

Циклические накрытия, которые не являются стабильно
рациональными

Cyclic covers that are not stably rational

Жан-Луи Кольё-Телэн* и Елена Пирютко †

à Jean-Pierre Serre, pour son quatre-vingt-dixième anniversaire

Аннотация

На основе методов, разработанных Колларом, Вуазан, авторами, Тотаро, мы доказываем, что циклическое накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$ простой степени p , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ степени mp не является стабильно рациональным при условии $n + 1 \leq mp$. В размерности 3 получаем двойные накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 4 (Вуазан), а также двойные накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6 (Бовиль). Мы также получаем двойные накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6. Метод статьи позволяет получить примеры над числовыми полями.

Ключевые слова : стабильная рациональность, группа Чжоу нуль-циклов, циклические накрытия.

Résumé

Using the methods developed by Kollár, Voisin, ourselves, Totaro, we prove that a cyclic cover of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$ of prime degree p , ramified along a very general hypersurface of degree mp is not stably rational if $n + 1 \leq mp$. In small dimensions, we recover double covers of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, ramified along a quartic (Voisin), and double covers of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ ramified along a sextic (Beauville), and we also find double covers of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ ramified along a sextic. This method also allows one to produce examples over a number field.

Keywords: stable rationality, Chow group of zero-cycles, cyclic covers.

Индекс УДК : 512.752

*Jean-Louis Colliot-Thélène, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France; Chaire Lamé 2015, Université d'État de Saint Pétersbourg, Исследовательская Лаборатория имени П. Л. Чебышёва, Saint-Pétersbourg, Russie; jlct@math.u-psud.fr

†Alena Pirutka, C.N.R.S., École Polytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau, France; alena.pirutka@polytechnique.edu

1 Введение

Проективное многообразие X над полем k называется стабильно рациональным, если для некоторого n многообразие $X \times \mathbb{P}_k^n$ является рациональным. Существуют стабильно рациональные нерациональные многообразия [1]. В работе [10] Клэр Вуазан вводит метод для доказательства, что многообразие X не является стабильно рациональным, основанный на целом разложении диагонали в группе Чжоу $CH^{dim X}(X \times X)$ и специализации. Этот метод позволяет доказать, что двойное накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённое над очень общей поверхностью степени 4, не является стабильно рациональным. В работе [4] мы рассматриваем свойство CH_0 - универсальной тривиальности, эквивалентное целому разложению диагонали для гладких проективных многообразий, и которое делает метод специализации более гибким, в частности, для случая специализации над кольцом дискретного нормирования с полем вычетов положительной характеристики. Мы доказываем, что при очень общем выборе коэффициентов, гладкая комплексная кватрика размерности 3 не является стабильно рациональным многообразием.

Определение 1.1. Пусть $f : X \rightarrow Y$ проективный морфизм многообразий над полем k . Морфизм f называется CH_0 - универсально тривиальным, если для любого расширения полей L/k отображение $f_* : CH_0(X_L) \rightarrow CH_0(Y_L)$ является изоморфизмом. Если $Y = \text{Spec } k$ и f – структурный морфизм, то многообразие X называется CH_0 - универсально тривиальным.

В частности, стабильно рациональное многообразие является CH_0 - универсально тривиальным.

В работах А. Бовиля [2, 3] рассматриваются случаи двойных накрытий $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённых над очень общей поверхностью степени 6, а также двойных накрытий $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$, разветвлённых над очень общей гиперповерхностью степени 4. В работе [5], Э. Креш, Б. Хассетт и Ю. Чинкель рассматривают случай некоторых расслоений на коники.

Б. Тотаро [9] доказал, что очень общая поверхность степени d в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ не является стабильно рациональной при условиях $d \geq 2\lceil(n+2)/3\rceil$ и $n \geq 3$; в доказательстве используются результаты Коллара [7, 8] о двойных накрытиях в характеристике 2 и результат о специализации CH_0 - универсальной тривиальности [4] 1.14 над кольцом дискретного нормирования с полем частных характеристики ноль и с полем вычетов положительной характеристики. Как замечает Тотаро [9], методы, описанные

выше, также возможно применить для более общих накрытий : в этой работе мы продолжаем изучение циклических накрытий в положительной характеристике и доказываем следующий результат (теорема 4.1):

Теорема 1.2. *Пусть p – простое число. Пусть X – циклическое накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$ степени p , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ степени mp . Предположим, что $m(p-1) < n+1 \leq mp$. Тогда X – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием.*

Как и в работе [9], мы получаем примеры над числовыми полями.

