Fluctuations de la mesure empirique du mouvement brownien sur le groupe unitaire

Thierry Lévy – Mylène Maïda

CNRS, Ecole Normale Supérieure, DMA – Université Paris-Sud, LM Orsay

Journées Matrices Aléatoires
Institut Henri Poincaré, 18 juin 2009

Plan de l'exposé

- Fluctuations pour les matrices de Haar
(d'après Diaconis et Evans)
- Rappel sur le mouvement brownien multiplicatif libre
- Théorème de la limite centrale et forme de la covariance
- Convergence de la covariance vers celle de Diaconis et Evans et aspects combinatoires

Schéma général

$$
\begin{array}{ccc}
N(\mathrm{tr} f(U_N(t)) - \mathbb{E}(\mathrm{tr} f(U_N(t)))) & \xrightarrow{t\to\infty} & N(\mathrm{tr} f(U_N) - \mathbb{E}(\mathrm{tr} f(U_N))) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle N\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle N\to\infty} \\
\mathcal{N}(0, \sigma_t(f,f)) & \xrightarrow{t\to\infty} & \mathcal{N}(0, \|f\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}})
\end{array}
$$

Résultats sur les fluctuations des matrices de Haar

Théorème (Diaconis-Evans)

Soit U_N distribuée selon la mesure de Haar sur $\mathcal{U}(N)$, et f telle que $\|f\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j||\hat{f}(j)|^2 < \infty$, alors

$$N(tr\, f(U_N) - \mathbb{E}(tr\, f(U_N))) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathcal{N}(0, \|f\|^2_{\mathcal{H}_{1/2}}).$$

Démonstration : calcul des moments mixtes.

$$\mathbb{E}(Tr(U_N)^j \overline{Tr(U_N)^k}) = \delta_{jk}(j \wedge N).$$

$Tr(U_N)^j = \sum_{r=0}^{j-1}(-1)^r s_{(j-r,\underbrace{1,\dots,1}_{r \text{ fois}})}(U_N)$ et

$\mathbb{E}(s_\lambda(U_N)\overline{s_\pi(U_N)}) = \delta_{\lambda\pi}\mathbf{1}_{\ell(\lambda)\leqslant N}.$

Rappels sur le mouvement brownien unitaire sur le groupe unitaire

Au moins 3 façons de voir ce processus :

- $(U_N(t))_{t\geqslant 0}$ est la solution de l'EDS
$$dU_N(t) = dK_N(t)U_N(t) - \frac{1}{2}U_N(t)dt,$$
avec K_N mouvement brownien antihermitien.
- On met sur $\mathfrak{u}(N)$ le produit scalaire $(X,Y)_{\mathfrak{u}(N)} = N\mathrm{Tr}(X^*Y)$. On considère le Laplacien Δ sur $\mathcal{U}(N)$ associé à ce produit scalaire. $(U_N(t))_{t\geqslant 0}$ est le processus de Markov sur $\mathcal{U}(N)$ de générateur $\frac{1}{2}\Delta$.
- La densité de $U_N(t)$ par rapport à la mesure de Haar sur $\mathcal{U}(N)$ est donnée par
$$Q_{N,t}(U) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_\downarrow} e^{-\frac{c_2(\alpha)t}{2N}} s_\alpha(I_N)\overline{s_\alpha(U)}$$

Rappel sur la convergence vers le mouvement brownien multiplicatif libre

Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un $*$-espace de probabilités. Un mouvement brownien multiplicatif libre est une collection d'éléments unitaires $(u_t)_{t \geqslant 0}$ tels que

- Pour tous $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots, \leqslant t_n$, $u_{t_1}, u_{t_2}u_{t_1}^*, \ldots, u_{t_n}u_{t_{n-1}}^*$ sont libres
- Pour tous $s \leqslant t$, $u_t u_s^*$ a même loi que u_{t-s}
- Pour tout $t \geqslant 0$, u_t a pour loi ν_t, probabilité sur $\mathbb{U}$ dont on connaît les moments, le support...

Théorème (Biane)

Si $U_N^{(1)}, \ldots, U_N^{(n)}$ sont des browniens unitaires indépendants, la famille converge au sens des distributions non-commutatives vers $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ des browniens multiplicatifs libres, libres entre eux.

Théorème de la limite centrale pour une famille de martingales

But : $N(\mathrm{tr} f(U_N(T)) - \mathbb{E}(\mathrm{tr} f(U_N(T))))$ asymptotiquement gaussien.

On pose $M_N^F(t) := \mathbb{E}(F(U_N(T))|\mathcal{F}_{N,t})$, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, avec $F = \mathrm{tr} f$.

