφορά στη βιβλιογραφία ότι είναι \mathcal{NP} -hard ο χαρακτηρισμός ενός σημείου ως τοπικό ελάχιστο για ℓ_2 προσέγγιση [Hoo19]. Για το λόγο αυτό, στρέφουμε την προσοχή μας την περίπτωση $p = \infty$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 1, το πρόβλημα $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_\infty$ επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή και μπορεί να υπολογιστεί σε $\mathcal{O}(nm)$ χρόνο, προσθέτοντας στην πρωτεύουσα λύση το μισό ℓ_∞ λάθος της. Το νέο αυτό διάνυσμα δεν ικανοποιεί απαραίτητα τον περιορισμό $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (για την ακρίβεια τον ικανοποιεί μονάχα όταν η πρωτεύουσα λύση αποτελεί ακριβώς λύση της εξίσωσης), οπότε μάς δείχνει έναν τρόπο να δομήσουμε το πρόβλημα (4.12) χωρίς τον περιορισμό αυτό.

Θα δείξουμε, αρχικά, ότι το πρόβλημα (4.12), όταν εξετάζουμε την ℓ_∞ νόρμα, καθίσταται δυσκολότερο απ' ότι πριν και μη-προσεγγίσιμο από τον άπληστο Αλγόριθμο 1. Επομένως, θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n} |\text{supp}(\mathbf{x})| \\ \text{s.t. } \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_\infty \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Παρομοίως με το πρόβλημα της προηγούμενης υποενότητας, το πρόβλημα αυτό δεν είναι παρά ένα πρόβλημα αναζήτησης επί ενός συνόλου.

Λήμμα 2. (Προβολή επί του *support set*, ℓ_∞ case) Έστω $T \subseteq J$, $\mathbf{x}|_T$ ορισμένο ως $\hat{\mathbf{x}}$ εντός του T και $-\infty$ εκτός, και $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}|_T + \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T\|_\infty}{2}$. Για κάθε $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ με $\text{supp}(\mathbf{z}) = T$, είναι:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{z}\|_\infty \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T\|_\infty}{2}. \quad (4.30)$$

Απόδειξη. (Σχεδιάγραμμα) Κρατώντας σταθερό το *support set* του υπό εξέταση διανύσματος και ίσο με T , ισοδύναμα παραλείπουμε από την εξίσωση τις στήλες και τις συνιστώσες των \mathbf{A} και \mathbf{x} , αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στο T (αφού δε θα εξεταστούν κατά την αποτίμηση του maximum). Έτσι παίρνουμε μία νέα εξίσωση με ίδιο διάνυσμα \mathbf{b} και περιορισμένα \mathbf{A}, \mathbf{x} . Το διάνυσμα \mathbf{x}^* που ελαχιστοποιεί το ℓ_∞ λάθος σε αυτή προκύπτει αν στην πρωτεύουσα λύση προσθέσουμε το μισό ℓ_∞ σφάλμα της. Αλλά παρατηρήστε ότι η πρωτεύουσα λύση της νέας εξίσωσης έχει τις ίδιες τιμές με την προηγούμενη εντός του T (προκύπτει απ' το Λήμμα 1), δηλαδή είναι ακριβώς το διάνυσμα $\mathbf{x}|_T$. Επεκτείνοντας το \mathbf{x}^* πίσω στον αρχικό χώρο \mathbb{R}_{\max}^n δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα. \square

Επομένως βλέπουμε ότι ισχύει μία αντίστοιχη με την 13 Πρόταση.

Πρόταση 15. Αν \mathbf{x}_{OPT} η βέλτιστη λύση του (4.29), τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα λύση με ίδιο *support set* και τιμές ίσες με τις αντίστοιχες της πρωτεύουσας λύσης $\hat{\mathbf{x}}$ συν το μισό ℓ_∞ σφάλμα της.

Ορίζοντας $E_\infty(T) = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}|_T\|_\infty}{2}$, το πρόβλημα (4.29) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{T \subseteq J} |T| \\ & \text{s.t. } E_\infty(T) \leq \epsilon \end{aligned} \quad (4.31)$$

Δυστυχώς το πρόβλημα αυτό δεν επιδέχεται προσεγγιστική λύση μέσω του άπληστου Αλγόριθμου 1 (για την ακρίβεια, μέσω της παραλλαγής του Αλγόριθμου 1 όταν αντί για E_p έχουμε E_∞), αφού ο περιορισμός ισότητας εκφράζεται μέσω συνάρτησης E_∞ , η οποία αν και φθίνουσα, δεν είναι supermodular. Το παρακάτω αντιπαράδειγμα αποκαλύπτει επίσης ότι το submodularity ratio (Ορισμός 12) της είναι 0. Επομένως, δεν είναι ούτε προσεγγιστικά supermodular και η λύση που θα δώσει ο άπληστος Αλγόριθμος 1 δεν έχει καμία εγγύηση ως προς τη βελτιστότητα της [DK18].

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε η πρωτεύουσα λύση $\hat{\mathbf{x}}$ είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λάθους σε διάφορα σύνολα:

- Αν $T = \{3\}$, είναι $\hat{\mathbf{x}}|_{\{3\}} = (-\infty, -\infty, 0)^\top$ και

$$E_\infty(\{3\}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \bigvee_{j \in \{3\}} (\mathbf{A}_j + \hat{\mathbf{x}}|_{\{3\},j})\|_\infty = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

- Ομοίως, όταν $T = \{1, 3\}$, $E_\infty(\{1, 3\}) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2}.$

- $T = \{2, 3\}$, $E_\infty(\{2, 3\}) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2}.$

- $T = \{1, 2, 3\}$, $E_\infty(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.$

Έστω, τώρα, $f = -E_\infty$, $L = \{3\}$, $S = \{1, 2\}$, τότε, από την (3.13), έχουμε:

$$\frac{f(\{3\} \cup \{1\}) - f(\{3\}) + f(\{3\} \cup \{2\}) - f(\{3\})}{f(\{3\} \cup \{1, 2\}) - f(\{3\})} = \frac{-1/2 + 1/2 - 1/2 + 1/2}{0 + 1/2} = 0, \quad (4.32)$$

που σημαίνει ότι η f έχει submodularity ratio 0, δηλαδή η E_∞ δεν είναι ούτε προσεγγιστικά supermodular.

4.2. Αραιές αναπαραστάσεις στη *max-plus* άλγεβρα

Παρ' όλο που η προηγούμενη συζήτηση δεν επιτρέπει την άπληστη επίλυση του (4.29) με κάποια εγγύηση ως προς τη βελτιστότητα της λύσης, προτείνουμε την εξής μέθοδο για να λάβουμε ένα ικανοποιητικά αραιό διάνυσμα με μικρό ℓ_∞ λάθος. Πρώτα, αποκτάμε ένα αραιό διάνυσμα $\mathbf{x}_{p,\epsilon}$ λύνοντας το (4.12) για κάποια p, ϵ . Έπειτα, προσθέτουμε στο διάνυσμα αυτό το μισό ℓ_∞ σφάλμα του $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}\|_\infty/2$. Όπως αποδεικνύουμε, το νέο αυτό διάνυσμα ελαχιστοποιεί το ℓ_∞ σφάλμα μεταξύ όλων των διανυσμάτων με το ίδιο support set.

Πρόταση 16. Έστω $\mathbf{x}_{\text{SMMAE}} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ διάνυσμα που ορίζεται ως:

$$\mathbf{x}_{\text{SMMAE}} = \mathbf{x}_{p,\epsilon} + \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}\|_\infty}{2}, \quad (4.33)$$

όπου $\mathbf{x}_{p,\epsilon}$ είναι λύση του (4.12) για δεδομένα (p, ϵ) . Τότε για κάθε $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ με $\text{supp}(\mathbf{z}) = \text{supp}(\mathbf{x}_{p,\epsilon})$, ισχύει:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{z}\|_\infty \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{\text{SMMAE}}\|_\infty = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}\|_\infty}{2}, \quad (4.34)$$

και, επίσης,

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{\text{SMMAE}}\|_\infty \leq \frac{\sqrt[p]{\epsilon}}{2}. \quad (4.35)$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι το $\mathbf{x}_{p,\epsilon}$ ισούται με την πρωτεύουσα λύση $\hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο $\text{supp}(\mathbf{x}_{p,\epsilon})$. Επομένως η πρώτη πρόταση έπεται απ' το Λήμμα 2. Σχετικά με τη δεύτερη, έχουμε:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{\text{SMMAE}}\|_\infty = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}\|_\infty}{2} = \frac{\bigvee_i (b_i - [\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}]_i)}{2}. \quad (4.36)$$

Είναι όμως:

$$\left(\bigvee_i b_i - [\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}]_i\right)^p = \bigvee_i (b_i - [\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}]_i)^p \leq \sum_i (b_i - [\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}]_i)^p \leq \epsilon, \quad (4.37)$$

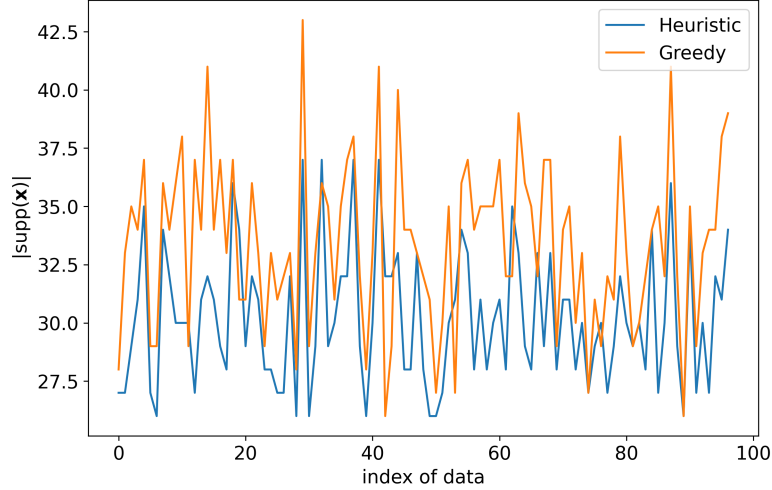
άρα

$$\bigvee_i (b_i - [\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}_{p,\epsilon}]_i) \leq \sqrt[p]{\epsilon} \quad (4.38)$$

και το αποτέλεσμα έπεται απ' την (4.36). Σημειώστε ότι το φράγμα γίνεται όλο και πιο σφιχτό, καθώς το p αυξάνεται. \square

Η παραπάνω μέθοδος δίνει αραιά διανύσματα που αποτελούν προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης ως προς το ℓ_∞ σφάλμα, δίχως την ανάγκη του περιορισμού $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Ύστερα από τον υπολογισμό του διανύσματος $\mathbf{x}_{p,\epsilon}$, το $\mathbf{x}_{\text{SMMAE}}$ απαιτεί $\mathcal{O}(m|\text{supp}(\mathbf{x}_{p,\epsilon})| + |\text{supp}(\mathbf{x}_{p,\epsilon})|) = \mathcal{O}((m+1)|\text{supp}(\mathbf{x}_{p,\epsilon})|)$ χρόνο. Καλούμε το $\mathbf{x}_{\text{SMMAE}}$ *Sparse Minimum Max Absolute Error (SMMAE) estimate* του \mathbf{b} .

Παραθέτουμε τώρα ένα πείραμα σε συνθετικά δεδομένα, ώστε να εξετάσουμε την ικανότητα της προτεινόμενης μεθόδου.



Σχήμα 4.1: Η πληθικότητα του support set που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο για το (4.29) (πορτοκαλί), και από την ευριστική μέθοδο της Πρότασης 16 (μπλέ). Δίδεται για 100 διαφορετικά ζεύγη δεδομένων \mathbf{A}, \mathbf{b} .

Παράδειγμα 4.2.3. Συλλέγουμε 100 τυχαία ζεύγη πινάκων $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1000}$, όπου κάθε τιμή του \mathbf{A} δειγματοληπτείται από μία κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 2^2)$, ενώ κάθε τιμή του \mathbf{b} από την τυπική κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$.

Οργανώνουμε το πείραμα ως εξής: για κάθε ζεύγος πινάκων \mathbf{A}, \mathbf{b} , επιλύουμε πρώτα το πρόβλημα (4.12) με $p = 150$ και $\epsilon = (2 \cdot 2.5)^{150}$ μέσω του άπληστου Αλγόριθμου 1 ώστε να αποκτήσουμε ένα αραιό διάνυσμα που αποτελεί προσεγγιστική λύση ως προς την ℓ_{150} νόρμα και ύστερα προσθέτουμε το μισό ℓ_{∞} σφάλμα σε αυτό, αποκτώντας έτσι ένα αραιό διάνυσμα που έχει ℓ_{∞} σφάλμα μικρότερο από 2.5 (δείτε Πρόταση 16 γιατί συμβαίνει αυτό). Επιλέγουμε μεγάλης τάξεως νόρμα, ώστε το τελικό ℓ_{∞} να είναι κοντά στο θεωρητικό φράγμα 2.5. Στη συνέχεια, λύνουμε απευθείας το ℓ_{∞} πρόβλημα (4.29) με τον Αλγόριθμο 1 (με την τροποποίηση της συνάρτησης λάθους, δηλαδή η E_p γίνεται E_{∞}) για $\epsilon = 2.5$ και, εν τέλει, συγκρίνουμε τις πληθικότητες του support set των λύσεων που παράγουν οι δύο μέθοδοι.

Η ευριστική μέθοδος δίνει median πληθικότητα 30, ενώ η απευθείας προσέγγιση 33, επιβεβαιώνοντας έτσι πειραματικά την εγγυρότητα της μεθόδου μας. Παρ' όλο που η ωφέλεια μοιάζει μικρή, το Σχήμα 4.1 αποκαλύπτει ότι η απευθείας άπληστη λύση μπορεί να παράξει αχρείαστα μεγάλο support set (παρατηρήστε τα spikes στην άπληστη καμπύλη), με αποτέλεσμα η διαφορά των δύο μεθόδων να μπορεί να γίνει εξαιρετικά μεγάλη.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

Έχοντας παρουσιάσει το θεωρητικό υπόβαθρο των αραιών λύσεων στους μη γραμμικούς χώρους που μελετάμε, θα επιχειρήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο να αναδείξουμε εφαρμογές της θεωρίας αυτής. Θα παρουσιάσουμε, αρχικά, ένα παράδειγμα στον έλεγχο **δυναμικών συστημάτων** ο χώρος κατάστασης των οποίων περιγράφεται από max-plus πράξεις πινάκων. Στη συνέχεια, θα μεταβούμε σε λιγότερο “εξωτικές” περιοχές εφαρμογών και θα μελετήσουμε το θεμελιώδες πρόβλημα της **κυρτής παρεμβολής**. Τέλος, θα συζητηθεί η εφαρμογή των ιδεών στην ελαχιστοποίηση μιας συγκεκριμένης κλάσης Νευρωνικών Δικτύων, των αποκαλούμενων **Μορφολογικών Νευρωνικών Δίκτυων**.

5.1 Εφαρμογή στον έλεγχο max-plus δυναμικών συστημάτων

Στην άλγεβρα που εξετάζουμε, τα δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που προσομοιάζουν στην περιγραφή τα κλασικά γραμμικά συστήματα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k-1) \bigvee \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \boxplus \mathbf{x}(k) \bigvee \mathbf{D} \boxplus \mathbf{u}(k). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Τέτοιου είδους μοντέλα, που αποκαλούνται και max-linear, χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για να περιγράψουμε και να αναλύσουμε συστήματα που έχουν περιορισμούς συγχρονισμού. Όπως και στα κλασικά γραμμικά συστήματα, προσπαθούμε να απαντήσουμε ερωτήσεις αναφορικά με την τελική κατάσταση του συστήματος, την ελεγκσιμότητα του κ.ά. Θα δούμε παρακάτω πως ιδέες και αλγόριθμοι της προηγούμενης ενότητας είναι χρήσιμοι στην αντιμετώπιση τέτοιων ερωτημάτων.