Заметим, что при $n = 3, m = p = 2$ получаем очень общие двойные накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённые над кватрикой (более общие результаты получены в работе [10]), при $n = 3, m = 3, p = 2$ мы получаем другое доказательство результатов [3].

При условии $mp > n + 1$, Коллар доказал, что рассматриваемые накрытия не являются линейчатыми [6]. Однако, это не даёт результатов о стабильной рациональности, так как существуют стабильно рациональные многообразия размерности 3, которые не являются рациональными [1].

2 CH_0 -универсальная тривиальность сингулярных многообразий

Лемма 2.1. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – целое проективное многообразие над k . Пусть $U \subset X$ открытое подмногообразие. Тогда для любой точки $z \in X(k)$ существует цикл $\xi \in Z_0(U)$ рационально эквивалентный z в $CH_0(X)$.*

Доказательство. Если $X = C$ – целая кривая с нормализацией D , то утверждение следует из того, что группа Пикара полулокальных колец D тривиальна. В общем случае достаточно заметить, что существует целая кривая C , такая, что $z \in C$ и $C \cap U \neq \emptyset$. \square

Лемма 2.2. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – целое проективное k -рациональное многообразие. Если X является гладким за исключением конечного числа точек, то X – универсально CH_0 -тривиальное многообразие.*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq U \subset X$ открытое подмногообразие, изоморфное открытому подмногообразию \mathbb{P}_k^n . Пусть F/k – некоторое расширение полей. Любая гладкая точка $z \in X_F(F)$ рационально эквивалентна в X_F нуль-циклу из $Z_0(U_F)$. Из предыдущей леммы получаем, что это остаётся верным для любой F -точки X . Аналогично рассуждениям [4] 1.5 получаем, что каждый цикл в $Z_0(X_F)$ рационально эквивалентен циклу Nx , для некоторого N и (фиксированного) $x \in U(k) \subset U(F) \subset X(F)$. \square

Лемма 2.3. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – связанное проективное многообразие над k . Если каждая приведённая компонента X является k -рациональным многообразием с изолированными сингулярными точками, то X – универсально CH_0 -тривиальное многообразие.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую лемму и [4] 1.3. \square

В следующем параграфе мы применим лемму 2.3 для исключительных дивизоров разрешения особенностей. Приведём также более общее утверждение для объединения CH_0 -универсально тривиальных многообразий. Далее в этой статье нам понадобится только лемма 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть X – проективное приведённое геометрически связанное многообразие над полем k и пусть $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$ разложение X на неприводимые компоненты. Предположим, что*

- (i) *каждое из многообразий X_i геометрически неприводимо и является CH_0 -универсально тривиальным;*
- (ii) *каждое из пересечений $X_i \cap X_j$ либо пусто, либо содержит 0-цикл z_{ij} степени 1.*

Тогда многообразие X является CH_0 -универсально тривиальным многообразием.

Доказательство. Пусть L/k расширение полей и пусть $z \in CH_0(X_L)$ класс цикла степени 0. Так как X – геометрически связанное, то в дуальном графе геометрических компонент существует полный цикл : существует последовательность индексов i_1, \dots, i_m , $1 \leq i_j \leq N$ (где m может быть больше, чем N), такая, что $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, N\}$ и $X_{i_j, L} \cap X_{i_{j+1}, L}$ непусто для всех $1 \leq j \leq m$.

Можно разложить $z = \sum z_{i_j}$, где $z_{i_j} \in CH_0(X_{i_j, L})$ степени d_j , $\sum d_j = 0$ (с произвольным выбором на пересечениях, также некоторые z_{i_j} могут

быть равны нулю). Тогда $z_{i_1} = d_1 z_{i_1 i_2 L}$ в $CH_0(X_{i_1 L})$, откуда $z_{i_1} + z_{i_2} = (d_1 + d_2) z_{i_2 i_3 L}$ в $CH_0(X_{i_1 L} \cup X_{i_2 L})$ и т.д., получаем $z = \sum z_{i_j} = (\sum d_i) z_{i_{m-1}, i_m L} = 0$ в $CH_0(X_L)$. \square

Замечание. Условие (i) выполняется, если существует разрешение особенностей $\pi_i : \tilde{X}_i \rightarrow X_i$, такое, что \tilde{X}_i является CH_0 -универсально тривиальным многообразием и все (схематические) слои π_i являются CH_0 -универсально тривиальными многообразиями (см. [4], Prop. 1.8.)

