Thierry Cazenave

Paris, le 5 octobre 2016

Rapport sur le mémoire "Sur l'explosion critique et surcritique pour les équations des ondes et de la chaleur semi-linéaires" présenté par Charles Collot en vue de l'obtention du Doctorat de l'Université de Nice Sophia Antipolis

Ce mémoire est consacré au phénomène d'explosion en temps fini dans les équations aux dérivées partielles non-linéaires, et plus précisément à l'étude de la dynamique à l'explosion pour les équations de la chaleur et des ondes, dans les cas critique et sur-critique.

Il est rédigé en anglais (hormis une brève introduction en français) et est constitué de six chapitres. Le premier (chapitre 0) est consacré à une introduction générale suivie d'un bref résumé des résultats, et le second (chapitre 1) à une présentation plus approfondie des résultats. Les quatre chapitres suivants (chapitres 2 à 5) constituent le cœur du mémoire et contiennent en particulier les preuves détaillées des résultats.

La thèse concerne d'une part l'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + |u|^{p-1} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

sur l'espace entier $\mathbb{R}^d$, et d'autre part l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

soit sur l'espace entier $\mathbb{R}^d$, soit sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec conditions aux limites de Dirichlet. Pour ces deux équations, intervient l'exposant critique $s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$. Ces équations sont critiques (pour l'énergie) lorsque $s_c = 1$, c'est à dire $p - 1 = \frac{4}{d-2}$, sous-critiques lorsque $s_c < 1$ et sur-critiques lorsque $s_c > 1$. Dans les cas critique et sur-critique, soit $p - 1 \geq \frac{4}{d-2}$, les équations (1) et (2) possèdent une famille de solutions stationnaires régulières positives et radiales, qui sont toutes des dilatations d'une certaine solution $Q > 0$, dite état fondamental, solution de

$$\begin{cases} Q'' + \frac{d-1}{r} Q' + Q^p = 0 \\ Q(0) = 1, \quad Q'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) possèdent des solutions qui explosent en temps fini, et la compréhension du mécanisme de l'explosion constitue l'un des problèmes les plus importants, fascinants, et difficiles, dans le domaine des équations aux dérivées partielles non-linéaires. C'est le sujet de cette thèse.

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie, Université Paris-Diderot
Centre National de la Recherche Scientifique, UMR 7598
Boîte courrier 187
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
Tel.: +33 1 44 27 71 71 - Secrétariat +33 1 44 27 42 98 - Fax +33 1 44 27 72 00
thierry.cazenave@upmc.fr
www.ljll.math.upmc.fr/~cazenave/

Deux scénarios d'explosion ont été mis en évidence. D'une part, l'explosion décrite localement par les solutions self-similaires rétrogrades (backwards), les solutions concernées explosant toutes à la même vitesse, celle des solutions de l'équation différentielle ordinaire sous-jacente. On parle alors d'explosion de type I, les autres mécanismes étant dits de type II. Dans certains cas critiques ou sur-critiques, on voit concurremment apparaitre un scénario différent (et donc de type II), correspondant à la concentration de l'état fondamental.

Je décris très brièvement ci-dessous les principaux résultats présentés dans les quatre chapitres principaux du mémoire.

Explosion de type II pour l'équation des ondes sur-critique (Chapitre 2)

Ce chapitre fait l'objet d'un article à paraître dans les *Memoirs of the American Mathematical Society* (pré-publication de 142 pp. dans *arXiv*). Il est consacré à l'équation des ondes (1) en dimension $d \geq 11$ et pour des valeurs de $p \in 2\mathbb{N}+1$ sur-critiques, plus précisément $p > p_{JL}$ où $p_{JL} = 1 + \frac{4}{d-4-2\sqrt{d-1}}$ (exposant de Joseph et Lundgren). Les deux résultats principaux de ce chapitre sont d'une part l'existence ($T > 0$ étant donné) d'une famille $(u_\ell)_{\ell \geq \ell_0}$ de solutions explosives de (1), dont les données initiales sont régulières et à support compact, et qui concentrent à l'explosion l'état fondamental Q, c'est à dire