Μία ενδιαφέρουσα κλάση συστημάτων της μορφής (5.1) αποτελούν τα συστήματα που οδηγούνται σε *σταθερά εξελισσόμενες καταστάσεις* (steady regime [Cun62; But10]) για κάποια πραγματική σταθερά. Δηλαδή, συστήματα για τα οποία:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, k_0 \in \mathbb{N} : \mathbf{x}(k) = \lambda + \mathbf{x}(k-1) \quad \forall k \geq k_0. \tag{5.2}$$

5.1. Εφαρμογή στον έλεγχο *max-plus* δυναμικών συστημάτων

Εν απουσία εισόδου¹, δηλαδή για $\mathbf{u}(k) = (-\infty, -\infty, \dots, -\infty)^T$, η (5.1) γι' αυτά τα συστήματα γράφεται:

$$\lambda + \mathbf{x}(k-1) = \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k-1) \quad \forall k \geq k_0, \quad (5.3)$$

εξίσωση που μας φανερώνει τον όμορφο γεωμετρικό χαρακτηρισμό τέτοιων συστημάτων: πρόκειται για συστήματα που οδηγούνται σε καταστάσεις - *max-plus* ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A} και το σταθερό βήμα λ αποτελεί την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Στη γενική περίπτωση, όπου επιθυμούμε να επηρεάσουμε την κατάσταση του συστήματος μέσω της εισόδου, αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ώ για κάποια χρονική στιγμή k_0 να ισχύει:

$$\mathbf{x}(k_0) = (\mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B}) \boxplus \mathbf{u}(k_0) \quad (5.4)$$

όπου $\mathbf{\Delta}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{A}^2 \vee \mathbf{A}^3 \vee \dots$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k_0 + 1) &= \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0) \vee \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0 + 1) = \\ &= \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0) \vee \mathbf{B} \boxplus (\lambda + \mathbf{u}(k_0)) \stackrel{(5.4)}{=} \\ &= \mathbf{A} \boxplus (\mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0)) \vee (\lambda + \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0)) = \\ &= (\mathbf{A} \boxplus \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A})) \vee (\lambda + \mathbf{I}) \boxplus \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0) = \\ &= (\lambda + \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A})) \boxplus \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0) = \\ &= \lambda + \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0) \stackrel{(5.4)}{=} \lambda + \mathbf{x}(k_0), \end{aligned} \quad (5.5)$$

όπου στην 2η γραμμή υιοθετήσαμε τον νόμο ελέγχου $\mathbf{u}(k_0 + 1) = \lambda + \mathbf{u}(k_0)$. Δείξαμε δηλαδή ότι φέραμε ένα τυχόν σύστημα σε μια σταθερά εξελισσόμενη κατάσταση. Με επαγωγή, αποδεικνύεται ότι αν αυξάνουμε την είσοδο με σταθερό βήμα (δηλαδή για $\mathbf{u}(k_0 + N) = N\lambda + \mathbf{u}(k_0)$) έχουμε:

$$\mathbf{x}(k_0 + N) = N\lambda + \mathbf{x}(k_0). \quad (5.6)$$

Για να επιτύχουμε τον έλεγχο του συστήματος με αυτό τον τρόπο, βέβαια, έχουμε υποθέσει την αλήθεια της (5.4), για την ικανοποίηση της οποίας αρκεί να ισχύει (εξ' ορισμού του συστήματος (5.1)):

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0 - 1) \vee \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0) = (\mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B}) \boxplus \mathbf{u}(k_0). \quad (5.7)$$

Αν βρούμε διάνυσμα $\mathbf{u}(k_0)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0 - 1) = \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0), \quad (5.8)$$

τότε από Θεώρημα 1 θα είναι και $\mathbf{u}(k_0) \leq -(\mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B})^T \boxplus \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0 - 1)$ και, άρα, $\mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k_0) \leq \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}(k_0 - 1)$, αφού:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) &\geq \mathbf{I} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B} &\geq \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow -(\mathbf{\Delta}(-\lambda + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B})^T &\leq (-\mathbf{B})^T. \end{aligned} \quad (5.9)$$

¹Λέμε ότι η είσοδος "απουσιάζει" όταν το διάνυσμα \mathbf{u} είναι ταυτοτικά ίσο με $-\infty$, γιατί τότε δε χρειάζεται να υπολογιστεί ο πολλαπλασιασμός $\mathbf{B} \boxplus \mathbf{u}(k)$, αφού θα είναι επίσης ταυτοτικά $-\infty$. Άρα, είναι σα να σβήνουμε τις μηχανές εισόδου, σα να τις αφαιρούμε απ' το όλο σύστημα.

Άρα, για να ικανοποιείται η συνθήκη (5.7) **αρκεί** τελικά να λύσουμε την εξίσωση (5.8). Έτσι, υιοθετώντας έναν απλό νόμο ελέγχου, μπορούμε να "σταθεροποιήσουμε" το σύστημα (υπό την έννοια της (5.2)). Στην περίπτωση, τώρα, που η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις, μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και να βρούμε την αραιότερη. Μια τέτοια λύση μάς επιτρέπει να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σχετικά με τη σταθεροποίηση του state, "ενεργοποιώντας" το μικρότερο αριθμό απ' τις εισόδους του συστήματος για όλο τον ορίζοντα μετά τη χρονική στιγμή k_0 (εφ' όσον ο νόμος ελέγχου είναι αθροιστικός, το support set της εισόδου δε θα αλλάξει). Αν το πρόβλημα έχει μικρή διάσταση, μπορεί να αναζητηθεί το καθολικά αραιότερο διάνυσμα. Διαφορετικά, μπορούμε να καταφύγουμε στην άπληστη κατασκευή του support set σε χρόνο $O(nm + n^2)$ με το λόγο προσέγγισης που συζητήθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος των αραιών προσεγγιστικών λύσεων της (5.8) (μάλιστα εδώ είναι ένα παράδειγμα όπου ο περιορισμός για τη διάταξη της λύσης είναι απαραίτητος), αλλά τότε προφανώς το state x θα αποκλίνει από την επιθυμητή σταθερά εξελισσόμενη κατάσταση. Η μελέτη της δυναμικής του συστήματος υπό αυτές τις συνθήκες αφήνεται για μελλοντική εργασία.

Παρατήρηση: Στην ειδική περίπτωση που η εξίσωση (5.8) έχει λύση για λ ίσο με την μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda(\mathbf{A})$ (maximum cycle mean), τότε ο πίνακας $-\lambda + \mathbf{A}$ έχει μέγιστη ιδιοτιμή 0. Αυτό συνεπάγεται πως $\Delta(-\lambda + \mathbf{A}) = \mathbf{I} \vee (-\lambda + \mathbf{A}) \vee (-\lambda + \mathbf{A})^2 \vee \dots \vee (-\lambda + \mathbf{A})^{n-1}$, οπότε ο υπολογισμός του γίνεται αποδοτικά, μέσω του αλγόριθμου Floyd-Warshall σε χρόνο $O(n^3)$. Παραπέμπουμε στο [But10] για εκτενείς αναφορές στα παραπάνω.

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω σύστημα της μορφής (5.1) με πίνακες κατάστασης:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

και αρχική κατάσταση $\mathbf{x}(0) = (-6 \ 1)^T$. Έστω ότι θέλουμε να θέσουμε το σύστημα σε σταδιακή άυξηση από αυτή την κατάσταση, με σταθερό βήμα. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω. Διαλέγουμε βήμα ίσο με το maximum cycle mean του πίνακα \mathbf{A} , το οποίο ισούται με 6. Υπολογίζουμε:

- $\Delta(-6 + \mathbf{A}) = \mathbf{I} \vee (-6 + \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$
- $\Delta(-6 + \mathbf{A}) \boxplus \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

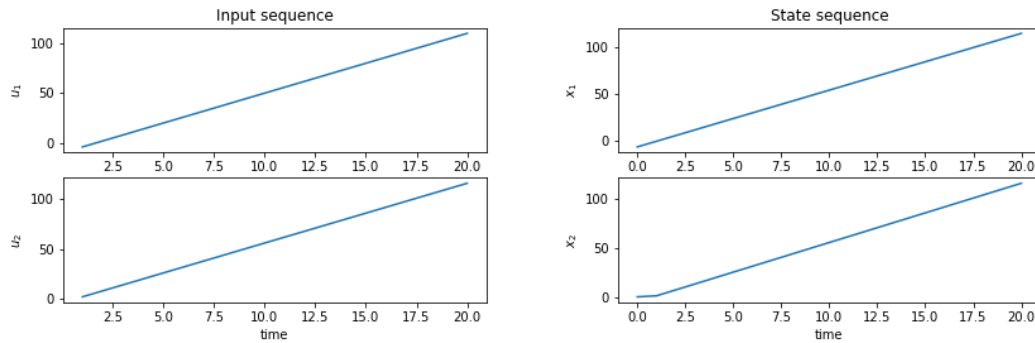
Επομένως, αναζητούμε διάνυσμα $\mathbf{u}(1)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \boxplus \mathbf{u}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

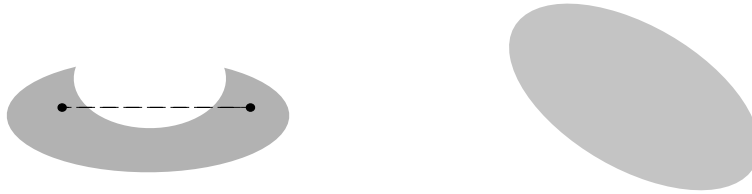
Λύση του παραπάνω αποτελεί κάθε διάνυσμα της μορφής $\mathbf{u}(1) = (c \ 2)^T, c \leq -4$. Άρα είναι δυνατός ο έλεγχος του συστήματος (βλέπε Σχήμα 5.1), ώστε να αυξάνεται αυτό με σταθερό βήμα 6, π.χ. μέσω του σχήματος

$$\begin{cases} u_1 = -\infty \\ u_2(k) = 6(k-1) + 2, \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

5.2. Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών



Σχήμα 5.1: Η εξέλιξη του state και του input



Σχήμα 5.2: Ένα παράδειγμα μη κυρτού και κυρτού, αντίστοιχα, υποσυνόλου του επιπέδου.

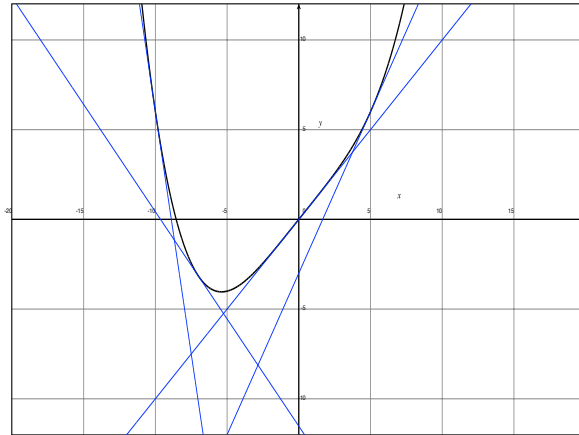
5.2 Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών

Οι κυρτές συναρτήσεις αποτελούν ένα από τα σπουδαιότερα αντικείμενα στη Θεωρία Βελτιστοποίησης. Ανακύπτουν σε κάθε λογής προβλήματα των επιστημών και της μηχανικής και είναι περιζήτητες σε όλους τους κλάδους. Ο λόγος; Επιτρέπουν την εύρεση μοναδικών βέλτιστων απαντήσεων στα προβλήματα που μοντελοποιούν. Υπενθυμίζουμε ορισμένα στοιχεία γι' αυτές (με όχι ιδιαίτερα αυστηρό τρόπο) και ύστερα συζητάμε θέματα προσέγγισης τους. Παραπέμπουμε στα κλασικά συγγράματα [Roc70; BV04] για μια λεπτομερή μελέτη της κυρτής ανάλυσης και βελτιστοποίησης.

Ορισμός 16. Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κυρτό (convex)** αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του C ανήκει στο C .

Ορισμός 17. Έστω σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Μία συνάρτηση $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **κυρτή (convex)** αν τα σημεία που βρίσκονται άνω του γράφου της αποτελούν κυρτό σύνολο. Ισοδύναμα, καλούμε την f κυρτή αν το C είναι ένα κυρτό σύνολο και για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]$ ισχύει:

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \leq tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2). \quad (5.11)$$



Σχήμα 5.3: Η κυρτή συνάρτηση $y = x + \frac{x^4}{5}$ συνοδευόμενη από 4 εφαπτομένες της.

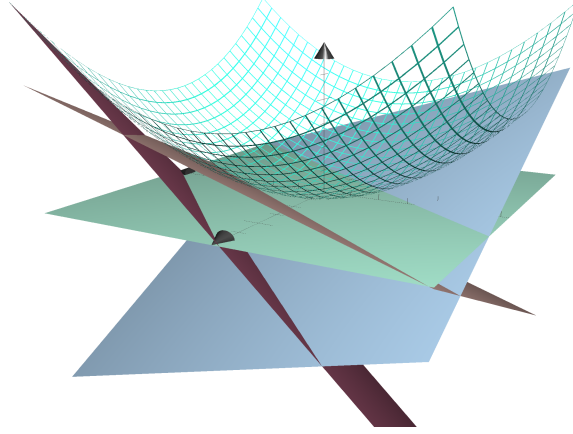
Αν υποθέσουμε, επίσης, ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εντός του πεδίου ορισμού C , τότε ένας ισοδύναμος ορισμός της κυρτότητας θέλει το C να είναι κυρτό και τη συνάρτηση να ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.12)$$

Αναγνωρίστε το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας ως την πρώτου βαθμού προσέγγιση Taylor της f γύρω από το \mathbf{x}_0 , που στην περίπτωση $n = 1$ αποτελεί, απλώς, την εφαπτομένη του γράφου της f στο σημείο $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$. Αυτό, λοιπόν, που χαρακτηρίζει τις κυρτές συναρτήσεις είναι ότι ο γράφος τους βρίσκεται πάντα **πάνω** από τις εφαπτομένες τους (Σχήμα 5.3). Για $n > 1$, μιλάμε πλέον για εφαπτόμενα ή υποστηρικτικά υπερεπίπεδα διάστασης n , αλλά σε κάθε περίπτωση το δεξί μέλος είναι μία *αφφινική* (*affine*) συνάρτηση της μορφής $y = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$. Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν και σε μια ενδιαφέρουσα αναπαράσταση κάθε κυρτής συνάρτησης f : κάθε σημείο $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ του γράφου της μπορεί να θεωρηθεί ως το μέγιστο μεταξύ όλων των αποτιμήσεων των υποστηρικτικών υπερεπιπέδων στο σημείο \mathbf{x} . Στενά συνδεδεμένες με αυτή την ιδέα είναι ο μετασχηματισμός Legendre, καθώς και οι μετασχηματισμοί κλίσης και η έννοια της συζυγούς Fenchel συνάρτησης που γενικεύουν τα παραπάνω και για μη κυρτές συναρτήσεις [Mar94]. Η αναπαράσταση αυτή είναι κεντρική στη μέθοδο που προτείνουμε για την παρεμβολή μιας κυρτής συνάρτησης σε ένα σύνολο από δεδομένα.

Θα εισάγουμε το πρόβλημα μέσω ενός παραδείγματος που δανειζόμαστε από το [MB09]. Θεωρήστε ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου με γνωστή περιγραφή στο χώρο κατάστασης και ένα μη γραμμικό συναρτησοειδές κόστους $f(\mathbf{u}(\cdot))$, όπου \mathbf{u} είναι η είσοδος του συστήματος. Η f θα μπορούσε να δίνει π.χ. την κατανάλωση καυσίμου που αντιστοιχεί σε δεδομένη είσοδο. Η εύρεση του νόμου ελέγχου που ελαχιστοποιεί το κόστος σε έναν ορίζοντα T και ικανοποιεί τις συνθήκες

5.2. Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών



Σχήμα 5.4: Μια κυρτή συνάρτηση μαζί με υποστηρικτικά υπερεπίπεδα.

του συστήματος μπορεί να εκφραστεί μέσω του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(T-1)} \sum_{t=0}^{T-1} f(\mathbf{u}(t)) \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\text{init}}, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_{\text{des}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Υποθέτουμε, τώρα, πως έχουμε λάβει -είτε μέσω προσομοίωσης, είτε από πραγματικές μετρήσεις- ορισμένα δεδομένα $(\mathbf{u}_i, f(\mathbf{u}_i))$ για τη σχέση εισόδου-κόστους. Αν παρεμβάλλουμε σε αυτά μια τμηματικά γραμμική συνάρτηση έστω \tilde{f} , δηλαδή $f(\mathbf{u}_i) \approx \tilde{f}(\mathbf{u}_i), \forall \mathbf{u}_i$, όπου $f(\mathbf{u}) = \max_{j=1,2,\dots,K} (\mathbf{a}_j^T \mathbf{u} + b_j)$, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση αυτή για την ελαχιστοποίηση του κόστους. Το πρόβλημα δηλαδή γράφεται:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(T-1)} \sum_{t=0}^{T-1} \max_{j=1,2,\dots,K} (\mathbf{a}_j^T \mathbf{u}(t) + b_j) \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\text{init}}, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_{\text{des}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Το παραπάνω δεν είναι παρά ένα γραμμικό πρόγραμμα με το διπλάσιο αριθμό μεταβλητών:

$$\begin{aligned} \min_{z_0, \dots, z_{T-1}, \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(T-1)} \sum_{t=0}^{T-1} z_t \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\text{init}}, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_{\text{des}}, \\ z_t \geq \mathbf{a}_j^T \mathbf{u}(t) + b_j, \quad \forall t = 0, 1, \dots, T-1, j = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (5.15)$$

το οποίο λύνεται ταχύτατα σε αντίθεση με το πιθανώς έντονα μη γραμμικό αρχικό (5.13). Άρα, βλέπουμε την αξία που μπορεί να έχει ο υπολογισμός μίας τμηματικά γραμμικής προσέγγισης μιας συνάρτησης. Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι καθεμία από τις K περιοχές όπου η f είναι γραμμική εισάγει T διαφορετικούς περιορισμούς, αυξάνοντας το χρόνο επίλυσης του προγράμματος. Αυτός είναι ένας κύριος λόγος που θα επιθυμούσαμε η προσέγγισή μας να αποτελείται από τον ελάχιστο αριθμό περιοχών.