3 Циклические накрытия и особенности

Напомним вкратце некоторые свойства циклических накрытий [7].V, [8]. Пусть p – простое число и $f(x_0, \dots, x_n)$ – однородный многочлен степени tp над полем k . Циклическое накрытие \mathbb{P}_k^n , разветвлённое над $f(x_0, \dots, x_n) = 0$, определяется как подмногообразие $\mathbb{P}(t, 1, 1, \dots, 1)$ заданное условием

$$y^p - f(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Если k – поле характеристики p , то такое циклическое накрытие почти всегда сингулярно, особенности соответствуют критическим точкам f .

Определение 3.1. Критической точкой многочлена $g(x_1, \dots, x_n)$ над полем k называется точка P , такая, что $\partial g / \partial x_i(P) = 0 \forall i$. Критическая точка P многочлена g называется невырожденной, если определитель $|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(P)|$ не равен нулю. Критической точкой однородного многочлена $f(x_0, \dots, x_n)$ называется критическая точка одного из многочленов $f(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Если k – поле характеристики 2 и n нечётно, то все критические точки многочлена $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ являются вырожденными.

Определение 3.2. Пусть k – поле характеристики 2 и n нечётно. Критическая точка P многочлена $g(x_1, \dots, x_n)$ называется почти невырожденной, если

$$\text{length} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, P} / (\partial g / \partial x_1(P), \dots, \partial g / \partial x_n(P)) = 2.$$

Для изучения стабильной рациональности нам понадобятся результаты о разрешении особенностей циклических накрытий (см. также [6]).

Лемма 3.3. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть

$$X : y^2 = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное двойное накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, где $n \geq 2$ чётно и $(0, \dots, 0)$ – невырожденная критическая точка многочлена f . Пусть $\tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки P . Тогда :

(i) в окрестности точки P накрытие X задаётся условием

$$y^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи $g(x_1, \dots, x_n)$ имеет степень не менее трёх.

(ii) многообразие \tilde{X} является гладким в окрестности исключительного дивизора E и многообразие E является универсально CH_0 -тривиальным.

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и \tilde{X} задаётся условием

$$1 = z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$$

в аффинных координатах y, z_1, \dots, z_n .

Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$ делится на y . Исключительный дивизор E раздутия $\tilde{X} \rightarrow X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

$$z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n = 1,$$

задающее гладкую квадрику. Многообразие \tilde{X} является гладким в каждой точке E (это следует из уравнения \tilde{X}).

2. $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для \tilde{X} и E соответственно :

$$w^2 = z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

и

$$z_2 = -(z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n) + w^2,$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным (так как E изоморфно аффинному пространству с координатами z_3, \dots, z_n, w). Многообразие \tilde{X} является гладким в каждой точке E .

Таким образом, исключительный дивизор E является гладким рациональным многообразием, следовательно, универсально CH_0 -тривиальным (см. [4] 1.5). □

Лемма 3.4. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть

$$X : y^2 = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное двойное накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, где $n \geq 3$ нечётно и $(0, \dots, 0)$ – почти невырожденная критическая точка многочлена f . Пусть $\tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки P . Тогда :

(i) в окрестности точки P накрытие X задаётся условием

$$y^2 = ax_1^2 + x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи $g(x_1, \dots, x_n)$ имеет степень не менее трёх, и коэффициент b многочлена g при x_1^3 не равен нулю.

(ii) многообразие \tilde{X} является гладким в окрестности исключительного дивизора E и многообразие E является универсально CH_0 -тривиальным.

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.7 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и \tilde{X} задаётся условием

$$1 = az_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$$

в аффинных координатах y, z_1, \dots, z_n .

Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$ делится на y . Исключительный дивизор E раздутия $\tilde{X} \rightarrow X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

$$az_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 1.$$

При $a = 0$ получаем произведение \mathbb{A}^1 и гладкой квадррики. При $a \neq 0$ получаем неприводимую квадррику, сингулярную в одной точке $z_i = 0, i > 1$ и $az_1^2 = 1$.

Многообразие \tilde{X} является гладким в каждой точке E : сингулярная точка \tilde{X} должна удовлетворять условиям: $z_2 = \dots = z_n = 0, y = 0, bz_1^3 = 0$ и $az_1^2 = 1$, что невозможно.