A-t-on $Q_N(T) = N(M_N^F(T) - M_N^F(0))$ asymptotiquement gaussien ?

Point clé : étude du crochet

Si $\mathbb{E}\langle Q_N\rangle(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^t \sigma(s)ds$ + contrôle $Var\langle Q_N\rangle(t)$

alors $Q_N(T)$ est asymptotiquement $\mathcal{N}\left(0, \int_0^T \sigma(s)ds\right)$.

On définit $R_N(T) = e^{i\xi Q_N(T) - \frac{1}{2}\xi^2 \int_0^T \sigma(s)ds}$.

Alors, $dR_N(t) = i\xi R_N(t) dQ_N(t) + \frac{1}{2}\xi^2 R_N(t)[\sigma(t)dt - d\langle Q_N\rangle(t)]$ de sorte que $\mathbb{E}(R_N(T)) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$.

Convergence de l'espérance du crochet

$(U_N(t))_{t\geqslant 0}$ vérifie l'EDS

$$dU_N(t) = dK_N(t)U_N(t) - \frac{1}{2}U_N(t)dt,$$

avec K_N mouvement brownien antihermitien.
Comme $M_N^F(t) = \mathbb{E}(F(U_N(T))|\mathcal{F}_{N,t}) = (P_{T-t}F)(U_N(t))$, la formule d'Itô sur $\mathcal{U}(N)$ donne

$$M_N^F(T) - M_N^F(0) = \int_0^T \sum_{k=1}^{N^2} \mathcal{L}_{X_k}(P_{T-s}F)(U_N(s))d(X_k, K_N)_{\mathfrak{u}(N)}(s),$$

avec X_k une b.o.n de $\mathfrak{u}(N)$, de sorte que $(X_k, K_N)_{\mathfrak{u}(N)}$ sont des mouvements browniens réels standards indépendants et $\mathcal{L}_{X_k}$ est la dérivation dans la direction X_k :

$$\mathcal{L}_{X_k}G(U) = \frac{d}{dt}G(Ue^{tX_k})_{|_{t=0}}.$$

$$
\begin{aligned}
\langle NM_N^F\rangle(T) &= N^2\int_0^T\sum_{k=1}^{N^2}(\mathcal{L}_{X_k}(P_{T-s}F)(U_N(s)))^2 ds \\
&= N^2\int_0^T\sum_{k=1}^{N^2}(P_{T-s}\mathcal{L}_{X_k}F)(U_N(s)))^2 ds \\
&= N^2\int_0^T\sum_{k=1}^{N^2}\mathbb{E}_{V_N,W_N}[(\mathcal{L}_{X_k}F)(U_N(s)V_N(T-s)) \\
&\qquad\qquad (\mathcal{L}_{X_k}F)(U_N(s)W_N(T-s))]ds
\end{aligned}
$$

On utilise ensuite

$$\mathcal{L}_Y(\mathrm{tr}f)(U) = -i\mathrm{tr}(f'(U)Y)$$

$$\text{et}\quad \sum_{k=1}^{N^2}\mathrm{tr}(AX_k)\mathrm{tr}(BX_k) = -\frac{1}{N^2}\mathrm{tr}(AB)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle NM_N^F\rangle(T)) &= \int_0^T \mathbb{E}_{U_N,V_N,W_N}[\mathrm{tr}(f'(U_N(s)V_N(T-s)) \\ &\qquad\qquad f'(U_N(s)W_N(T-s)))]ds \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^T \tau(f'(u_s v_{T-s})f'(u_s w_{T-s}))ds\end{aligned}$$

avec u, v, w 3 browniens multiplicatifs libres, libres entre eux.

Contrôle la variance du crochet par des arguments standards de concentration.

Idée générale : si $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est Lipschitzienne de norme Lipschitz 1,

$\mathrm{tr} f : \mathcal{U}_N \to \mathbb{C}$ est de norme Lipschitz $\frac{1}{N}$.

Enoncé du Théorème Central Limite

Pour f, g à dérivées lipschitziennes, $T > 0$,

$$\sigma_T(f,g) = \int_0^T \tau\left(f'(u_s v_{T-s}) g'(u_s w_{T-s})\right) ds,$$

avec u, v, w 3 browniens multiplicatifs libres, libres entre eux.

Théorème

Soient $f_1, \ldots, f_n$ à dérivées lipschitziennes, $T > 0$, et

$$\Sigma_T(f_1, \ldots, f_n) = (\sigma_T(f_i, f_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

$$N\left(tr\, f_i(U_N(T)) - \mathbb{E}(tr\, f_i(U_N(T)))\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \xrightarrow[N\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0, \Sigma_T(f_1, \ldots, f_n))$$

au sens de la convergence en distribution des vecteurs aléatoires.