Αν απομακρυνθούμε από τη Θεωρία Βελτιστοποίησης και σκεφτούμε τη τμηματικά γραμμική προσέγγιση ως μια εκτίμηση ή ένα μοντέλο για τα (πιθανώς θορυβώδη) δεδομένα μας, τότε βλέπουμε ότι η ελαχιστοποίηση της πληθικότητας των γραμμικών περιοχών στις οποίες διασπάται ο χώρος εισόδου είναι επιθυμητός και στα πλαίσια ενός εύρωστου εκτιμητή. Πράγματι, μια εκτίμηση με πολλές γραμμικές περιοχές κινδυνεύει να προσαρμοστεί ακατάλληλα πολύ στα δεδομένα (να κάνει *overfit*, όπως συνηθίζεται να λέγεται) και να μην αποτελέσει πιστή εικόνα της συνάρτησης που τα παρήγαγε. Θα δείξουμε αμέσως πως το πρόβλημα εύρεσης μιας τμηματικά γραμμικής προσέγγισης που είναι πιστό στα δεδομένα (πετυχαίνει μικρό σφάλμα προσέγγισης), περιλαμβάνοντας ταυτόχρονα ελάχιστο αριθμό περιοχών λύνεται μέσω των αραιών αναπαραστάσεων στη max-plus άλγεβρα.

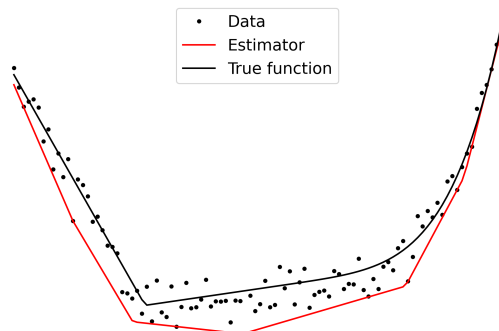
Εστω $(\mathbf{x}_i, f_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \dots, m$, ένα σύνολο δεδομένων από μία κυρτή συνάρτηση f και $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^K$ ένα σύνολο από διανύσματα κλίσης· για παράδειγμα, αυτά μπορεί να είναι πολλαπλάσια ενός σταθερού βήματος μέσα σε ένα σταθερό διάστημα τιμών ή οι αριθμητικές παράγωγοι των δεδομένων. Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε μία τμηματικά γραμμική (piecewise-linear) συνάρτηση p :

$$p(\mathbf{x}) = \bigvee_{k=1}^K \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} + b_k, \quad (5.16)$$

τέτοια ώστε να παρεμβάλλει στα δεδομένα, δηλαδή $f_i = p(x_i) + \text{error}$, $\forall i$. Ιδανικά, απουσία θορύβου, αυτό το πρόβλημα παρεμβολής γράφεται ως η εξής max-plus εξίσωση (ως προς το διάνυσμα \mathbf{x}):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x}_1 & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{a}_K^\top \mathbf{x}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_1^\top \mathbf{x}_m & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x}_m & \dots & \mathbf{a}_K^\top \mathbf{x}_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \boxplus \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (5.17)$$

Η παραπάνω max-plus προσέγγιση στο πρόβλημα της κυρτής παρεμβολής προτάθηκε στα [MT20; MT21], όπου το πρόβλημα ονομάστηκε *τροπική παρεμβολή*. Παρατηρήστε, τώρα, ότι αν μια τιμή b_i λάβει την τιμή $-\infty$, τότε ο όρος $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i$ δε συμμετέχει στον υπολογισμό της τιμής της p και, μπορεί να αφαιρεθεί επομένως από αυτήν. Βλέπουμε δηλαδή ότι μια αραιά λύση της εξίσωσης εξασφαλίζει προσέγγιση με μικρό αριθμό γραμμικών περιοχών. Αν επιβάλουμε επιπλέον την απαίτηση η προσέγγιση να βρίσκεται ϵ -κοντά στα δεδομένα ως προς μια πεπερασμένης τάξης νόρμα, τότε η εύρεση των συντελεστών b_i μοντελοποιείται ως το πρόβλημα εύρεσης της αραιότερης προσεγγιστικής λύσης (4.12) της παραπάνω εξίσωσης. Υπενθυμίζουμε ότι καλούμε την προσέγγιση αυτή ως Sparse Greatest Lower Estimate (SGLE). Επιπρόσθετα, αν προσθέσουμε στο αποτέλεσμα το μισό ℓ_∞ λάθος του, μπορούμε να βρούμε εκτιμήσεις με μικρό αριθμό γραμμικών περιοχών που είναι ϵ -κοντά στα δεδομένα σε σχέση με την ℓ_∞ νόρμα, όπως εξηγήθηκε στην υποενότητα 4.2.1.



Σχήμα 5.5: Τμηματικά γραμμική υπό-εκτίμηση θορυβωδών δεδομένων.

Ονομάσαμε την προσέγγιση αυτή Sparse Minimum Max Absolute Error estimate (SMMAE). Η τελευταία αυτή προσέγγιση είναι ιδιαίτερος χρήσιμη στο πλαίσιο όπου η τμηματικά γραμμική προσέγγιση αντικαθιστά μια κυρτή συνάρτηση σε ένα πρόβλημα Βελτιστοποίησης, καθώς η διαφορά μεταξύ των δύο ελαχίστων μπορεί να φραχτεί, ενώ ξεπερνά το πρόβλημα της από κάτω προσέγγισης που χαρακτηρίζει τη Sparse Greatest Lower Estimate· όπως θα δούμε και στα αριθμητικά πειράματα, αλλά διαισθητικά γίνεται προφανές και στο Σχήμα 5.5, το να εκτιμάμε όλα τα δεδομένα από κάτω είναι προβληματικό για θορυβώδη δεδομένα.

Σχετικά με την υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου, πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα \mathbf{A} σε χρόνο $\mathcal{O}(Knm)$. Εν συνεχεία, λύνουμε το πρόβλημα (4.12) για την εξίσωση (5.17) υπολογίζοντας την πρωτεύουσα λύση σε $\mathcal{O}(Km)$ χρόνο, και βρίσκοντας άπληστα το support set της σε $\mathcal{O}(K^2)$. Συνολικά, απαιτείται χρόνος ίσος με $\mathcal{O}(K^2 + K(n + 1)m)$. Ο υπολογισμός του SMMAE εκτιμητή απαιτεί ένα έξτρα $\mathcal{O}(Km)$. Ακολουθούν αριθμητικά πειράματα για τις παραπάνω μεθόδους.

Παράδειγμα 5.2.1. Θεωρήστε 100 ζεύγη δεδομένων (x_i, y_i) , με τα x_i να λαμβάνονται με ένα σταθερό βήμα από το διάστημα $[-2, 2]$ και $y_i = f(x_i)$, όπου f η κυρτή συνάρτηση:

$$f(x) = \max\left(-6x - 6, \frac{x}{2}, \frac{x^5}{5} + \frac{x}{2}\right). \quad (5.18)$$

Επιθυμούμε να παρεμβάλλουμε την εξής τμηματικά γραμμική συνάρτηση στα δεδομένα:

$$p(x) = \bigvee_{k \in S} kx + b_k, \quad (5.19)$$

όπου θα θεωρήσουμε πιθανές κλίσεις των γραμμικών περιοχών από το σύνολο $S =$

θ	$p = 1$			$p = 2$		
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$ \text{supp} $	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$ \text{supp} $
0.15	0.0038	0.0226	15	0.0131	0.0532	10
0.25	0.0057	0.0376	13	0.0230	0.0932	7
0.5	0.0120	0.0697	11	0.0436	0.2354	6
1	0.0202	0.1071	8	0.0628	0.2354	5
2	0.0491	0.2794	6	0.1525	1.0099	4
3	0.0615	0.2794	5	0.2521	1.0099	3
4	0.0615	0.2794	5	0.2521	1.0099	3
10	0.1628	1.0824	4	0.2521	1.0099	3
15	0.2529	1.0824	3	1.4335	6.4000	2
30	0.2529	1.0824	3	2.5800	7.0000	1

Πίνακας 5.1: Στοιχεία των ℓ_1 και ℓ_2 SGLEs που προέρχονται απ' τη λύση του προβλήματος (4.12) για την εξίσωση (5.20), με $p = 1, 2$, αντίστοιχα, και ανώφλι σφάλματος ϵ^p . Αναφέρουμε το **R**oot **M**ean **S**quared και **M**aximum **A**bsolute σφάλμα, μαζί με την πληθικότητα του support set της λύσης (ο αριθμός των γραμμικών περιοχών του προκύπτοντος τροπικού πολυωνύμου).

$\{-20, -19.875, \dots, 20\}$. Άρα, η εξίσωση που δίνει τους συντελεστές b_i είναι:

$$\begin{pmatrix} -20x_1 & -19.875x_1 & -19.75x_1 & \dots & 20x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -20x_{100} & -19.875x_{100} & -19.75x_{100} & \dots & 20x_{100} \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} b_{-20} \\ b_{-19.875} \\ b_{-19.75} \\ \vdots \\ b_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{100} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Λύνουμε το πρόβλημα (4.12) για τους παραπάνω πίνακες για διάφορες τιμές της τάξης της νόρμας p και του επιτρεπτού σφάλματος ϵ ώστε να λάβουμε τους SGLE και ύστερα προσθέτουμε το μισό ℓ_{∞} σφάλμα για τους SMMAE εκτιμητές. Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε μια δίκαιη σύγκριση στα αποτελέσματα και να εξαχθούν συμπεράσματα για την προσέγγιση με τις διάφορες νόρμες, σε κάθε πείραμα θέτουμε $\epsilon = \theta^p$, για κάποιο θ το οποίο μεταβάλλουμε. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τους SGLE και SMMAE εκτιμητές στους Πίνακες 5.1, 5.2 και 5.3, 5.4, αντίστοιχα. Παρατηρήστε πως οι SMMAE εκτιμητές έχουν ακριβώς το μισό ℓ_{∞} σφάλμα σε σχέση με τους αντίστοιχους SGLE, όπως προβλέπει η Πρόταση 16. Δείτε, επίσης, στους Πίνακες 5.2 και 5.4 την επίδραση της αύξησης της τάξης της νόρμας p στο προκύπτον support set (αυξάνεται, όπως προτείνει η Πρόταση 14). Στο Σχήμα 5.6 δίνονται οι καλύτερες τμηματικά γραμμικές προσεγγίσεις της f .

Παράδειγμα 5.2.2. Στρέφουμε, τώρα, την προσοχή μας στη δισδιάστατη περίπτωση, δηλαδή αποκτάμε δεδομένα από μία κυρτή επιφάνεια. Για το παράδειγμα αυτό, δειγματοληπούμε από μία θορυβώδη παραβολική επιφάνεια:

$$z = x^2 + y^2 + \mathcal{N}(0, 0.25^2), \quad (5.21)$$

όπου $x_i, y_i \sim \text{Unif}[-1, 1]$. Λαμβάνουμε 500 παρατηρήσεις.

5.2. Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών

θ	$p = 5$			$p = 150$		
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	supp	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	supp
0.15	0.0228	0.0932	7	0.0458	0.1313	18
0.25	0.0228	0.0932	7	0.0647	0.2322	16
0.5	0.0648	0.2497	5	0.1699	0.3867	13
1	0.1430	0.9392	4	0.2735	0.8685	10
2	0.2530	0.9392	3	0.6084	1.8232	7
3	0.2530	0.9392	3	0.9615	2.8788	5
4	0.2530	0.9392	3	1.1120	3.6444	4
10	1.4335	6.4000	2	2.6230	6.8636	1
15	2.5800	7.0000	1	2.6230	6.8636	1
30	2.5800	7.0000	1	2.6230	6.8636	1

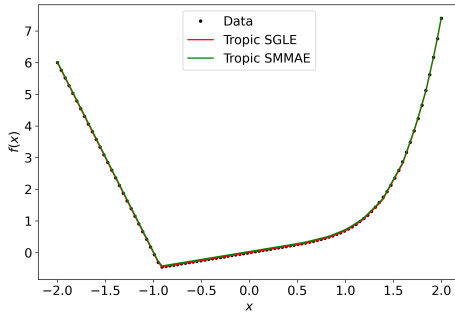
Πίνακας 5.2: ℓ_5 and ℓ_{150} SGLEs για πληθώρα διαφορετικών ανωφλίων θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.

θ	$p = 1$			$p = 2$		
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	supp	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	supp
0.15	0.0105	0.0113	15	0.0243	0.0266	10
0.25	0.0176	0.0189	13	0.0415	0.0466	7
0.5	0.0328	0.0349	11	0.1080	0.1177	6
1	0.0486	0.0535	8	0.1053	0.1177	5
2	0.1297	0.1398	6	0.4733	0.5049	4
3	0.1252	0.1397	5	0.4552	0.5049	3
4	0.1252	0.1398	5	0.4552	0.5049	3
10	0.5096	0.5412	4	0.4552	0.5049	3
15	0.4879	0.5412	3	2.9508	3.2000	2
30	0.4879	0.5412	3	2.8645	3.5000	1

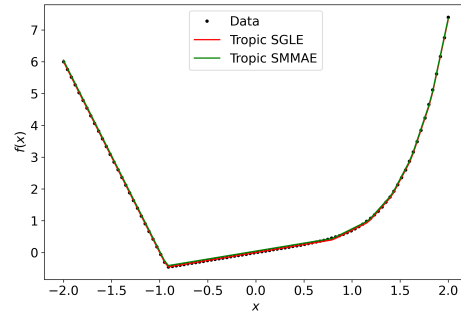
Πίνακας 5.3: ℓ_1 and ℓ_2 SMMAE εκτιμητές για πληθώρα διαφορετικών ανωφλίων θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.

θ	$p = 5$			$p = 150$		
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$ \text{supp} $	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$ \text{supp} $
0.15	0.0414	0.0466	7	0.0545	0.657	18
0.25	0.0414	0.0466	7	0.0945	0.1161	16
0.5	0.1119	0.1248	5	0.1265	0.1933	13
1	0.4385	0.4696	4	0.3093	0.4342	10
2	0.4245	0.4696	3	0.7243	0.9116	7
3	0.4245	0.4696	3	1.1728	1.4394	5
4	0.4245	0.4696	3	1.4588	1.8222	4
10	2.9508	3.2000	2	2.7175	3.4318	1
15	2.8645	3.5000	1	2.7175	3.4318	1
30	2.8645	3.5000	1	2.7175	3.4318	1

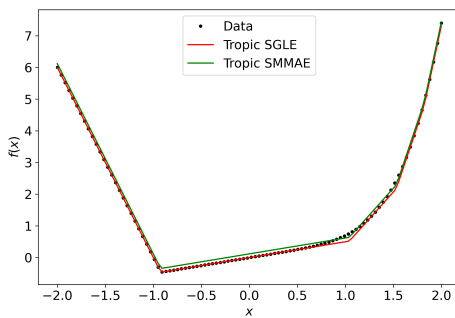
Πίνακας 5.4: l_5 and l_{150} SMMAE εκτιμητές για πληθώρα διαφορετικών ανωφλών θορύβου. Αναφέρουμε τα ίδιες ποσότητες με τον Πίνακα 5.1.