2. $y = wx_2, x_i = x_2z_i, i \neq 2$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_2 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для \tilde{X} и E соответственно:

$$w^2 = az_1^2 + z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_2^2}g(x_2z_1, x_2, x_2z_3 \dots, x_2z_n)$$

и

$$z_3 = -(az_1^2 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n) + w^2.$$

Как и в предыдущих вычислениях, многочлен $\frac{1}{x_2^2}g(x_2z_1, x_2, x_2z_3 \dots, x_2z_n)$ делится на x_2 . Таким образом, многообразие \tilde{E} является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие \tilde{X} является гладким в каждой точке E .

3. $y = wx_1, x_i = x_1z_i, i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для \tilde{X} и E соответственно:

$$w^2 = a + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

и

$$a + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n - w^2 = 0.$$

Многообразие E является неприводимой квадррикой, сингулярной в одной точке $z_i = 0; \forall i$ et $a - w^2 = 0$. Так как коэффициент g при x_1^3 не равен нулю, многообразие \tilde{X} является гладким в каждой точке E (аналогично вычислениям в пункте 1).

Получаем, что многообразие E является неприводимым, имеет только изолированную сингулярную точку $(c : 1 : 0 : \dots : 0)$, где $c^2 = a$, и открытое подмногообразие E является гладким и рациональным. По лемме 2.3, E универсально CH_0 -тривиально. □

Лемма 3.5. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и пусть

$$X : y^p = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, где $(0, \dots, 0)$ – невырожденная критическая точка многочлена f . Предположим, что n чётно. Тогда :

- (i) в окрестности точки P накрытие X задаётся условием $y^p = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n)$, где каждый одночлен в записи $g(x_1, \dots, x_n)$ имеет степень не менее трёх.
- (ii) Многообразие \tilde{X} , полученное в результате раздутия точки P и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек с образом P в X , является гладким в окрестности \tilde{X}_P и слой \tilde{X}_P является универсально CH_0 -тривиальным (но, в общем случае, \tilde{X}_P не является неприводимым).

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Пусть $X' \rightarrow X$ – раздутие X в точке P . Достаточно рассмотреть следующие карты :

- $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$ делится на x_1) и

$$z_2 = -(z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным. Многообразие X' является гладким в каждой точке E .

- $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и X' задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n).$$

Исключительный дивизор E раздутия $X' \rightarrow X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

$$z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке $(z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$.

Многообразие X' является сингулярным в единственной точке $P' = (y, z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$ если $p > 3$ и гладким, если $p = 3$. Если $p > 3$, пусть $X'' \rightarrow X'$ раздутие X' в точке P' . Аналогично, рассматриваем следующие карты :

- (a) $y = z_1 w$, $z_i = t_i z_1$, $i \neq 1$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2} z_1^{p-4} = t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{z_1^2} h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \dots, z_1 t_n),$$

$$t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n = 0,$$

где мы обозначили $\frac{1}{y^2} g(y z_1, \dots, y z_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$. Заметим, что многочлен $h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \dots, z_1 t_n)$ делится на z_1^3 . Получаем, что E' является гладким и рациональным: произведение \mathbb{A}^1 (соответствующего координате w), и многообразия $t_2 = -(t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n)$, и что X'' является гладким в каждой точке E' в этой карте.

- (b) $z_i = y t_i$, $1 \leq i \leq n$, E' задаётся условием $y = 0$ и X'' задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1 t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \dots, y^2 t_n)$$

в этой карте. Многочлен $\frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \dots, y^2 t_n)$ делится на y . Исключительный дивизор E' является квадрикой

$$t_1 t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие X'' является сингулярным в единственной точке $(y, t_1, \dots, t_n) = (0, \dots, 0)$ если $p > 5$ и гладким, если $p = 5$. Если X'' сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие $\tilde{X} \rightarrow X$, гладкое в каждой точке над P и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой \tilde{X}_P является связным CH_0 -универсально тривиальным многообразием.

□

Лемма 3.6. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и пусть

$$X : y^p = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, где $(0, \dots, 0)$ – невырожденная критическая точка многочлена f . Предположим, что n нечётно. Тогда :

- (i) в окрестности точки P накрытие X задается условием $y^p = x_1^2 + x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n)$, где каждый одночлен в записи $g(x_1, \dots, x_n)$ имеет степень не менее трёх.
- (ii) Многообразие \tilde{X} , полученное в результате раздутия точки P и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек с образом P является гладким в окрестности \tilde{X}_P и слой \tilde{X}_P является универсально $СН_0$ -тривиальным (но, в общем случае, \tilde{X}_P не является неприводимым).

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (ii). Пусть $X' \rightarrow X$ – раздутие X в точке P . Достаточно рассмотреть следующие карты :

1. $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = 1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$ делится на x_1) и

$$1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0.$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным : произведение \mathbb{A}^1 (соответствующего координате w) и гладкой квадрики $1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0$. Многообразие X' является гладким в каждой точке E в этой карте.

