

# מבחן במתמטיקה בדידה

מועד ב' סמסטר ב' תשס"ד, 2004/9/9

מרצה: עודד רגב

משך המבחן: שלוש שעות

אסור השימוש בכל חומר עזר

הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט

שתי התשובות הטובות תחשבנה כ-30 נקודות כל אחת

שאר שתי התשובות תחשבנה כ-20 נקודות כל אחת

1. (א) תהיינה  $a, b$  עוצמות כך ש- $b \neq 0$ . הוכח או הפרך:

i. אם קיימת עוצמה  $c$  כך ש- $ac = b$  אז  $a \leq b$ .

ii. אם  $a \leq b$  אז קיימת עוצמה  $c$  כך ש- $ac = b$ .

iii. אם קיימת עוצמה  $c > 1$  כך ש- $ac = b$  אז  $a < b$ .

(ב) הוכח שאם  $A, B$  קבוצות כך ש- $A$  אינסופית ומקיימת  $|A| \cdot |A| = |A|$  אז  $|B^A \times B^A| = |B^A|$ .

(ג) כיצד היתה משתנה תשובתך לסעיף (ב) אם לא היינו מניחים ש- $A$  אינסופית? ואם כן היינו מניחים

ש- $A$  אינסופית אבל לא היינו מניחים ש- $|A| \cdot |A| = |A|$ ?

2. (א) מצא את העוצמה

$$|\{f \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \exists b \in \mathbb{Q}. f(b) = a\}|$$

(ב) נסמן  $A = \{1, 2, \dots, 100\}$  ו- $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ . מצא את העוצמה

$$|\{f \in A \rightarrow \{a, b, c, d\} \mid |\{i \in A \mid f(i) = a\}| \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}|$$

(ג) יהי  $n, k$  מספרים טבעיים ותהי  $A = \{1, \dots, n\}$ . מצא את העוצמה

$$|\{f \in A \rightarrow \{0, 1\} \mid |\{i \in A \mid f(i) = 0\}| = k \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}. f(i) = 1 \vee f(i+1) = 1\}|$$

(ד) הראה שלכל קבוצה  $A$  קיימת תת-קבוצה  $B$  כך ש- $|P(A \times B)| > |A|$ .

3. (א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_0 = 2, a_1 = 3, \forall n \geq 2. a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 9$$

(ב) יהי  $n$  מספר טבעי. חשב את מספר התמורות  $\pi : \{1, 2, \dots, 3n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n\}$  על  $3n$  אברים

$$\pi(2n) < \pi(3n) \text{ ו- } \pi(n) < \pi(2n)$$

(ג) יהי  $n$  מספר טבעי. חשב את מספר התמורות  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  על  $n$  אברים

$$|\pi(k) - \pi(j)| \leq |k - j|, k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

4. תהי  $M = \mathbb{N}^+ \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ . נגדיר יחס

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in M. x = yz\}$$

(א) האם  $S$  הוא יחס שקילות? נמק.

(ב) נגדיר פונקציה  $f = \lambda x \in \mathbb{R}. \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S\}$ .

i. חשבו את  $f(0)$ .

ii. הוכיחו כי  $\mathbb{N}^+ \subseteq f(\frac{1}{2})$ .

בהצלחה!!!