

Hochzuverehrender Freund.

Vor allem stelle ich Ihnen für die gütigste Ueber-
sendung des Jahrbuchs von 1852 meinen verbindlichsten
Dank ab.

Die gütige Mittheilung Ihrer Bemerkungen über die
Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung
interessant gewesen. Sie haben mir meine eignen Beschäftigungen
mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge
in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir
die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte.
Es war noch ehe ich mit feineren Untersuchungen aus der höheren Arithmetik
mich befaßt hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit
auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck
ich dieselben in den einzelnen Chiliaden abzählte, nach die Resultate auf
einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald,
dass unter allen Schwanckungen diese Frequenz durchschnittlich nahe
dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so dass die Anzahl aller
Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithmus verstanden werde.
In späterer Zeit, als mir die in Veges Tafeln (von 1796) ~~bekannt~~ abgedruckte
Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter
aus, ~~das~~ ^{was} jenes Verhältniss bestätigte. Eine große Freude machte mir
1811 die Erscheinung von Chernacs cribrum, und ich habe (da ich
zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe noch keine Gedult
hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt,
um bald hier bald dort eine Chiliade abzuzählen; ob ich liess, jedoch
rubete es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden.
Erst später benutzte ich Goldschmidts Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen
Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach Burckhards Tafeln die
Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die
drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerthe verglichen.
Ich sehe hier nur einen kleinen Extract her.

Unter	güßes Primzahlen	Integral $\int \frac{dn}{\log n}$	Differ	Ihre Formel	Abweich.
500 000	41 556	41606,4	+ 50,4	41596,9	+ 40,9
1000 000	78 501	78627,5	+ 126,5	78672,7	+ 171,7
1500 000	114 112	114263,1	+ 151,1	114374,0	+ 264,0
2000 000	148 883	149054,8	+ 171,8	149233,0	+ 350,0
2500 000	183 016	183245,0	+ 229,0	183495,1	+ 479,1
3000 000	216 745	216970,6	+ 225,6	217308,5	+ 563,6

Dass Legendre sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, was mir nicht bekannt; auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner Theorie des Nombres nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Seiten gefunden, die ich früher übersehen (oder seitdem vergessen) haben muß. Legendre gebraucht die Formel

$$\frac{n}{\log n} - A$$

wo A eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt. Nach einer flüchtigen Rechnung finde ich danach in obigen Fällen die Abweichungen

- 23,3

+ 42,2

+ 68,1

+ 92,8

+ 159,1

+ 167,6

Diese Differenzen sind noch kleiner als die ^{mit} dem Integral, sie scheinen aber bei zunehmendem n ~~stärker~~ schneller zu wachsen als diese, so daß leicht möglich wäre, daß bei viel weiterer Fortsetzung jene die letzteren übertrüfen. Um Zählung und Formel in Übereinstimmung zu bringen müßte man respective anstatt $A = 1,08366$ setzen

1,09040

1,07682

1,07582

1,07529

1,07179

1,07297

Es scheint, daß bei wachsendem n der (Durchschnitts-) Werth von A abnimmt, ob aber die Grenze beim Wachsen des n ins Unendliche 1 oder eine von 1 verschiedene GröÙe sein wird, darüber wage ich keine Vermuthung. Ich kann nicht sagen, daß eine Befugniß da ist, einen ganz einfachen Grenzwert zu erwarten; von der andern Seite scheint der Ueberschuß des A über 1 ganz fraglich ein GröÙe von der Ordnung $\frac{1}{\log n}$ sein. Ich würde geneigt sein zu glauben, daß das Differential $\frac{\partial n}{\partial \log n}$ der betreffenden Function einfacher sein muß, als die Function selbst; indem ich $\frac{\partial n}{\partial \log n}$ vorausgesetzt habe, würde Legendre's Formel eine Differentialfunction voraussetzen, die etwa $\frac{\partial n}{\log n - (A-1)}$ wäre. Ihre Formel übrigens würde für ein sehr großes n als mit

$$\frac{n}{\log n - \frac{1}{2k}} =$$

übereinstimmend betrachtet werden können, wo k der Modulus der Briggs'schen Logarithmen ist, also mit Legendre's Formel, wenn man

$$A = \frac{1}{2k} = 1,1513 \text{ setzt.}$$

Endlich will ich noch bemerken, daß ich zwischen Ihren Abzählungen und den meinigen ein Paar Differenzen bemerkt habe.

Zwischen 59000 u. 60000 haben Sie	95	ich	94
101000 102000	94		93

Die erste Differenz hat vielleicht ihren Grund darin, daß in Lamberts Suppl. die Primzahl 59023 zweimal aufgeführt ist. Die Chitiade von 101000 — 102000 wimmelt in Lamberts Supplementen von Fehlern; ich habe in meinem Exemplare 7 Zahlen ausgetrichen, die keine Primzahlen sind, u. dazwischen 2 fehlende eingeschaltet. Könnten Sie nicht den jungen Dase vorsehlen, daß er die Primzahlen in der folgenden Million aus denjenigen bei der Akademie befindlichen Tafeln abzähle, die wie ich fürchte das Publicum nicht besitzen soll? Für diesen Fall bemerke ich, daß in der 2. u. 3. Million die Abzählung auf meine Vorschrift nach einem besondern Schema gemacht ist, welches ich selbst auch schon bei einem Theile der ersten Million angewandt hatte. Die Abzählungen von je 100000

47
 stehen auf einer (klein) Octavseite in 10 Columnen, je de sich auf
 eine Myriade beziehend; dazu kommt noch eine Columnne
 davor, (links) und eine dahinter (rechts); jene zeigt an als Beispiel
 hier eine Verticalcolumnne u. die beiden Zusatzcolumnnen aus dem
 Intervall 100000 — 110000

	0	1	2	...	9	
1	1					1
2						4
3						21
4	2					54
5	11					114
6	14					171
7	26					217
8	19					164
9	11					126
10	8					71
11	6					39
12	1					12
13	1					6
14						
15						
16						
	752					7210

Zur Erläuterung diene z. B.
 die 7^{te} ^{vertical} horizontal rechte
 in der Myriade 100000
 bis 1010000 sind 100
 Heatonaden; darunter
 ist 1 die nur eine Prim.
 zahl enthält; gar keine
 mit 2 oder 3; 2 Stück
 mit je 4 Primzahlen;
 11 Stück mit je 5 u. s. w.
 alle zusammen geben 752.
 $= 1.1 + 4.2 + 5.11 +$
 $6.14 + u. s. w.$
 Die letzte Columnne ent-
 hält die Aggregate
 aus den 10 einzelnen.
 Die Zahlen 14, 15, 16 in
 der ersten Verticalreihe

stehen hier nur zum Uebersicht, da keine Heatonaden mit
 so vielen Primzahlen vorkommen; sie aber auf den folgenden
 Klaffen bekommen sie Geltung. Zuletzt werden wieder
 die 10 Seiten in 1 vereinigt, u. umfassen so die ganze 2^{te} Mill.

Doch es ist Zeit abubrechen. Ich sage noch meinen herzlichsten
 Dank für Ihre Mittheilungen über den Fortschritt der dortigen öffentl.
 Zustände. Noch sieht man keinen Ausweg aus dem Labyrinth,
 in das uns die Nachäfferer des Franzosen gezwungen hat. Weiter
 herzlichen Wünschen für Ihr Wohlbefinden

Göttingen 24 ~~Dezember~~ December
 1849

Hets de Jhrige
 C. F. Gauss