$$u_\ell(t,x) \sim \lambda(t)^{-\frac{2}{p-1}} Q\left(\frac{|x|}{\lambda(t)}\right) \tag{4}$$

pour $0 \leq t < T$ où $\lambda(t) \sim (T-t)^{\frac{\ell}{\alpha}}$ et $\alpha = \alpha(p,d)$ est une certaine constante; et d'autre part l'existence pour tout $\ell \geq \ell_0$ d'une variété Lipschitz de co-dimension $\ell - 1$ (dans un espace *ad hoc*) de données initiales produisant des solutions de (1) explosant suivant (4). Notons que l'existence de solutions explosant selon ce scénario n'était connue que dans le cas $p = p_c$ en dimensions $d = 3,4$. En dépit de la simplicité relative de ces énoncés, leur preuve est d'une difficulté considérable. Elle fait appel à une stratégie complexe et des techniques extrêmement élaborées développées ces dernières années dans l'étude de la dynamique de l'explosion. Les points particulièrement marquants en sont la construction d'une solution approchée associée à un système d'ODE, l'estimation de l'erreur par des méthodes d'énergie et, pour la construction de la variété, l'analyse des directions d'instabilité de la solution approchée. Notons que l'exposant p_{JL} de Joseph et Lundgren intervient du fait que le comportement fin à l'infini de Q est différent suivant que $p < p_{JL}$ ou $p > p_{JL}$.

Explosion de type II pour l'équation de la chaleur sur-critique (Chapitre 3)

Ce chapitre, qui fait l'objet d'un article soumis (pré-publication de 105 pp. dans *arXiv*), est consacré à l'équation de la chaleur (2) dans un domaine borné régulier quelconque en dimension $d \geq 11$, avec conditions aux limites de Dirichlet, et pour des valeurs de $p \in 2\mathbb{N}+1$ sur-critiques $p > p_{JL}$. Le résultat principal du chapitre est la construction de solutions qui explosent en concentrant localement l'état fondamental Q. Plus précisément, étant donnés $x_0 \in \Omega$ et une fonction de cut-off régulière χ_{x_0} à support compact dans Ω, il existe pour tout entier ℓ assez grand une donnée initiale régulière et à support compact dans Ω telle que la solution correspondante u de (2) explose en un temps $T < \infty$ par concentration de l'état fondamental Q en un point x_0' proche de x_0, c'est à dire que

$$u(t,x) \sim \chi_{x_0} \lambda(t)^{-\frac{2}{p-1}} Q(\tfrac{|x-x_0'|}{\lambda(t)}) \tag{5}$$

pour $0 \le t < T$ où $\lambda(t) \sim (T-t)^{\frac{\ell}{\alpha}}$ et $\alpha = \alpha(p,d)$ est une certaine constante. L'existence de solutions concentrant l'état fondamental était connue dans le cas où Ω est une boule, celles-ci étant obtenues par des méthodes non constructives. Ici, Charles Collot considère le cas d'un ouvert Ω général. De plus il utilise une stratégie de même nature que celle utilisée au chapitre précédent pour l'équation des ondes. Celle-ci est certes fort délicate, mais constructive.

Dynamique près de l'état fondamental pour l'équation de la chaleur critique (Chapitre 4)