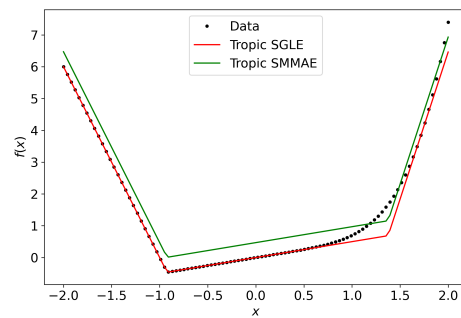
(a) $K = 11, \epsilon = 0.5, p = 1$



(b) $K = 6, \epsilon = 0.0625, p = 2$



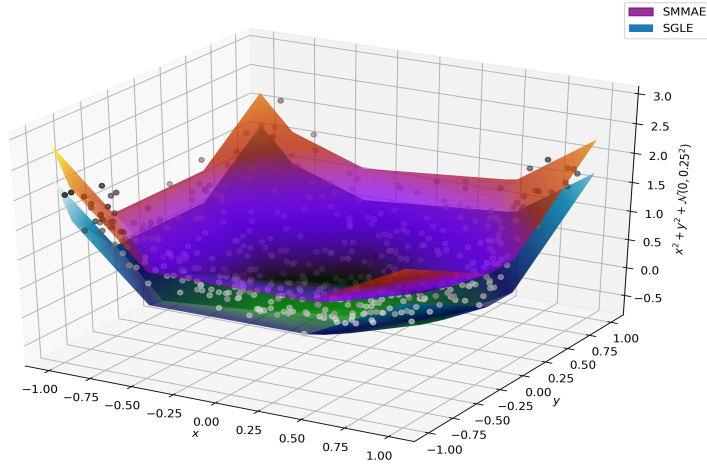
(c) $K = 5, \epsilon = 1, p = 2$



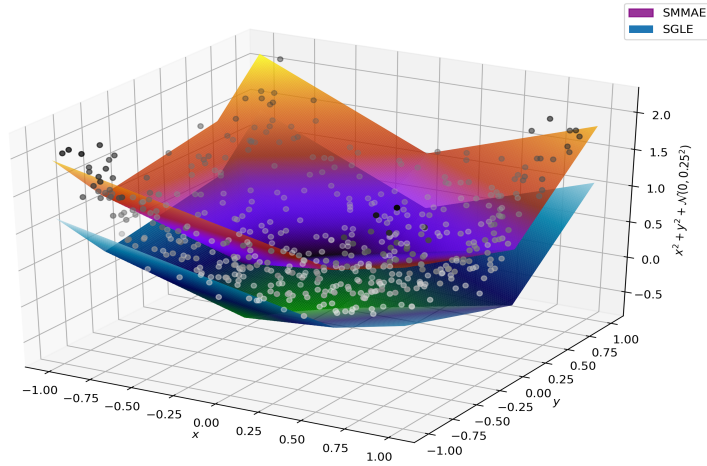
(d) $K = 3, \epsilon = 1024, p = 5$

Σχήμα 5.6: Τμηματικά γραμμικές προσεγγίσεις της $f(x) = \max(-6x - 6, \frac{x}{2}, \frac{x^5}{5} + \frac{x}{2})$ με K περιοχές, όπως προκύπτουν από τους αλγόριθμους τροπικής παρεμβολής για διάφορες τιμές του επιτρεπτού σφάλματος ϵ και της νόρμας αναφοράς l_p .

5.2. Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών



(a) $K = 16, \epsilon = 10^8, p = 150$



(b) $K = 5, \epsilon = 220, p = 2$

Σχήμα 5.7: Οι αραιοί εκτιμητές της επιφάνειας $z = x^2 + y^2 + \mathcal{N}(0, 0.25^2)$ για 2 εκτελέσεις του τροπικού αλγόριθμου.

Έστω $A = \{-10.00, -9.75, -9.50, \dots, 9.50, 9.75, 10\}$ το σύνολο των μερικών παραγώγων των γραμμικών περιοχών που θα εξετάσουμε, τότε το μοντέλο μας γράφεται

$$p(x, y) = \bigvee_{(k,l) \in A \times A} b_{kl} + kx + ly \quad (5.22)$$

Αποκτούμε SGLEs and SMMAE εκτιμητές για το παραπάνω μοντέλο για διαφορετικές εκτελέσεις των προσεγγιστικών αλγόριθμων, όπως στο Παράδειγμα 5.2.1. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον Πίνακα 5.5 σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της αρχικής μεθόδου τροπικής παρεμβολής [MT20], στην οποία ο αριθμός των γραμμικών περιοχών δίνεται σαν είσοδος στον αλγόριθμο. Το Σχήμα 5.8 δίνει το RMS σφάλμα των SMMAE εκτιμητών συναρτήσει του προκύπτοντος αριθμού των γραμμικών περιοχών K , και το συγκρίνει με το αντίστοιχο σφάλμα των non-sparse MMAE εκτιμητών του [MT20].

Επιβεβαιώνουμε πως, παρουσία θορύβου, οι SMMAE εκτιμητές συμπεριφέρονται καλύτερα από τους SGLEs, καθώς οι τελευταίοι προσεγγίζουν τα δεδομένα από κάτω (Βλέπε Σχήμα 5.7) και, άρα, υποεκτιμούν τις θορυβώδεις χαμηλές τιμές των δεδομένων. Και οι δύο μέθοδοι καταφέρνουν να βρουν καλές προσεγγίσεις με ένα σχετικά μικρό αριθμό γραμμικών περιοχών και τα αποτελέσματα είναι καλύτερα απ' αυτά που αναφέρονται στο [MT20] για την απλή μέθοδο τροπικής παρεμβολής (αναφορικά με το σφάλμα προσέγγισης, και τον αριθμό των γραμμικών περιοχών). Παρατηρήστε ότι οι SMMAE εκτιμητές έχουν ακριβώς το μισό ℓ_∞ σφάλμα των αντίστοιχων SGLEs, όπως αναμέναμε από την Πρόταση 16. Επίσης, παρατηρήστε ότι όταν $p = 150$, ο SMMAE εκτιμητής έχει ℓ_∞ σφάλμα ίσο με 0.5634, το οποίο είναι πολύ κοντά στο θεωρητικό άνω φράγμα της εξίσωσης (4.35) ($\frac{10^{8/150}}{2} = 0.5653$). Αυτή η παρατήρηση επιτρέπει στοχευμένες (ως προς το ℓ_∞ σφάλμα) εκτελέσεις της μεθόδου SMMAE (επιλέγουμε μια νόρμα υψηλής τάξης p και θέτουμε $\epsilon = (2\delta)^p$, όπου δ είναι το αποδεκτό ℓ_∞ σφάλμα).

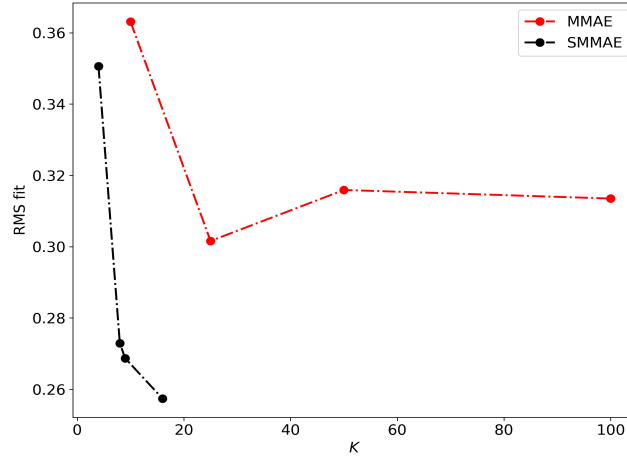
Παράδειγμα 5.2.3. Θεωρήστε την περίπτωση όπου $n = 3$ και έχουμε συλλέξει $m = 11^3 = 1331$ σημεία από το σύνολο $V \times V \times V$, $V = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. Η κυρτή συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι:

$$g(\mathbf{x}) = \log(\exp(x_1) + \exp(x_2) + \exp(x_3)). \quad (5.23)$$

Το παραπάνω συνθετικό πρόβλημα έχει χρησιμοποιηθεί προηγουμένως στη βιβλιογραφία [MB09]. Οι συγγραφείς στην εργασία αυτή εισάγουν για την επίλυση του μια επαναληπτική μέθοδο, που εναλλάσσεται μεταξύ του υπολογισμού μιας διαμέρισης των δεδομένων σε γραμμικές περιοχές και τοπικών γραμμικών παρεμβολών σε καθεμία απ' αυτές (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων). Καθώς η προκύπτουσα προσέγγιση εξαρτάται από την αρχική διαμέριση, προτείνεται η πολλαπλή εκτέλεση του αλγόριθμου ώστε να προκύψει μια καλή τμηματικά γραμμική εκτίμηση των δεδομένων.

Εμείς αντιθέτως θα επιλύσουμε το πρόβλημα με τις αραιές τροπικές μεθόδους που αναπτύξαμε. Παρατηρήστε ότι καθώς η διάσταση n των δεδομένων αυξάνεται, καθίσταται υπολογιστικά ασύμφορο (μέχρι και αδύνατο) να διαμερίσουμε μεγάλα n -διάστατα διαστήματα, $[-l, l]^n$, με ένα σταθερό βήμα, αφού το K αποκτά εκθετικό ως προς τη διάσταση μέγεθος $(\frac{2l+1}{step})^n$. Παρομοίως με το [MT20], προτείνουμε σε αυτές τις περιπτώσεις να υπολογίσουμε τις αριθμητικές παραγώγους των δεδομένων, να τις θέσουμε αυτές ως τα πιθανά διανύσματα κλίσης \mathbf{a}_k του μοντέλου, και μετά να εφαρμόσουμε τις μεθόδους μας, ώστε να επιλεγούν ορισμένες απ' αυτές τις γραμμικές περιοχές και να υπολογιστούν οι σταθεροί όροι b_k . Έτσι, η μέθοδος γίνεται υπολογιστικά δόκιμη ($\mathcal{O}(m^2n)$). Για το παράδειγμα

5.2. Παρεμβολή κυρτών συναρτήσεων μέσω τμηματικά γραμμικών

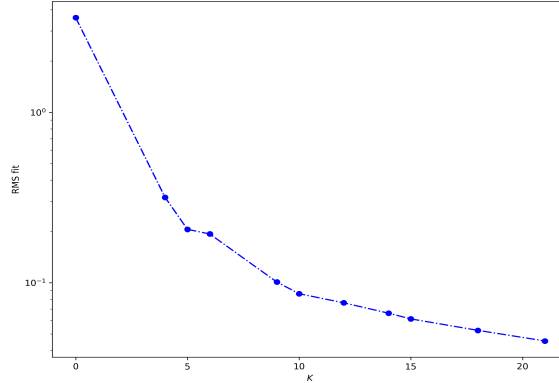


Σχήμα 5.8: Η σχέση RMS σφάλματος των SMMAE εκτιμητών με τον αριθμό των γραμμικών περιοχών K . Σύγκριση με τη μέθοδο τροπικής παρεμβολής [MT20].

(ϵ, p)	SGLE		SMMAE		supp
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	
(210, 1)	0.4926	1.1575	0.3027	0.5787	28
(250, 1)	0.5518	1.1967	0.2847	0.5983	8
(300, 1)	0.6681	1.5405	0.3506	0.7703	4
(120, 2)	0.4899	1.1268	0.2942	0.5634	31
(130, 2)	0.5096	1.1575	0.2889	0.5787	16
(150, 2)	0.5465	1.1734	0.2729	0.5867	8
(220, 2)	0.6344	1.5405	0.3479	0.7703	5
(360, 0.3)	0.5050	1.1390	0.2956	0.5695	20
(50, 5)	0.5018	1.1268	0.2812	0.5634	23
(75, 7)	0.5602	1.1963	0.2687	0.5981	9
$(10^8, 150)$	0.5560	1.1268	0.2574	0.5634	16

K	GLE [MT20]		MMAE [MT20]	
	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$	$error_{RMS}$	$error_{\infty}$
10	0.6659	1.6022	0.3641	0.8011
25	0.5674	1.2779	0.3016	0.6389
50	0.5489	1.3068	0.3159	0.6534
100	0.5364	1.2828	0.3135	0.6414

Πίνακας 5.5: Τμηματικά γραμμικές προσεγγίσεις με τα σφάλματα τους για την επιφάνεια (5.21). K είναι ο αριθμός των γραμμικών περιοχών στο προκύπτον τροπικό πολυώνυμο.



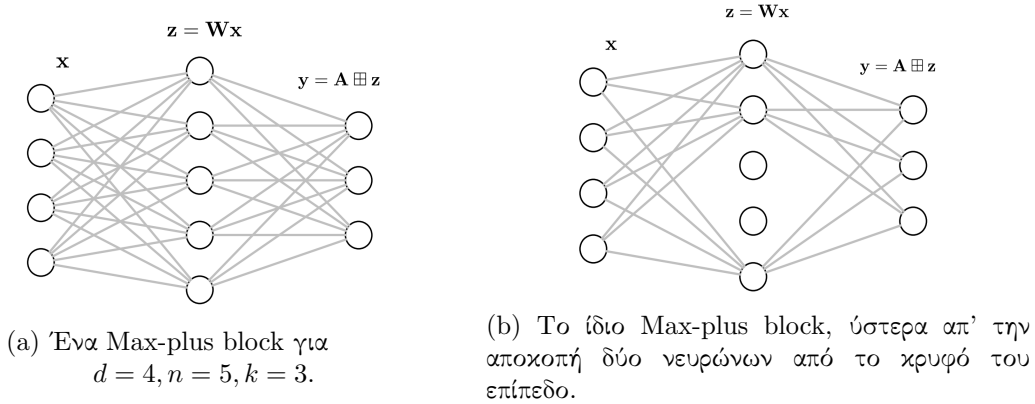
Σχήμα 5.9: Το RMS σφάλμα των εκτιμητών συναρτήσει του αριθμού των γραμμικών περιοχών του για τη συνάρτηση $g(\mathbf{x}) = \log(\exp(x_1) + \exp(x_2) + \exp(x_3))$.

αυτό, θέτουμε $p = 2$ και προκειμένου να λάβουμε την πρώτη προσέγγιση, θέτουμε $\epsilon = 1331$, ώστε το RMS σφάλμα να' ναι μικρότερο του 1. Το προκύπτον τροπικό πολυώνυμο έχει $K = 4$ γραμμικές περιοχές. Βαθμιαία μειώνουμε το ϵ , ώστε να πάρουμε προσεγγίσεις με διαφορετικά K , έως ότου το K φθάσει 21. Το Σχήμα 5.9 δείχνει το RMS σφάλμα έναντι τον αριθμό των γραμμικών περιοχών. Τα αποτελέσματα είναι ανταγωνιστικά σε σχέση με αυτά που αναφέρονται στο [MB09], ενώ η μέθοδος παράγει εκτιμήσεις με μία μονάχα εκτέλεση, σε αντίθεση με την [MB09] που απαιτεί 10 ή 100 διαφορετικές εκτελέσεις χρονικής πολυπλοκότητας $\mathcal{O}((n+1)^2 mi)$ με i τον αριθμό των επαναλήψεων που χρειάζεται ο αλγόριθμος ώστε να συγκλίνει.

5.3 Ελαχιστοποίηση Μορφολογικών Νευρωνικών Δικτύων

Πρόσφατα, έχει ανανεωθεί το ερευνητικό ενδιαφέρον προς μια συγκεκριμένη κλάση νευρωνικών δικτύων που ονομάζονται Μορφολογικά Νευρωνικά Δίκτυα (Morphological Neural Networks) [RU03; SE11; CM17; Zha+19; FFY20]. Τα δίκτυα αυτά αποτελούνται από επίπεδα νευρώνων που εκτελούν μορφολογικές πράξεις (διαστολές ή συστολές). Τα κίνητρα εισαγωγής τους ήταν αρχικά βιολογικά και υπολογιστικά, ενώ ένας ισχυρός λόγος για τη μελέτη τους είναι η επιτυχία των μεθόδων της Μαθηματικής Μορφολογίας στην Όραση Υπολογιστών. Επιπλέον, έχουν επιδείξει εξαιρετική σταθερότητα απόδοσης κατά την ελαχιστοποίηση τους [CM17; Zha+19], ενώ μια περιορισμένη κλάση τέτοιων δικτύων που ονομάστηκαν maxout “ευνοούν” τη δράση τεχνικών κανονικοποίησης, όπως το dropout [Goo+13]. Εδώ θα δείξουμε πως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης τέτοιων δικτύων και αποκοπής νευρώνων τους μπορεί να γραφτεί ως ένα max-plus sparsity πρόβλημα.

Θεωρούμε ένα μορφολογικό νευρωνικό δίκτυο ως ένα πολυεπίπεδο δίκτυο, με επίπεδα που εκτελούν γραμμικούς μετασχηματισμούς και ακολούθως max-plus πράξεις. Οι συγγραφείς του [Zha+19] καλούν μια συστοιχία τέτοιως επιπέδων ως ένα *Max-plus block*. Αν με $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ συμβολίζουμε την είσοδο, k είναι η διάσταση της εξόδου, τότε ένα απλό δίκτυο ενός Max-plus block (δείτε



Σχήμα 5.10: Μορφολογικά Νευρωνικά Δίκτυα.