Etude de la covariance et convergence en temps grand

But : $\forall f, g \in \mathcal{H}_{1/2}$, $\sigma_T(f,g) \xrightarrow[T\to\infty]{} (f,g)_{\mathcal{H}_{1/2}}$.

- Etendre la définition de $\sigma_T(f,g)$ a des fonctions $\mathcal{H}_{1/2}$,
- Montrer la convergence

Outil : calcul stochastique libre

$(u_t)_{t\geqslant 0}$ vérifie l'EDS libre

$$du_t = iu_t dx_t - \frac{1}{2}u_t dt,$$

avec $(u_t)_{t\geqslant 0}$ un brownien additif libre.

On étudie $\tau_{j,k}(T) = \int_0^T \tau\left((u_s v_{T-s})^j (u_s w_{T-s})^k\right) ds$.
On a le système triangulaire

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_{j,k}(T) &= \mu_{j+k}(T) - \frac{|j|+|k|}{2}\tau_{j,k}(T) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{|j|-1} (|j|-l)\mu_l(T)\tau_{sgn(j)(|j|-l),k}(T) \\ &\quad - \text{terme analogue},\end{aligned}$$

avec $\mu_j(T) = \tau(u_T^k)$.

Ce qui permet de montrer que

$$\tau_{j,k}(T) = \frac{\delta_{j,-k}}{|j|} + e^{-\frac{|j|+|k|}{2}T} R_{j,k}(T),$$

avec $R_{j,k}$ des polynômes.

Cela permet de montrer que si $\sum |j||\hat{f}(j)|^2 < \infty$ et $\sum |j||\hat{g}(j)|^2 < \infty$,

$$-\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} jk\hat{f}(j)\hat{g}(k)\tau_{j,k}(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j|\hat{f}(j)\overline{\hat{g}(j)}$$

Interprétation combinatoire du système d'EDO vérifé par les $\tau_{j,k}$

Par les résultats de Thierry, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(U_N(T)^j)\mathrm{tr}(U_N(T)^k)\right] - \mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}(U_N(T)^j)\Big]\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(U_N(T)^k)\right]$$

$$= e^{-(j+k)\frac{T}{2}}\left(\sum_{n,d=0}^{\infty}\frac{(-T)^n}{n!N^{2d}}S((1\dots j)\times(1\dots k),n,d)\right.$$

$$\left. - \sum_{n_1,n_2,d_1,d_2=0}^{\infty}\frac{(-T)^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!N^{2(d_1+d_2)}}S((1\dots j),n_1,d_1)S((1\dots k),n_2,d_2)\right)$$

$$\lim_{N\to\infty} N^2\left(\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(U_N(T)^j\mathrm{tr}(U_N(T)^k)\right] - \mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}(U_N(T)^j)\Big]\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(U_N(T)^k)\right]\right) =$$

$$e^{-(j+k)\frac{T}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-T)^n}{n!}{\color{red}S'((1\dots j)\times(1\dots k),n,1)} = -jk\tau_{j,k}$$

Donc le système vérifié par les $\tau_{j,k}$ se traduit par

$$
\begin{aligned}
S'((1\dots j)\times(1\dots k),n+1,1) &= jk\ S((1\dots j+k),n,0)\\
&+ j\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}S((1\dots l),p,0)S'((1\dots j-l)\times(1\dots k),n-p,1)\\
&+ k\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}S((1\dots m),q,0)S'((1\dots j)\times(1\dots k-m),n-q,1).
\end{aligned}
$$

Difficulté de l'analyse des $\tau_{j,k}$ en temps petit

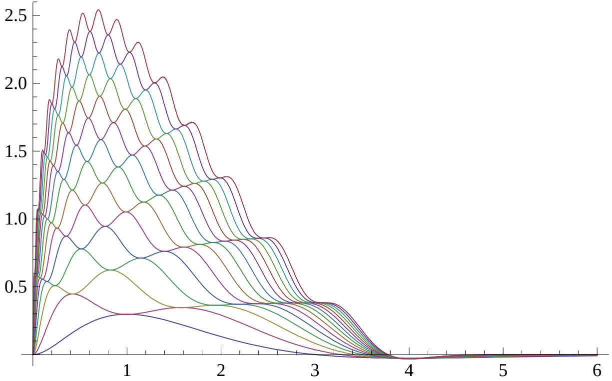

FIG.: Pour $k \in \{1, \ldots, 15\}$, $\sigma_T(s_k, s_{k+1})$ avec $s_k(e^{i\theta}) = \sin(k\theta)$ sur $T \in [0, 6]$.