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis, en collaboration avec Frank Merle et Pierre Raphaël (pré-publication de 81 pp. dans *arXiv*), et concerne l'équation de la chaleur (2) sur $\mathbb{R}^d$ dans le cas critique $p = p_c$. Des arguments formels (justifiés rigoureusement pour $d = 4$) suggèrent pour $3 \le d \le 6$ l'existence de solutions explosives de type II, au voisinage de l'état fondamental, correspondant à la concentration de ce dernier. Ces arguments formels ne donnent rien lorsque $d \ge 7$, qui est le cas considéré dans ce chapitre. Le résultat principal est une classification des solutions au voisinage de Q (dans l'espace de l'énergie). Plus précisément, toute donnée initiale dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ proche de l'état fondamental Q dans la norme $\dot{H}^1$ produit une solution de (2) qui, soit est globale et converge lorsque $t \to \infty$ vers un état fondamental (dilaté et translaté de Q), soit est globale et tend vers 0, soit explose en temps fini de type I. Tous ces scénarios sont atteints et les deux derniers sont stables dans la norme de $\dot{H}^1$. En particulier, il n'y a pas d'explosion de type II au voisinage de Q. Comme on peut l'imaginer, la preuve d'un tel résultat est très difficile et élaborée. Elle passe notamment par un théorème de type Liouville d'un intérêt indépendant. Plus précisément (toujours en dimension $d \ge 7$) il existe deux solutions $Q^{\pm}$ émanant de Q à $-\infty$, telles que Q^+ est globale et converge vers 0 à $+\infty$ et Q^- explose en temps fini de type I. De plus, toute solution qui reste proche au voisinage de $t = -\infty$ de l'ensemble des dilatés-translatés de Q est, soit Q, soit Q^+, soit Q^-. L'un des points-clés de la preuve est une estimation de coercivité de l'opérateur linéarisé $-\Delta - pQ^{p-1}$, où intervient la condition $d \ge 7$.

Stabilité de l'explosion self-similaire localisée pour l'équation de la chaleur sur-critique (Chapitre 5)

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis, en collaboration avec Pierre Raphaël et Jérémie Szeftel (pré-publication de 82 pp. dans *arXiv*), et concerne l'équation de la chaleur (2) sur $\mathbb{R}^3$ dans le cas sur-critique $p > p_c$. Les solutions self-similaries explosives de (2) sont de la forme $u(t,x) = (T-t)^{-\frac{1}{p-1}} f(\frac{x}{\sqrt{T-t}})$ où le profil f est solution d'une équation elliptique non-linéaire. En toute dimension, et pour tout $p > 1$, on dispose du profil constant $f = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$. Lorsque $d \ge 3$ et $p > \frac{d}{d-2}$, on a également le profil singulier $f = c(d,p)|x|^{-\frac{2}{p-1}}$. Enfin, lorsque $d \ge 3$ et $p_c < p < p_{JL}$, il existe une suite Φ_n de profils radiaux, réguliers et localisés, qui se comportent comme $c_n|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ à l'infini. Dans le cas considéré ici ($d = 3$ et $p > p_c$), les trois profils coexistent. Le résultat principal de ce chapitre concerne la stabilité de l'explosion self-silimaire à profil régulier et localisé. Plus précisément pour n suffisamment grand, il existe une variété Lipschitz de co-dimension n (dans un espace approprié) formée de données initiales au voisinage de Φ_n, localisées en espace, non-radiales, qui engendrent des solutions de (2) explosant en un temps $T < \infty$ sous la forme

$$u(t,x) \sim \lambda(t)^{-\frac{2}{p-1}} \Phi_n\left(\frac{x-x_0}{\lambda(t)}\right)$$

avec $\lambda(t) \sim \sqrt{2(T-t)}$. Il s'agit donc d'explosion de type I, mais avec un profil localisé. La preuve, ici encore élaborée et difficile, repose en particulier sur une nouvelle approche, par bifurcation, de la construction des profils localisés, ainsi que sur des estimations d'énergie.

En conclusion, Charles Collot présente dans ce mémoire un ensemble de résultats extrêmement originaux, de premier plan, et d'une très grande difficulté, dans un domaine particulièrement compétitif au plus haut niveau de la recherche en EDP non-linéaires. Les preuves requièrent la maîtrise d'un large spectre de techniques très élaborées, et le mémoire proprement dit est rédigé avec clarté. Il s'agit d'une thèse d'une ampleur exceptionnelle, tant par la profondeur des résultats obtenus que par la variété et la difficulté des techniques mises en œuvre. Je recommande avec enthousiasme la soutenance.

Avis favorable à la soutenance

Paris, le 5 octobre 2016

Thierry Cazenave