Σχήμα 5.10) επιτελεί τις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{W}\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{A} \boxplus \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

όπου $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ και $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times n}$. Υποθέστε τώρα ότι ένα τέτοιο δίκτυο έχει εκπαιδευτεί επιτυχημένα, πιθανώς με έναν πλεοναστικό αριθμό νευρώνων n , και επιθυμούμε να μειώσουμε το μέγεθος του κρατώντας σταθερή την απόδοση του. Για κάθε δεδομένο εκπαίδευσης $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})$, έχουμε $\tilde{\mathbf{y}}^{(i)} = \mathbf{A} \boxplus \mathbf{z}^{(i)}$, όπου $\tilde{\mathbf{y}}^{(i)}$ είναι η πρόβλεψη του δικτύου. Κρατάμε, τώρα, σταθερή την πρόβλεψη και τον πίνακα \mathbf{A} , και βρίσκουμε μια αραιή προσεγγιστική λύση της εξίσωσης αυτής ως προς το διάνυσμα $\mathbf{z}^{(i)}$. Παρατηρήστε ότι αν μια τιμή του \mathbf{z} ισούται με $-\infty$ είναι σα να θέτουμε την αντίστοιχη στήλη του πίνακα \mathbf{A} ταυτοτικά ίση με $-\infty$, ή ισοδύναμα σα να αφαιρούμε το νευρώνα που αντιστοιχεί σε αυτήν. Φυσικά, η αφελής αυτή τεχνική θα αφαιρούσε νευρώνες που είναι σημαντικοί για άλλα δεδομένα εισόδου. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για κάθε δεδομένο εκπαίδευσης, μετρήσουμε πόσες φορές κάθε νευρώνας εμφανίζεται στο support set της λύσης, και κρατήσουμε τελικά μόνο τις k πιο συχνές τιμές.

Ακολουθεί ένα συνοπτικό παράδειγμα χρήσης της μεθόδου πάνω στα σύνολα δεδομένων του MNIST και του FashionMNIST. Και τα δύο αυτά σύνολα δεδομένων είναι ισορροπημένα ως προς την αναλογία δεδομένων προς κλάση ταξινόμησης, ενώ περιέχουν 10 κλάσεις.

Παράδειγμα 5.3.1. Εκπαιδεύουμε 2 δίκτυα για κάθε dataset, τα οποία αποτελούνται από 1 max-plus block με 64 και 128 νευρώνες, αντίστοιχα, μέσα στο κρυφό επίπεδο, για 20 εποχές με Stochastic Gradient Descent και προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση σφάλματος την Cross Entropy Loss.

Μετά την εκπαίδευση διαλέγουμε τυχαία 10000 δείγματα από το σύνολο εκπαίδευσης (17% του συνόλου), εκτελούμε ένα forward πέρασμα απ' το δίκτυο ώστε να λάβουμε τις εκτιμήσεις του μοντέλου και εκτελούμε τον Αλγόριθμο 1 με $p = 20$ και $\epsilon = 2^{20}$, ώστε να λάβουμε αραιά διανύσματα \mathbf{z} (και τα support sets τους). Έπειτα, απλά βρίσκουμε τους 10 (ισοπληθείς με τον αριθμό των κλάσεων) πιο συχνούς δείκτες στο support set των λύσεων, κρατάμε τους νευρώνες που

	MNIST		FashionMNIST	
	64	128	64	128
Πλήρες δίκτυο	92.21	92.17	79.27	83.37
Pruned ($n = 10$)	92.21	92.17	79.27	83.37

Πίνακας 5.6: Test set accuracy πριν και μετά την ελαχιστοποίηση.

αντιστοιχούν σε αυτούς και αφαιρούμε τους υπόλοιπους απ' το δίκτυο. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.6, όλα τα ελαχιστοποιημένα διατηρούν την ακρίβεια των πλήρων δικτύων, παρ' όλο που διαθέτουν 54 and 118 λιγότερους νευρώνες, αντίστοιχα. Σημειώστε ότι προσπάθειες να εκπαιδευτούν δίκτυα με 10 νευρώνες εξ' αρχής δίδουν χειρότερα αποτελέσματα (περί το 60% και για τα 2 σύνολα δεδομένων).

Μια δεύτερη προσέγγιση στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης τέτοιων δικτύων θα ήταν να αναγνωρίσουμε πως κάθε νευρώνας εξόδου υλοποιεί στην πραγματικότητα μια κυρτή συνάρτηση, επομένως μπορούμε αυτομάτως να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους της προηγούμενης ενότητας ώστε να ελαχιστοποιηθεί.

Κεφάλαιο 6

Αφηρημένοι Τροπικοί Χώροι και Αραιότητα

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας μας επιχειρούμε να γενικεύσουμε ιδέες και μεθόδους των αραιών αναπαραστάσεων σε πιο αφηρημένες αλγεβρικές δομές και συστήματα. Θα παρουσιάσουμε μια αυστηρή θεμελίωση της max-plus άλγεβρας μέσω εργαλείων της Θεωρίας Πλεγμάτων, ενώ θα καταστεί έτσι δυνατή και η επέκταση αποτελεσμάτων και εννοιών σε πιο γενικούς χώρους, όπως οι ασαφείς (fuzzy) max-min. Η θεώρηση αυτή αναδεικνύει θέματα *δυσικότητας* μεταξύ του maximum και του minimum που βρίσκονται στον πυρήνα των χώρων, ενώ θεσπίζει σύνδεση με την περιοχή της Μαθηματικής Μορφολογίας. Εκτενής μελέτη των μη γραμμικών αυτών χώρων υπό το πρίσμα της Θεωρίας Πλεγμάτων έχει πραγματοποιηθεί στα [Mar13; Mar17]. Εδώ θα προβούμε σε μια περιληπτική ανασκόπηση, και στο τέλος του κεφαλαίου θα συζητήσουμε ζητήματα αραιότητας στους χώρους αυτούς.

Όπως αναφέραμε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο των Τροπικών Μαθηματικών, οι πράξεις της max-plus άλγεβρας έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για τη μορφολογική ανάλυση σήματος και εικόνας. Η Μαθηματική Μορφολογία [Mat75; Ser82; Ser88] αναπτύχθηκε τις δεκαετίες του 1970 και 1980 και ασχολείται με την ανάλυση της δομής σχημάτων και αντικειμένων. Αρχικά, αφορούσε δομές που ορίζονται ως σύνολα και έτσι εφαρμόστηκε στην ανάλυση δυαδικών εικόνων (κάθε δυαδική εικόνα αποτελείται από λευκά και μαύρα pixels και, άρα, αναπαρίσταται μονοσήμαντα από το σύνολο ενός εξ' αυτών), αλλά στη συνέχεια επεκτάθηκε και σε γκριζες εικόνες, αλλά και σε γενικά πλέγματα (lattices). Αυτή η τελική θεμελίωση της περιοχής πάνω σε αφηρημένες δομές *πλήρων* πλεγμάτων, πέρα από μαθηματική κομψότητα, παρέχει και έναν τρόπο ενοποίησης της θεωρίας και των αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται στις διάφορες περιοχές εφαρμογής της Μαθηματικής Μορφολογίας (δυαδικές εικόνες, γκριζες εικόνες, γράφοι κ.ά). Για παράδειγμα, ένας απ' τους βασικούς μορφολογικούς μετασχηματισμούς ονομάζεται **διαστολή (dilation)** και για μια δυαδική εικόνα ενός αντικειμένου $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ορίζουμε τη διαστολή του X μέσω του $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ως:

$$X \oplus B \triangleq \bigcup_{\mathbf{y} \in B} X + \mathbf{y}, \quad (6.1)$$

όπου $X + \mathbf{y} \triangleq \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X\}$ η μετατόπιση του συνόλου X κατά \mathbf{y} . Στην περίπτωση μιας γκριζας εικόνας $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (η τιμή της f δίνει την φωτεινότητα ή το intensity σε κάθε pixel), ορίζουμε

6.1. Πλέγματα (Lattices)

τη διαστολή της μέσω μιας άλλης εικόνας g ως:

$$(f \oplus g)(x) \triangleq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + g(\mathbf{y}). \quad (6.2)$$

Αν θεωρήσουμε τη σχέση \subseteq ως μια μορφή (μερικής) διάταξης σε ένα σύμπαν συνόλων, τότε το μέγιστο δύο συνόλων ταυτίζεται με την ένωση τους. Υπό αυτό το πρίσμα, οι ορισμοί (6.1) και (6.2) περιγράφουν τον ίδιο μετασχηματισμό (μέγιστο μεταξύ μετατοπίσεων του αρχικού αντικειμένου). Το θεωρητικό υπόβαθρο αυτής της διαίσθησης εδράζεται στη θεωρία πλεγμάτων.

Παρατηρήστε, τώρα, την εξαιρετική ομοιότητα των (6.1), (6.2) με τον πολλαπλασιασμό πινάκων της max-plus άλγεβρας (2.9). Η συζήτηση που προηγήθηκε μάς προϊδεάζει, λοιπόν, πως η max-plus άλγεβρα μπορεί να αναλυθεί και αυτή μέσω εργαλείων της θεωρίας πλεγμάτων. Η παρουσίαση αυτού του κεφαλαίου θα' ναι αρκετά αφηρημένη και θα περιέχει μονάχα ως ειδική περίπτωση το χώρο της max-plus άλγεβρας, αλλά έχει ως σκοπό να προσδώσει διαίσθηση στους τελεστές της μέσω της συσχέτισης τους με αυτούς της Μαθηματικής Μορφολογίας, να παρουσιάσει ιδιότητες και προτάσεις με έναν πιο κομψό τρόπο, αλλά και να ενοποιήσει υπό μια κοινή στέγη πολλούς διαφορετικούς μη γραμμικούς χώρους. Η παρουσίαση μας βασίζεται στα [Hei94; Mar17].

6.1 Πλέγματα (Lattices)

Ορισμός 18. Ένα σύνολο P εφοδιασμένο με μία διμελή σχέση \leq καλείται *μερικώς διατεταγμένο σύνολο (poset)* και η \leq *μερική διάταξη (partial order)*, αν:

- $a \leq a$, $\forall a \in P$ (ανακλαστική ιδιότητα).
- αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα).
- αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Παράδειγμα 6.1.1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τη γνώστη διάταξη αποτελεί ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (\mathbb{R}, \leq) .

Παράδειγμα 6.1.2. Το σύνολο των φυσικών αριθμών εφοδιασμένο με τη σχέση διαιρετότητας $|$ ($a | b$ αν $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$) αποτελεί ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}, |)$.

Σε κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P, \leq) , αντιστοιχεί ένα δυϊκό επίσης μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P, \leq') , όπου $a \leq' b$ αν $b \leq a$.

Τα lattices βασίζονται στην ιδέα του ελάχιστου άνω φράγματος και του μέγιστου κάτω φράγματος του P :

Ορισμός 19. Έστω P ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $S \subseteq P$, τότε ένα στοιχείο $B \in P$ καλείται *άνω φράγμα* του S αν $X \leq B \forall X \in S$. Το ελάχιστο άνω φράγμα του S καλείται *supremum* του S και συμβολίζεται με $\bigvee S$. Το δυϊκό του supremum καλείται *infimum* και συμβολίζεται με $\bigwedge S$.

Παράδειγμα 6.1.3. Στο (\mathbb{R}, \leq) είναι $\bigvee\{-1, 4, 5\} = 5$, $\bigvee(0, 1) = 1$ και $\bigwedge(0, 1) = 0$.

Ορισμός 20. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (\mathcal{L}, \leq) ονομάζεται πλέγμα (*lattice*) αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του έχει supremum και infimum. Ένα lattice καλείται πλήρες αν κάθε υποσύνολο του (ακόμα και άπειρο) έχει supremum και infimum. Γράφουμε $\top = \bigvee \mathcal{L}, \perp = \bigwedge \mathcal{L}$.

Παράδειγμα 6.1.4. Το (\mathbb{R}, \leq) αποτελεί lattice, αλλά μη πλήρες αφού δεν περιέχει ελάχιστο και μέγιστο σημείο. Το $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq)$ είναι ένα πλήρες lattice, με $\top = +\infty, \perp = -\infty$.

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω σύνολο E και $\mathcal{P}(E)$ το δυναμοσύνολο του εφοδιασμένο με τη σχέση \subseteq . Τότε το $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ αποτελεί ένα πλήρες lattice, όπου το supremum δύο συνόλων είναι η ένωση τους, infimum η τομή τους και $\top = \mathcal{P}(E), \perp = \emptyset$. Παρατηρήστε ότι σε τέτοια lattices δε συγκρίνονται όλα τα στοιχεία μεταξύ τους (π.χ $\{1, 2, 5\} \not\subseteq \{1, 3, 8\}, \{1, 3, 8\} \not\subseteq \{1, 2, 5\}$).

Παράδειγμα 6.1.6. Έστω ένα lattice (\mathcal{L}, \leq) και ένα αυθαίρετο σύνολο E . Ορίζουμε επί του \mathcal{L} το χώρο \mathcal{L}^E των συναρτήσεων $f : E \rightarrow \mathcal{L}$. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το χώρο αυτό με τη μερική διάταξη \preceq , η οποία ορίζεται ως $f \preceq g$ αν $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$. Κατά αντίστοιχο τρόπο, ορίζουμε το supremum μιας οικογένειας συναρτήσεων I ως: $(\bigvee_{i \in I} f_i)(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x)$ και το infimum της $(\bigwedge_{i \in I} f_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x)$. Έτσι, ο χώρος (\mathcal{L}^E, \preceq) είναι επίσης lattice.

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού το ίδιο το \mathcal{L} , τότε καταλήγουμε στο lattice τελεστών του \mathcal{L} , $(\mathcal{O}(\mathcal{L}), \preceq)$. Ειδικό ενδιαφέρον έχουν συγκεκριμένες κλάσεις τελεστών-στοιχείων του $\mathcal{O}(\mathcal{L})$:

- Ο ταυτοτικός τελεστής $\mathbf{id} : \mathbf{id}(X) = X \forall X \in \mathcal{L}$,
- Οι extensive τελεστές $\psi : \mathbf{id} \preceq \psi$,
- Οι antiextensive τελεστές $\psi : \psi \preceq \mathbf{id}$,
- Οι idempotent τελεστές $\psi : \psi^2 = \psi$ (όπου $\psi^2(X) = \psi(\psi(X))$),
- Οι αύξοντες τελεστές $\psi : X \leq Y \implies \psi(X) \preceq \psi(Y)$

Τέσσερις βασικές κατηγορίες αυξόντων τελεστών, που θα παίξουν κεντρικό ρόλο στην ανάλυση μας, είναι οι εξής:

Ορισμός 21.

1. Ένας τελεστής δ καλείται διαστολή (*dilation*) αν επιμερίζει επί suprema, δηλαδή $\delta(\bigvee_i X_i) = \bigvee_i \delta(X_i)$ για κάθε συλλογή $\{X_i\}$,
2. Ένας τελεστής ε καλείται συστολή (*erosion*) αν επιμερίζει επί infima, δηλαδή $\varepsilon(\bigwedge_i X_i) = \bigwedge_i \varepsilon(X_i)$ για κάθε συλλογή $\{X_i\}$,
3. Ένας τελεστής α καλείται άνοιγμα (*opening*) αν είναι αύξων, antiextensive και idempotent.
4. Ένας τελεστής β καλείται κλείσιμο (*closing*) αν είναι αύξων, extensive και idempotent.

Παρατηρήστε ότι οι δύο πρώτοι ορισμοί απαιτούν πλήρη lattices. Επίσης, όπως αναφέραμε ήδη, οι ορισμοί αυτοί περιγράφουν αύξοντες τελεστές.

Πρόταση 17. Κάθε dilation δ ή erosion ε τελεστής είναι αύξων.

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \mathcal{L}$, τότε $X \leq Y \iff X \vee Y = Y$, άρα $\delta(X \vee Y) = \delta(Y)$, και, καθώς επιμερίζει επί suprema, $\delta(X) \vee \delta(Y) = \delta(Y)$, δηλαδή $\delta(X) \leq \delta(Y)$. Ομοίως για το erosion. \square

Παράδειγμα 6.1.7. Έστω σύνολα φυσικών αριθμών E και $B \subseteq E$ και το lattice $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. Ορίζουμε τον τελεστή $\delta_B(X) = \bigcup_{y \in B} X_{+y}$. Έστω $X \subseteq Z$, τότε $u \in X_{+y} \iff \exists x \in X : u = x + y \implies \exists x \in Z : u = x + y \implies u \in Z_{+y}$, άρα $X_{+y} \subseteq Z_{+y} \implies \bigcup_{y \in B} X_{+y} \subseteq \bigcup_{y \in B} Z_{+y}$, δηλαδή ο δ_B είναι αύξων. Επίσης έχουμε:

$$\delta_B\left(\bigcup_i X_i\right) = \bigcup_{y \in B} \left(\bigcup_i X_i\right)_{+y} = \bigcup_{y \in B} \bigcup_i (X_i)_{+y} = \bigcup_i \bigcup_{y \in B} (X_i)_{+y} = \bigcup_i \delta_B(X_i), \quad (6.3)$$

δηλαδή ο δ_B είναι dilation.

Μια θεμελιώδης έννοια των πλήρων lattices και της Μαθηματικής Μορφολογίας, που προσφέρει σε έναν τελεστή ότι κοντινότερο στον αντίστροφο του, είναι η εξής:

Ορισμός 22. Έστω τελεστές δ, ε ορισμένοι σε ένα πλήρες lattice (\mathcal{L}, \leq) . Το ζεύγος (δ, ε) καλείται συζυγία (*adjunction*) στο \mathcal{L} αν

$$\delta(X) \leq Y \iff X \leq \varepsilon(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{L}. \quad (6.4)$$

Η φαινομενική δυϊκότητα των τελεστών dilation, erosion θεμελιώνεται μέσω των adjunctions στις επόμενες δύο προτάσεις.

Πρόταση 18. Έστω ένα ζεύγος τελεστών (δ, ε) που αποτελεί adjunction. Τότε ο δ είναι dilation και ο ε είναι erosion.

Απόδειξη. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, Y \in \mathcal{L}$. Έχουμε:

$$\delta\left(\bigvee_i X_i\right) \leq Y \iff \bigvee_i X_i \leq \varepsilon(Y) \iff X_i \leq \varepsilon(Y) \quad \forall i \iff \delta(X_i) \leq Y \quad \forall i \iff \bigvee_i \delta(X_i) \leq Y, \quad (6.5)$$

δηλαδή $\delta(\bigvee_i X_i) = \bigvee_i \delta(X_i)$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ο ε αποτελεί erosion. \square

Πρόταση 19. Σε κάθε dilation δ αντιστοιχεί ένα συζυγές erosion, δηλαδή ένας τελεστής ε τέτοιος ώστε το ζεύγος (δ, ε) αποτελεί adjunction. Ισχύει και το δυϊκό, δηλαδή σε κάθε erosion αντιστοιχεί ένα συζυγές dilation.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\varepsilon(Y) = \bigvee\{X' \in \mathcal{L} \mid \delta(X') \leq Y\}$. Έστω $X, Y \in \mathcal{L}$,

- αν $\delta(X) \leq Y$, τότε εξ' ορισμού $X \leq \varepsilon(Y)$.
- αν $X \leq \varepsilon(Y)$, τότε είναι

$$\delta(X) \leq \delta(\varepsilon(Y)) = \bigvee\{\delta(X') \mid \delta(X') \leq Y\} \leq Y, \quad (6.6)$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι ο δ είναι αύξων, καθώς και ότι "μπαίνει μέσα" στο supremum. Δείξαμε, επομένως, ότι το ζεύγος (δ, ε) αποτελεί adjunction. Δυϊκά αποδεικνύεται ότι σε κάθε erosion αντιστοιχεί ένα dilation $\delta(X) = \bigwedge\{Y' \in \mathcal{L} \mid X \leq \varepsilon(Y')\}$ μαζί με το οποίο συνθέτουν ζεύγος adjunction επί του \mathcal{L} .

□

Τέλος, παραθέτουμε ορισμένες ιδιότητες των dilations και των erosions.

Πρόταση 20. Έστω ένα ζεύγος τελεστών (δ, ε) που αποτελεί adjunction. Είναι:

1. $\delta\varepsilon \preceq \text{id}$,
2. $\text{id} \preceq \varepsilon\delta$,
3. $\delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$ και $\varepsilon\delta\varepsilon\delta = \varepsilon\delta$.

Απόδειξη.

1. Από την (6.4) για $X = \varepsilon(Y)$ έχουμε:

$$\delta(\varepsilon(Y)) \leq Y \iff \varepsilon \leq \varepsilon \forall Y \in \mathcal{L}, \quad (6.7)$$

δηλαδή $\delta(\varepsilon(Y)) \leq Y \forall Y \in \mathcal{L}$ ή $\delta\varepsilon \preceq \text{id}$.

2. Προκύπτει από την (6.4) για $Y = \delta(X)$.
3. Προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις, καθώς και τη μονοτονία των δ, ε .

□

Οι παραπάνω ιδιότητες μας ενημερώνουν ότι από ένα adjunction μπορούμε να συνθέσουμε τελεστές opening και closing, όπως αυτοί δόθηκαν στον Ορισμό 21. Οι τελεστές αυτοί καλούνται και προβολές στα lattices, αφού, παρομοίως με τις γνωστές προβολές στους Ευκλείδειους χώρους, σέβονται τη διάταξη των ορισμάτων τους και είναι idempotent¹. Οι τελεστές αυτοί έχουν βρει πληθώρα εφαρμογών στην περιοχή της Όρασης Υπολογιστών (π.χ. αποθορυβοποίηση εικόνας, κατάτμηση εικόνας και αναγνώριση αντικειμένων) και το γεγονός ότι δομούνται εύκολα μέσω κάθε adjunction αιτιολογεί το χαρακτηρισμό της έννοιας ως θεμελιώδους στα πλήρη πλέγματα που μελετάμε.

6.2 Άλγεβρες εφοδιασμένες με διάταξη

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό των μονοειδών και των ομάδων από την αφηρημένη άλγεβρα.

Ορισμός 23. Ένα σύνολο M μαζί με μία (κλειστή) διμελή πράξη $*$ καλείται *μονοειδές (monoid)* αν η $*$ είναι προσεταιριστική και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in M$, τέτοιο ώστε $m * e = e * m = m \forall m \in M$. Αν επιπλέον υπάρχει αντίστροφος για κάθε στοιχείο του M , δηλαδή $\forall m \in M \exists m' \in M : m * m' = m' * m = e$, τότε το $(M, *)$, καλείται *ομάδα (group)*.

Εμπλουτίζοντας ένα lattice με δύο διμελείς πράξεις \star, \star' , ορίζουμε την εξής αλγεβρική δομή:

Ορισμός 24. Μία άλγεβρα $(\mathcal{K}, \vee, \wedge, \star, \star')$ καλείται *clodum (complete lattice-ordered double monoid)* αν:

¹αν δεν το 'χατε σχεφτεί μέχρι τώρα, αν προβάλλουμε ένα σημείο σε μια ευθεία η εκ νέου προβολή του σε αυτήν αφήνει το σημείο ανεπηρέαστο.

(C1) Το $(\mathcal{K}, \vee, \wedge)$ είναι ένα πλήρες, επιμεριστικό² lattice.

(C2) Το (\mathcal{K}, \star) είναι monoid με την \star να επιμερίζει επί suprema, δηλαδή $\alpha \star (\bigvee_i x_i) = \bigvee_i (\alpha \star x_i)$.

(C3) Το (\mathcal{K}, \star') είναι monoid με την \star' να επιμερίζει επί infima, δηλαδή $\alpha \star' (\bigwedge_i x_i) = \bigwedge_i (\alpha \star' x_i)$.

Τα cloda θα αποτελέσουν τη βασική αριθμητική των μη γραμμικών διανυσματικών χώρων που θα μελετήσουμε. Στην ειδική περίπτωση, όπου $\star = \star'$ επί του $\mathcal{K} \setminus \{\perp, \top\}$ και το (\mathcal{K}, \star) αποτελεί ομάδα, τότε καλούμε την πλουσιότερη αυτή άλγεβρα **clog** (complete lattice-ordered group).

Παράδειγμα 6.2.1. Έστω $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ οι επεκτεταμένοι πραγματικοί αριθμοί, \vee το γνωστό supremum τους και \wedge το γνωστό infimum τους, $+$ η γνωστή πρόσθεση των πραγματικών αριθμών μαζί με τη πράξη $+$, όπου οι δύο ταυτίζονται στους πραγματικούς αριθμούς, αλλά είναι $\alpha + (-\infty) = (-\infty) + \alpha = -\infty$, ενώ $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$ για κάθε $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε το $(\overline{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$ είναι ένα πλήρες, επιμεριστικό lattice με $\perp = -\infty, \top = \infty$, ενώ το $(\overline{\mathbb{R}}, +)$ αποτελεί ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0, αντίστροφο κάθε στοιχείου το συμβατικό αντίθετο του, όπου η πράξη $+$ ($+$) επιμερίζει επί suprema (infima)³. Άρα, το $(\overline{\mathbb{R}}, \vee, \wedge, +, +')$ αποτελεί clog. Παρατηρήστε ότι η δομή αυτή εμπεριέχει την αριθμητική του τροπικού ημι-δακτύλιου, καθώς και του ισομορφικού του $(\mathbb{R}_{\max}, \max, +)$ που εξετάσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, οπότε κατευθείαν βλέπουμε ότι η θεώρηση μέσω πλεγμάτων μάς εφοδίασε με αρκετά εκφραστικές δομές. Το clog αυτό το ονομάζουμε **max-plus clog**.

Παράδειγμα 6.2.2. Η δομή $([0, 1], \vee, \wedge, \min, \max)$ αποτελεί clodum, με $\perp = e' = 0$ και $\top = e = 1$ και θα ονομάζεται **max-min clodum**.

Όπως κάναμε στα δύο παραδείγματα, στη συνέχεια της μελέτης μας θα θεωρούμε cloda ή clogs που λαμβάνουν τιμές από ένα υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ και χρήσιμο είναι να τα σκεφτόμαστε ως ένα χώρο βαθμωτών μεγεθών, πάνω στον οποίο θα ορίσουμε, με τρόπο εντελώς ανάλογο με αυτό που γίνεται για τον ορισμό των γνωστών μας διανυσματικών χώρων, τους μη γραμμικούς χώρους που μάς ενδιαφέρουν. Τους χώρους αυτούς θα τους καλούμε Πλήρη Σταθμισμένα Πλέγματα (ή, καλύτερα, Complete Weighted Lattices).

6.3 Complete Weighted Lattices

Ορισμός 25. Έστω ένα σύνολο V και ένα clodum $(\mathcal{K}, \vee, \wedge, \star, \star')$ με ουδέτερα στοιχεία των \star, \star' τα e, e' , και ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο τα O, I , αντίστοιχα. Το V εφοδιασμένο με:

(α) μία πράξη διανυσματικού μέγιστου $(\vee : V \times V \rightarrow V)$ και μία πράξη διανυσματικού ελάχιστου $(\wedge : V \times V \rightarrow V)$ ⁴, και

(β) δύο πράξεις βαθμωτού “πολλαπλασιασμού” $(\star : \mathcal{K} \times V \rightarrow V$ και $\star' : \mathcal{K} \times V \rightarrow V)$ ⁵

²Ένα lattice καλείται επιμεριστικό αν $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ και $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

³π.χ. $1 + \max(-2, 8) = \max(1 + (-2), 1 + 8) = 9$.

⁴Χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια σύμβολα $\vee, \wedge, \star, \star', \leq$ που χρησιμοποιούνται και στο clodum, αλλά θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα αν αναφερόμαστε σε διανυσματική ή βαθμωτή πράξη.

⁵Δείτε υποσημείωση 4.

καλείται **Weighted Lattice** χώρος επί του \mathcal{K} αν για κάθε $X, Y, Z \in V, a, b \in \mathcal{K}$ ικανοποιούνται τα εξής αξιώματα:

$$(WL1) \quad X \vee Y \in V \text{ και } X \wedge Y \in V.$$

$$(WL2) \quad X \vee Y = Y \vee X \text{ και } X \wedge Y = Y \wedge X.$$

$$(WL3) \quad X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z \text{ και } X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z.$$

$$(WL4) \quad \exists O \in V : O \vee X = X, O \wedge X = O \text{ και } \exists I \in V : I \wedge X = X, I \vee X = I.$$

$$(WL5) \quad X \leq Y \iff Y = X \vee Y \text{ και } X \leq Y \iff X = X \wedge Y, \text{ όπου } \leq^6 \text{ μία μερική διάταξη επί του } V.$$

$$(WL6) \quad X \vee (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \text{ και } X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \wedge (X \wedge Z).$$

$$(WL7) \quad a \star X \in V \text{ και } a \star' X \in V.$$

$$(WL8) \quad a \star (b \star X) = (a \star b) \star X \text{ και } a \star' (b \star' X) = (a \star' b) \star' X.$$

$$(WL9) \quad e \star X = X \text{ και } e' \star' X = X.$$

$$(WL10) \quad a \star (X \vee Y) = (a \star X) \vee (a \star Y) \text{ και } a \star' (X \wedge Y) = (a \star' X) \wedge (a \star' Y).$$

$$(WL11) \quad (a \vee b) \star X = (a \star X) \vee (b \star X) \text{ και } (a \wedge b) \star' X = (a \star' X) \wedge (b \star' X).$$

Αν επιπλέον αυτών, το V είναι κλειστό ως προς άπειρα suprema και infima, και τα αξιώματα (WL10), (WL11) ισχύουν και για άπειρες συλλογές (βαθμωτών ή διανυσματικών) suprema και infima, τότε το V καλείται **Complete Weighted Lattice (CWL)** χώρος.

Παρατηρήστε την εξαιρετική ομοιότητα των αξιωμάτων (WL1)-(WL4), (WL7)-(WL11) με αυτά ενός (κλασικού) διανυσματικού χώρου, όπου στη θέση του διανυσματικού \vee, \wedge έχουμε τη διανυσματική πρόσθεση και στη θέση του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα έχουμε τις πράξεις \star, \star' . Τα δύο επιπλέον αξιώματα (WL5), (WL6) εξασφαλίζουν ότι το V θα είναι ένα επιμεριστικό lattice. Η μόνη ιδιότητα ενός διανυσματικού χώρου, αντίστοιχη της οποίας δεν υπάρχει στο χώρο που μόλις ορίσαμε, είναι αυτή της ύπαρξης αντίθετου ενός διανύσματος, αφού οι supremum και infimum πράξεις δεν είναι αντιστρέψιμες (ελπίζουμε να έχει γίνει πλέον κατανοητό μετά από τις τόσες αναφορές μας στο κείμενο). Αυτό το βασικό κενό γεμίζει η έννοια των adjunctions.

Όπως ο ορισμός των διανυσματικών χώρων είναι αρκετά γενικός και επιτρέπει τη μελέτη ακόμα και χώρων άπειρης διάστασης (π.χ. χώρους συναρτήσεων), το ίδιο φυσικά επιτρέπει και ο Ορισμός 25. Ωστόσο θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε χώρους $(\mathcal{K}^n, \vee, \wedge, \star, \star'), n \in \mathbb{N}$, όπου $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$ το βαθμωτό clodum επί του οποίου ορίζεται ο χώρος. Τα διανυσματικά \vee, \wedge ορίζονται επεκτείνοντας τις αντίστοιχες έννοιες του βαθμωτού clodum κατά συνιστώσα, δηλαδή $\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = [x_i \vee y_i]_{i=1}^n, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = [x_i \wedge y_i]_{i=1}^n$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι πράγματι αυτοί οι χώροι αποτελούν complete weighted lattices.

⁶ Δείτε υποσημείωση 4.

Παράδειγμα 6.3.1. Επί του max-plus clog $(\overline{\mathbb{R}}, \vee, \wedge, +, +')$ θεωρούμε το σύνολο $V = \overline{\mathbb{R}}^n$ των n -διάστατων διανυσμάτων, τις κατά συνιστώσα πράξεις του μέγιστου \vee και ελάχιστου \wedge , καθώς και την επέκταση των πράξεων $+$, $+$ ' ως εξής: $a + \mathbf{v} = [a + v_i]_{i=1}^n$, $a +' \mathbf{v} = [a +' v_i]_{i=1}^n$, $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}, \mathbf{v} \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Τότε ο χώρος V αποτελεί ένα complete weighted lattice, αφού ικανοποιεί τα αξιώματα (WL1-WL11), καθώς και τις προϋποθέσεις για την πληρότητα. Ο χώρος αυτός περιλαμβάνει όχι μόνο τη max-plus άλγεβρα, αλλά και τη δυϊκή min-plus.

Παράδειγμα 6.3.2. Επέκταση του max-min clodum, παρομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα.

Οι βασικοί τελεστές ενός CWL $(\mathcal{K}^n, \vee, \wedge, \star, \star')$, $n \in \mathbb{N}$, είναι max- \star και min- \star' πολλαπλασιασμοί ενός πίνακα $\mathbf{M} \in \mathcal{K}^{m \times n}$ με ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n$:

$$\delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{M} \boxtimes \mathbf{x} = \left[\bigvee_{j=1}^n m_{ij} \star x_j \right]_{i=1}^m \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{M} \boxtimes' \mathbf{x} = \left[\bigwedge_{j=1}^n m_{ij} \star' x_j \right]_{i=1}^m \quad (6.9)$$

Πρόταση 21. Οι τελεστές (6.8) και (6.9) είναι dilation και erosion τελεστές.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) &= \left[\bigvee_{j=1}^n m_{ij} \star (x_j \vee y_j) \right]_{i=1}^m \\ &= \left[\bigvee_{j=1}^n ((m_{ij} \star x_j) \vee (m_{ij} \star y_j)) \right]_{i=1}^m \\ &= \left[\bigvee_{j=1}^n (m_{ij} \star x_j) \vee \bigvee_{j=1}^n (m_{ij} \star y_j) \right]_{i=1}^m = \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \vee \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ομοίως για το erosion. □

Μπορεί να αποδειχθεί και μια αντίστροφη κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, κάθε τελεστής φ που ικανοποιεί μια sup- \star υπέρθεση, δηλαδή $\varphi(\bigvee_i c_i \star \mathbf{v}_i) = \bigvee_i c_i \star \varphi(\mathbf{v}_i)$, μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας max- \star πολλαπλασιασμός στη μορφή της (6.8). Ισχύει, φυσικά, και το ανάλογο για τις inf- \star υπερθέσεις. Παραπέμπουμε τους ενδιαφερόμενους αναγνώστες στο [Mar17] για τις σχετικές αποδείξεις, ωστόσο αναφέρουμε εδώ ότι οι τελεστές που ικανοποιούν τέτοιες υπερθέσεις, όταν ορίζονται επί ενός CWL **σημάτων**, αποτελούν τα αρχετυπικά παραδείγματα συστημάτων, καλούνται **κατακόρυφα-αναλλοίωτες διαστολές** ή **dilation V-translation-invariant (DVI)** και η σημασία τους για τη μορφολογική ανάλυση σήματος είναι αντίστοιχη με αυτή των γραμμικών χρονικά-αμετάβλητων συστημάτων στη κλασική θεωρία ανάλυσης σήματος. Η μελέτη τους διευκολύνεται μέσω του **μετασχηματισμού κλίσης (slope transform)** [HM97], που είναι το ανάλογο του μετασχηματισμού Fourier για τα γραμμικά χρονικά-αμετάβλητα συστήματα. Το γεγονός ότι τα συστήματα αυτά (στην διακριτοποιημένη εκδοχή τους) αναπαρίστανται μέσω των max- \star και min- \star'

πολλαπλασιασμών μάς δίνει ένα ισχυρό κίνητρο για να μελετήσουμε, αρχικά, τις εξισώσεις που ορίζουν και, εν συνεχεία, την αραιότητα αυτών των εξισώσεων (στις επόμενες δύο ενότητες).

Από την Πρόταση 19 γνωρίζουμε ότι σε κάθε διανυσματικό dilation $\delta_{\mathbf{M}}$, μέσω ενός πίνακα $\mathbf{M} \in \mathcal{K}^{m \times n}$, της μορφής (6.8), αντιστοιχεί ένας μοναδικός erosion τελεστής ε τέτοιος ώστε το ζεύγος (δ, ε) να συνθέτει ένα adjunction επί του \mathcal{K}^n . Ο συζυγής αυτός erosion τελεστής έχει την εξής μοναδική αναπαράσταση (για την πρώτη σχέση βλ. απόδειξη της Πρότασης 19):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{y}) &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \in \mathcal{K}^n \mid \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}') \leq \mathbf{y} \} \\
 &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \mid \bigvee_{j=1}^n m_{ij} \star x'_j \leq y_i, \forall i = 1, \dots, m \} \\
 &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \mid m_{ij} \star x'_j \leq y_i, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \} \\
 &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \mid \eta_{ij}(x'_j) \leq y_i, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \} \\
 &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \mid x'_j \leq \zeta_{ij}(y_i), \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n \} \\
 &= \bigvee \{ \mathbf{x}' \mid x'_j \leq \bigwedge_{i=1}^m \zeta_{ij}(y_i), \forall j = 1, \dots, n \} \\
 &= \bigwedge_{i=1}^m \zeta_{ij}(y_i)_{j=1}^n,
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

όπου για κάθε στοιχείο m_{ij} ορίσαμε ένα βαθμωτό dilation η_{ij} και $\zeta_{ij}(w) = \bigvee \{ u \in \mathcal{K} \mid m_{ij} \star u \leq w \}$ το συζυγές erosion του. Στην ειδική περίπτωση που μελετάμε ένα CWL επί ενός clog, τότε το βαθμωτό αυτό erosion γράφεται:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{ij}(w) &= \bigvee \{ u \in \mathcal{K} \mid m_{ij} \star u \leq w \} = \bigvee \{ u \in \mathcal{K} \mid m_{ij}^{-1} \star m_{ij} \star u \leq m_{ij}^{-1} \star w \} = \\
 &= \bigvee \{ u \in \mathcal{K} \mid u \leq m_{ij}^{-1} \star w \} = m_{ij}^{-1} \star w,
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

και, άρα, το διανυσματικό erosion σε αυτή την περίπτωση είναι $\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{y}) = [\bigwedge_{i=1}^m m_{ij}^{-1} \star y_i]_{j=1}^n = \mathbf{M}^* \boxtimes \mathbf{y}$, δηλαδή ο \min - \star πολλαπλασιασμός, μέσω του adjoint (ανάστροφου και ανά στοιχείο αντίστροφου) του πίνακα \mathbf{M} . Βλέπουμε, επομένως, ότι η Πρόταση 2, που δείξαμε στο Κεφάλαιο 1, δεν αποτελεί παρά διαπίστωση του γεγονότος ότι ο \max -plus πολλαπλασιασμός ενός πίνακα συνθέτει adjunction με το \min -plus πολλαπλασιασμό με τον adjoint πίνακα.

Παράδειγμα 6.3.3. Στο CWL του $\overline{\mathbb{R}}^2$ που ορίζεται επί του \max -plus clog, έστω το dilation:

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Το συζυγές erosion είναι:

$$\varepsilon(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Παράδειγμα 6.3.4. Στο CWL του $[0, 1]^2$ που ορίζεται επί του max-min clodum, έστω το dilation:

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min(0.3, x_1) \vee \min(0.7, x_2) \\ \min(0.4, x_1) \vee \min(1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Για να βρούμε το συζυγές διανυσματικό erosion πρέπει αρχικά να βρούμε τη μορφή του βαθμωτού erosion:

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(w) &= \bigvee \{u \in [0, 1] \mid \min(m_{ij}, u) \leq w\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } m_{ij} \leq w \\ w, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Άρα, το διανυσματικό erosion είναι:

$$\varepsilon(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \zeta_{11}(y_1) \vee \zeta_{21}(y_2) \\ \zeta_{12}(y_1) \vee \zeta_{22}(y_2) \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

6.4 Εξισώσεις dilation τελεστών

Έστω η εξίσωση

$$\delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (6.18)$$

και $S(\mathbf{M}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n \mid \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$ το σύνολο των λύσεων της. Για τους αναγνώστες που έχουν παρακολουθήσει με λεπτομέρεια τη μέχρι τώρα ανάλυση μας, δε θα πρέπει να αποτελεί έκπληξη ότι το συζυγές erosion παίζει κεντρικό ρόλο στην επίλυση της (6.18):

Θεώρημα 4. Αν η εξίσωση (6.18) έχει λύση, τότε $\delta_{\mathbf{M}}(\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b})) = \mathbf{b}$, δηλαδή η εφαρμογή του συζυγούς erosion στο διάνυσμα \mathbf{b} αποτελεί λύση και, μάλιστα, $\mathbf{x} \leq \varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b}) \forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{M}, \mathbf{b})$ (δηλαδή είναι η μεγαλύτερη).

Απόδειξη. Από την αναπαράσταση του erosion μέσω του dilation (βλ. Πρόταση 19) έχουμε:

$$\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b}) = \bigvee \{\mathbf{x} \mid \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}, \quad (6.19)$$

Έστω \mathbf{x}_1 τ.ώ. $\delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}$, τότε $\mathbf{x}_1 \in \{\mathbf{x} \mid \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$ και, άρα, $\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b}) \geq \mathbf{x}_1$. Όμως, κάθε dilation τελεστής είναι αύξων, άρα:

$$\delta_{\mathbf{M}}(\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b})) \geq \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}, \quad (6.20)$$

άρα, από (6.19) και (6.20), είναι: $\delta_{\mathbf{M}}(\varepsilon_{\mathbf{M}^*}(\mathbf{b})) = \mathbf{b}$. □

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 1.

6.5 Αραιές αναπαραστάσεις σε Complete Weighted Lattices

Έστω ένα βαθμωτό clodum $(\mathcal{K}, \vee, \wedge, \star, \star')$ και $(\mathcal{W} = \mathcal{K}^n, \vee, \wedge, \star, \star')$ το διανυσματικό complete weighted lattice επί του \mathcal{K} . Ορίζουμε αρχικά την έννοια του αραιού διανύσματος στους χώρους αυτούς.

Ορισμός 26. Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n$ καλείται *αραιό* αν περιέχει πολλά στοιχεία ίσα με \perp , όπου $\perp = \bigwedge \mathcal{K}$ (the infimum of \mathcal{K}). Ορίζουμε το *σύνολο υποστήριξης* του (*support set*), $\text{supp}(\mathbf{x})$ ως το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν σε τιμές διάφορες του \perp , ήτοι $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \mid x_i \neq \perp\}$.

Έστω πίνακας $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$ και διάνυσμα $\mathbf{b} \in \mathcal{K}^m$. Για να αποφύγουμε τετριμμένες λύσεις στα προβλήματα που θα μελετήσουμε, υποθέτουμε ότι $b_i \neq \perp$, $\forall i$ και $\bigvee_j a_{ij} \neq \perp$, $\forall i$. Αναζητούμε την αραιότερη λύση $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n$ της εξίσωσης

$$\mathbf{A} \star \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (6.21)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n} |\text{supp}(\mathbf{x})| \\ \text{s.t. } \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

όπου $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_j \neq \perp\}$ το σύνολο υποστήριξης του \mathbf{x} . Έστω ε ο συζυγής erosion τελεστής του δ και $S(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{K}^n \mid \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$ το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης. Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in S(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, ορίζουμε σύνολα

$$I_j(\mathbf{x}) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid a_{ij} \star x_j = b_i\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.23)$$

Παρατηρήστε ότι $\bigcup_j I_j(\mathbf{x}) = \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Λήμμα 3. $I_j(\mathbf{x}) \subseteq I_j(\varepsilon(\mathbf{b}))$, $\forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Απόδειξη. Έστω $i \in I_j(\mathbf{x})$, τότε $a_{ij} \star x_j = b_i$. Είναι $x_j \leq [\varepsilon(\mathbf{b})]_j$ (από Θεώρημα 4) και, καθώς η πράξη \star είναι αύξουσα (ως dilation στο \mathcal{K}), έχουμε $a_{ij} \star x_j \leq a_{ij} \star [\varepsilon(\mathbf{b})]_j \iff b_i \leq a_{ij} \star [\varepsilon(\mathbf{b})]_j$. Όμως $a_{ij} \star [\varepsilon(\mathbf{b})]_j \leq b_i$ για κάθε i, j (αφού το $\varepsilon(\mathbf{b})$ αποτελεί λύση της (6.21)), άρα $a_{ij} \star [\varepsilon(\mathbf{b})]_j = b_i$, δηλαδή $i \in I_j(\varepsilon(\mathbf{b}))$. \square

Έστω $C \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ το μικρότερης πληθικότητας σύνολο για το οποίο ισχύει $\bigcup_{j \in C} I_j(\varepsilon(\mathbf{b})) = \{1, 2, \dots, m\}$, τότε το C ορίζει την αραιότερη λύση της (6.21).

Θεώρημα 5. Το διάνυσμα \mathbf{x}^* , που ορίζεται ως εξής:

$$x_j^* = \begin{cases} [\varepsilon(\mathbf{b})]_j, & j \in C \\ \perp, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (6.24)$$

αποτελεί λύση του προβλήματος (6.22).

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}' \in \mathcal{K}^n$ που ικανοποιεί την (6.21), τότε $\bigcup_{j \in \text{supp}(\mathbf{x}')} I_j(\mathbf{x}') = \{1, 2, \dots, m\}$. Από Λήμμα 3 έπεται ότι και $\bigcup_{j \in \text{supp}(\mathbf{x}')} I_j(\varepsilon(\mathbf{b})) = \{1, 2, \dots, m\}$. Άρα, εξ ορισμού, είναι $|\text{supp}(\mathbf{x}')| \geq |C| = |\text{supp}(\mathbf{x})|$. \square

Επομένως για να υπολογίσουμε την αραιότερη λύση της (6.21), αρκεί να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\varepsilon(\mathbf{b})$ και ύστερα το ελάχιστο κάλυμμα του $\{1, 2, \dots, m\}$ μέσω των $I_j(\varepsilon(\mathbf{b}))$. Ακολουθεί ένα παράδειγμα για τα παραπάνω.

Παράδειγμα 6.5.1. Έστω το βαθμωτό clodum $([0, 1], \vee, \wedge, \min, \max)$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Το συζυγές διανυσματικό erosion ορίζεται μέσω του βαθμωτού erosion ζ :

$$\zeta(\alpha, w) = \begin{cases} w, & w < \alpha \\ 1, & w \geq \alpha. \end{cases} \quad (6.26)$$

Άρα είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} \zeta(1, 0.8) \wedge \zeta(0.3, 0.4) \wedge \zeta(0.7, 0.7) \\ \zeta(0.4, 0.8) \wedge \zeta(1, 0.4) \wedge \zeta(0.2, 0.7) \\ \zeta(0, 0.8) \wedge \zeta(0.5, 0.4) \wedge \zeta(1, 0.7) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 \wedge 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0.4 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0.4 \wedge 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

το οποίο διάνυσμα αποτελεί λύση της εξίσωσης (6.24), αφού:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon(\mathbf{b})) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \min(1, 0.8) \vee \min(0.4, 0.4) \vee \min(0, 0.4) \\ \min(0.3, 0.8) \vee \min(1, 0.4) \vee \min(0.5, 0.4) \\ \min(0.7, 0.8) \vee \min(0.2, 0.4) \vee \min(1, 0.4) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 \vee 0.4 \vee 0 \\ 0.3 \vee 0.4 \vee 0.4 \\ 0.7 \vee 0.2 \vee 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Εδώ είναι $I_1(\varepsilon(\mathbf{b})) = \{1, 3\}$, $I_2(\varepsilon(\mathbf{b})) = I_3(\varepsilon(\mathbf{b})) = \{2\}$, επομένως οι αραιότερες λύσεις της εξίσωσης είναι τα διανύσματα $(0.8, 0.4, 0)^T$ και $(0.8, 0, 0.4)^T$.

Μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε ότι σε μία συγκεκριμένη κλάση από cloda το πρόβλημα (6.22) είναι υπολογιστικά δύσκολο και, επομένως, ο αλγόριθμος επίλυσης μέσω του ελάχιστου καλύμματος είναι βέλτιστος. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε cloda στα οποία ισχύει η υπόθεση:

Υπόθεση 1.

$$\exists c \geq e, c \neq e : \bigvee \{u \in \mathcal{K} \mid c \star u = c\} = e \quad (6.29)$$

Παρατηρήστε, ότι κάθε clog ικανοποιεί τετριμμένα την Υπόθεση 1, αφού $c \star u = c \iff u = e, \forall c$. Αντιθέτως, στο clodum $([0, 1], \vee, \wedge, \min, \max)$ που είδαμε προηγουμένως αυτή δεν ισχύει, καθώς $\nexists c \geq e, c \neq e$ (αφού $e = \top$).

Θεώρημα 6. Έστω k -sparse το αντίστοιχο του (6.22) πρόβλημα απόφασης: Δεδομένων \mathbf{A}, \mathbf{b} με τιμές από ένα χώρο \mathcal{K} που ισχύει η Υπόθεση 1, υπάρχει λύση της (6.21) με $|\text{supp}(\mathbf{x})| \leq k$; Το k -sparse είναι \mathcal{NP} -hard.

Απόδειξη. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι k -Set Cover \leq_p (ανάγεται πολυωνυμικά) k -sparse. Έστω $U = \{1, 2, \dots, m\}$ και $\{M_j\}$ μια συλλογή n υποσυνόλων του. Ορίζουμε πίνακα $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$ και διάνυσμα $\mathbf{b} \in \mathcal{K}^m$ ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} c, & i \in M_j \\ e, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (6.30)$$

$$b_i = c, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

όπου το $c \in \mathcal{K}$ ικανοποιεί τη συνθήκη της Υπόθεσης 1. Αρχικά υπολογίζουμε το $\varepsilon(\mathbf{b})$:

$$[\varepsilon(\mathbf{b})]_j = \bigwedge_i \zeta(a_{ji}, b_i) = \zeta(c, c) \wedge \zeta(e, c). \quad (6.31)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \zeta(e, c) &= \sup\{u \in \mathcal{K} \mid e \star u \leq c\} \\ &= \sup\{u \in \mathcal{K} \mid u \leq c\} = c, \\ \zeta(c, c) &= \sup\{u \in \mathcal{K} \mid c \star u \leq c\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Έστω $u \geq e$, τότε $c \star u \geq c$, άρα αν ισχύει και $c \star u \leq c$, θα είναι $c \star u = c$. Από Υπόθεση 1 έπεται λοιπόν ότι $\zeta(c, c) = e$. Επομένως, $[\varepsilon(\mathbf{b})]_j = e, \forall j$. Είμαστε σε θέση να δείξουμε τις δύο κατευθύνσεις της αναγωγής:

- \Rightarrow : Αν το $(U, \{M_j\}, k)$ έχει κάλυμμα που ορίζεται μέσω του S , δηλαδή $\bigcup_{j \in S} M_j = U$ με $|S| \leq k$, τότε ορίζουμε \mathbf{x} ως:

$$x_j = \begin{cases} [\varepsilon(\mathbf{b})]_j = e, & j \in S \\ \perp, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (6.33)$$

και είναι $\bigvee_j a_{ij} \star x_j = c \star e \vee e \star \perp = c$, άρα $\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ με $|\text{supp}(\mathbf{x})| = |S| \leq k$, δηλαδή το (\mathbf{A}, \mathbf{b}) έχει k -sparse λύση.

- \Leftarrow : Αντίστροφα, αν το (\mathbf{A}, \mathbf{b}) έχει k -sparse λύση, τότε $\bigcup_{j \in \text{supp}(\mathbf{x})} M_j = \{1, 2, \dots, m\}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_j(\mathbf{x}) &= \{i \mid a_{ij} \star x_j = b_i\} \\ &= \{i \mid a_{ij} \star x_j = c\} \end{aligned} \quad (6.34)$$

6.5. Αραιές αναπαραστάσεις σε Complete Weighted Lattices

Από Θεώρημα 4 είναι όμως $x_j \leq [\varepsilon(\mathbf{b})]_j = e$, άρα $I_j(\mathbf{x}) = \{i \mid a_{ij} = c\} = M_j$. Δηλαδή το $(U, \{M_j\})$ έχει κάλυμμα μεγέθους το πολύ k .

□

Όπως βλέπουμε, λοιπόν, το πρόβλημα εύρεσης αραιότερης λύσης μιας εξίσωσης σε ένα complete weighted lattice είναι πολύ στενά συνδεδεμένο με αυτό του Minimum Set Cover. Στο κεφάλαιο 3, στηριζόμενοι στο submodularity του προβλήματος, παρουσιάσαμε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος. Μέσω αυτού του αλγόριθμου, λοιπόν, μπορούμε να λύσουμε το (6.22) αποδοτικά σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$ με λόγο προσέγγισης $H(d_{\max})$, όπου d_{\max} η πληθικότητα του μεγαλύτερου εκ των συνόλων $I_j(\varepsilon(\mathbf{b}))$.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

7.1 Συνεισφορές

Ολοκληρώντας την εργασία μας συνοψίζουμε τις κύριες ερευνητικές της συνεισφορές:

- Ανάπτυξη των αραιών αναπαραστάσεων στη max-plus άλγεβρα με εκτενή μελέτη της θεωρίας αραιών προσεγγιστικών λύσεων μιας max-plus εξίσωσης. Πιο συγκεκριμένα, αποδείχτηκε το submodularity του προβλήματος εύρεσης αραιών προσεγγιστικών υπο-λύσεων για κάθε ℓ_p , $p < \infty$, νόρμα, ενώ μελετήθηκε το ℓ_∞ πρόβλημα που αποσύρει τον περιορισμό των υπο-λύσεων.
- Εισαγωγή νόμου ελέγχου για τη σταθεροποίηση δυναμικών max-plus συστημάτων. Ο νόμος αυτός, που προκύπτει από την επίλυση μιας max-plus εξίσωσης, δύναται να γίνει αραιός (δηλαδή το διάνυσμα ελέγχου να γίνει αραιό), οδηγώντας σε εξοικονόμηση πόρων στο σύστημα.
- Πρόταση δύο μεθόδων για την επίλυση του θεμελιώδους προβλήματος της κυρτής παρεμβολής, μέσω των αλγόριθμων εύρεσης αραιής προσεγγιστικής λύσης μιας max-plus εξίσωσης. Εκτενής αριθμητικός πειραματισμός.
- Σύνδεση της θεωρίας που παρουσιάστηκε με το πρόβλημα αποκοπής νευρώνων στα μορφολογικά νευρωνικά δίκτυα (μετά την εκπαίδευσή τους).
- Εισαγωγή της έννοιας της αραιότητας στα complete weighted lattices. Επίλυση του προβλήματος εύρεσης αραιής λύσης σε εξισώσεις διαστολών. Απόδειξη της υπολογιστικής δυσκολίας του προβλήματος.

7.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Η εργασία μας φυσικά δεν κάλυψε ολόκληρη την περιοχή των αραιών αναπαραστάσεων στα τροπικά μαθηματικά. Εντοπίζουμε τις εξής πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις:

- Εξερεύνηση συνθηκών που επιτρέπουν την ύπαρξη μοναδικών αραιών προσεγγιστικών λύσεων max-plus εξισώσεων.
- Εφαρμογή του τροπικού αλγόριθμου παρεμβολής SGLE στο γενικότερο πρόβλημα της μη κυρτής παρεμβολής. Παρατηρήστε ότι η συνθήκη $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ επιτρέπει την ανακατασκευή του lower convex envelope των δεδομένων, οπότε το αποτέλεσμα του αλγόριθμου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως surrogate ακόμα και μιας μη κυρτής συνάρτησης για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.
- Σύνδεση της αραιότητας με περισσότερα προβλήματα εφαρμογών στις περιοχές της Μηχανικής Μάθησης. Για τις συνδέσεις μεταξύ τροπικών μαθηματικών και νευρωνικών δικτύων, παραπέμπουμε στα [CM17; CM19; ZNL18; SM19; SM20; MCT21].
- Περαιτέρω ανάπτυξη της καθολικής θεωρίας αραιών αναπαραστάσεων στα complete weighted lattices. Για παράδειγμα, στην εργασία μας δεν καταλήξαμε σε συμπέρασμα σχετικά με την υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος εύρεσης αραιότερης λύσης στον ασαφή max-min χώρο. Επομένως, ενδέχεται στην ειδική αυτή περίπτωση να υπάρχει ταχύτερος αλγόριθμος από αυτόν εύρεσης του minimum set cover. Επέκταση της θεωρίας προσεγγιστικών αραιών λύσεων στους χώρους αυτούς.
- Τέλος, στο ευρύτερο πλαίσιο των τροπικών μαθηματικών πιστεύουμε πως υπάρχει ένας ωκεανός ανεξερεύνητων προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με εργαλεία της submodular βελτιστοποίησης. Για παράδειγμα, όπως αναφέρθηκε και στο κείμενο, πρόσφατα θεμελιώθηκε η υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \boxplus \mathbf{x}\|_2$ (βλ. [Hoo19]). Η αναγωγή γίνεται μέσω του minimum set cover, γεγονός που το συνδέει αυτόματα με τη submodular βελτιστοποίηση και πιστεύουμε πως επιτρέπει την ανάπτυξη γρήγορου άπληστου αλγόριθμου για την προσεγγιστική λύση του. Το Κεφάλαιο 3 αποτελεί μια καλή αφετηρία για κάποια ή κάποιον που επιθυμεί να λύσει τέτοιου είδους προβλήματα.

Βιβλιογραφία

- [AGG12] M. Akian, S. Gaubert, and A. Guterman. “Tropical Polyhedra Are Equivalent To Mean Payoff Games”. In: *Int’l J. Algebra and Computation* 22.1 (2012).
- [AGL08] M. Akian, S. Gaubert, and A. Lakhoua. “The Max-Plus Finite Element Method for Solving Deterministic Optimal Control Problems: Basic Properties and Convergence Analysis”. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.2 (Jan. 2008), pp. 817–848.
- [Bac13] F. Bach. *Learning with Submodular Functions: A Convex Optimization Perspective*. 2013. arXiv: 1111.6453 [cs.LG].
- [But10] P. Butkovič. *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer, 2010.
- [BV04] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [Cho54] G. Choquet. “Theory of capacities”. In: *Annales de l’Institut Fourier* 5 (1954), pp. 131–295.
- [CM17] V. Charisopoulos and P. Maragos. “Morphological Perceptrons: Geometry and Training Algorithms”. In: *Proc. Int’l Symp. Mathematical Morphology (ISMM)*. Ed. by J. Angulo and et al. Vol. 10225. LNCS. Springer, Cham, 2017, pp. 3–15.
- [CM19] V. Charisopoulos and P. Maragos. *A Tropical Approach to Neural Networks with Piecewise Linear Activations*. 2019. arXiv: 1805.08749 [stat.ML].
- [CRT06] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao. “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements”. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 59.8 (2006), pp. 1207–1223.
- [Cun62] R. A. Cuninghame-Green. “Describing Industrial Processes with Interference and Approximating Their Steady-State Behaviour”. In: *OR* 13.1 (1962), pp. 95–100.
- [Cun79] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Springer-Verlag, 1979.
- [DK18] A. Das and D. Kempe. “Approximate Submodularity and Its Applications: Subset Selection, Sparse Approximation and Dictionary Selection”. In: *Journal of Machine Learning Research* 19.1 (Jan. 2018), pp. 74–107. ISSN: 1532-4435.
- [Don06] D. Donoho. “Compressed sensing”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (2006), pp. 1289–1306.

- [Edm70] J. Edmonds. “Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra”. In: *Combinatorial Structures and Applications* (1970), pp. 69–87.
- [Ela10] M. Elad. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. 1st. Springer, 2010.
- [FFY20] G. Franchi, A. Fehri, and A. Yao. “Deep morphological networks”. In: *Pattern Recognition* 102 (2020), p. 107246.
- [Goo+13] I. J. Goodfellow et al. *Maxout Networks*. 2013. arXiv: 1302.4389.
- [Hei94] H.J.A.M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Boston: Acad. Press, 1994.
- [HM97] H.J.A.M. Heijmans and P. Maragos. “Lattice Calculus of the Morphological Slope Transform”. In: *Signal Processing* 59.1 (May 1997), pp. 17–42.
- [Hoo19] J. Hook. *Max-plus Linear Inverse Problems: 2-norm regression and system identification of max-plus linear dynamical systems with Gaussian noise*. 2019. arXiv: 1902.08194 [math.NA].
- [KG14] A. Krause and D. Golovin. “Submodular Function Maximization”. In: *Tractability*. 2014.
- [Lit05] G. Litvinov. *The Maslov Dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction*. 2005.
- [Lov83] L. Lovász. “Submodular functions and convexity”. In: *Mathematical Programming The State of the Art. Springer, Berlin, Heidelberg* (1983).
- [Mal09] S. Mallat, ed. *A Wavelet Tour of Signal Processing (Third Edition)*. Third Edition. Boston: Academic Press, 2009.
- [Mar13] P. Maragos. “Representations for Morphological Image Operators and Analogies with Linear Operators”. In: ed. by Peter W. Hawkes. Vol. 177. *Advances in Imaging and Electron Physics*. Elsevier, 2013, pp. 45–187.
- [Mar17] P. Maragos. “Dynamical Systems on Weighted Lattices: General Theory”. In: *Math. Control Signals Syst.* 29.21 (2017).
- [Mar94] P. Maragos. “Morphological Systems: Slope Transforms and Max-Min Difference and Differential Equations”. In: *Signal Processing* 38.1 (July 1994), pp. 57–77.
- [Mas87] V. P. Maslov. “On a new principle of superposition for optimization problems”. In: *Russian Mathematical Surveys* 42.3 (June 1987), pp. 43–54.
- [Mat75] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. New York: Wiley, 1975.
- [MB09] A. Magnani and S. P. Boyd. “Convex piecewise-linear fitting”. In: *Optim. Eng.* 10 (2009), pp. 1–17.
- [MCT21] P. Maragos, V. Charisopoulos, and E. Theodosis. “Tropical Geometry and Machine Learning”. In: *Proceedings of the IEEE* 109.5 (May 2021), pp. 728–755.
- [MS15] D. Maclagan and B. Sturmfels. *Introduction to Tropical Geometry*. Amer. Math. Soc., 2015.

- [MT20] P. Maragos and E. Theodosis. “Multivariate Tropical Regression and Piecewise-Linear Surface Fitting”. In: *Proc. IEEE Int’l Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2020, pp. 3822–3826.
- [MT21] P. Maragos and E. Theodosis. “Tropical Geometry and Piecewise-Linear Approximation of Curves and Surfaces on Weighted Lattices”. In: *Shape Analysis: Euclidean, Discrete and Algebraic Geometric Methods (2021)*. Ed. by C. Kiselman M. Breuss A. Bruckstein and P. Maragos.
- [Nat95] B. K. Natarajan. “Sparse Approximate Solutions to Linear Systems”. In: *SIAM J. Comput.* 24.2 (1995), pp. 227–234.
- [Roc70] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, 1970.
- [RU03] G. X. Ritter and G. Urcid. “Lattice Algebra Approach to Single-Neuron Computation”. In: *IEEE Trans. Neural Netw.* 14.2 (2003), pp. 282–295.
- [SE11] P. Sussner and E. L. Esmi. “Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm”. In: *Information Sciences* 181 (2011), pp. 1929–1950.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Acad. Press, 1982.
- [Ser88] J. Serra, ed. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Vol. 2: Theoretical Advances. Acad. Press, 1988.
- [SM19] G. Smyrnis and P. Maragos. *Tropical Polynomial Division and Neural Networks*. 2019. arXiv: 1911.12922 [cs.LG].
- [SM20] G. Smyrnis and P. Maragos. “Multiclass Neural Network Minimization via Tropical Newton Polytope Approximation”. In: *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning*. Ed. by III, Hal Daumé and Singh, Aarti. Vol. 119. Proceedings of Machine Learning Research. PMLR, 13–18 Jul 2020, pp. 9068–9077.
- [TM19] A. Tsiamis and P. Maragos. “Sparsity in Max-plus Algebra and Systems”. In: *Discrete Events Dynamic Systems* 29 (2019), pp. 163–189.
- [TTM21a] N. Tsilivis, A. Tsiamis, and P. Maragos. “Sparse Approximate Solutions in Max-Plus Equations”. In: *Discrete Geometry and Mathematical Morphology*. Ed. by Lindblad, Joakim and Malmberg, Filip and Sladoje, Nataša. Cham: Springer International Publishing, June 2021, 538–550.
- [TTM21b] N. Tsilivis, A. Tsiamis, and P. Maragos. “Sparsity in Max-Plus Algebra and Applications in Multivariate Convex Regression”. In: *Proc. 46th IEEE Int’l Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-2021)*. Toronto, June 2021.
- [Wol82] L. Wolsey. “An analysis of the greedy algorithm for the submodular set covering problem”. In: *Combinatorica* 2 (1982), pp. 385–393.
- [Zha+19] Y. Zhang et al. “Max-Plus Operators Applied to Filter Selection and Model Pruning in Neural Networks”. In: *Proc. Int’l Symp. Mathematical Morphology (ISMM)*. Ed. by B. Burgeth and et al. Vol. 11564. LNCS. Springer Nature, 2019, pp. 310–322.

- [ZNL18] L. Zhang, G. Naitzat, and L.-H. Lim. “Tropical Geometry of Deep Neural Networks”. In: *Proc. Int’l Conf. on Machine Learning*. Vol. 80. PMLR, 2018, pp. 5824–5832.