2. $y = wx_2$, $x_i = x_2z_i$, $i \neq 2$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_2 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_2^{p-2}w^p = z_1^2 + z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$ делится на x_2) и

$$z_3 = -(z_1^2 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие X' является гладким в каждой точке E в этой карте.

3. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и X' задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n).$$

Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$ делится на y .

Исключительный дивизор E раздутия $X' \rightarrow X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнения E в этой карте :

$$z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке $(z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$.

Многообразие X' также является сингулярным в единственной точке $P' = (y, z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$ если $p > 3$ и гладким в окрестности исключительного дивизора, если $p = 3$. Если $p > 3$, пусть $X'' \rightarrow X'$ раздутие X' в точке P' . Аналогично предыдущей лемме, рассматриваем следующие карты :

(a) $y = z_1w$, $z_i = t_i z_1$, $i \neq 1$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_1 = 0$. Получаем следующие уравнения для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2}z_1^{p-4} = 1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{z_1^2}h(z_1w, z_1, z_1t_2, \dots, z_1t_n),$$

$$1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где многочлен $\frac{1}{z_1^2}g(yz_1, \dots, yz_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$ делится на z_1^3 . Получаем, что E' является гладким и рациональным: произведение \mathbb{A}^1 (соответствующего координате w) и многообразия, заданного уравнением $1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0$. Многообразие X' является гладким в каждой точке E' в этой карте.

(b) $y = z_2w$, $z_i = t_i z_2$, $i \neq 2$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_2 = 0$. Получаем следующие уравнения для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2}z_2^{p-4} = t_1^2 + t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{z_2^2}h(z_2w, z_2t_1, z_2, z_2t_3, \dots, z_2t_n),$$

$$t_1^2 + t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где мы обозначили $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$. Получаем, что E' является гладким и рациональным и что X'' является гладким в каждой точке E' в этой карте.

- (с) $z_i = yt_i$, $1 \leq i \leq n$, E' задаётся условием $y = 0$ и X'' задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{y^4}g(y^2t_1, \dots, y^2t_n).$$

Многочлен $\frac{1}{y^4}g(y^2t_1, \dots, y^2t_n)$ делится на y . Исключительный дивизор E' является квадрикой

$$t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие X'' является сингулярным в окрестности E в этой карте в единственной точке $(y, t_1, \dots, t_n) = (0, \dots, 0)$ если $p > 5$ и гладким, если $p = 5$. Если X'' сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие $\tilde{X} \rightarrow X$, гладкое в каждой точке над P и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой \tilde{X}_P является связным CH_0 -универсально тривиальным многообразием.

□

Следующее утверждение даёт ключевые нетривиальные инварианты циклических накрытий.

Напомним, что коэффициенты многочленов $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ заданной степени параметризуются точками некоторого аффинного пространства. Общий выбор коэффициентов f означает, что мы рассматриваем коэффициенты из некоторого непустого открытого (в топологии Зарисского) подмногообразия этого аффинного пространства.

Теорема 3.7. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики p и пусть $f(x_0, \dots, x_n)$ – однородный многочлен степени $tr \geq n + 1$, $n \geq 3$. Для общего выбора коэффициентов f выполняются следующие условия:*

- (i) все критические точки f являются невырожденными, если $p > 2$ или $p = 2$ и n чётно;
- (ii) все критические точки f являются почти невырожденными, если $p = 2$ и n нечётно.
- (iii) Если $\tilde{X} \rightarrow X$ – разрешение особенностей X , полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то морфизм $\tilde{X} \rightarrow X$ является CH_0 -универсально тривиальным, $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$ и многообразие \tilde{X} не является CH_0 -универсально тривиальным.

Доказательство. Свойства (i) и (ii) следуют из упражнений [7] V.5.7 и 5.11. Предположим, $P = (b, a_1, \dots, a_n)$ – критическая точка f . При помощи линейной замены переменных $y = c, x_i = a_i$, где $c^p = f(P)$ (поле k алгебраически замкнуто) можно предположить, что $P = (0, \dots, 0)$. Тогда можно разложить f в сумму линейной части, квадратичной части и части высших степеней: $f = f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + f_3(x_1, \dots, x_n)$. Так как P – критическая точка, то $f_1 = 0$. Так как поле k алгебраически замкнуто, то каждая квадратичная форма над k может быть представлена в диагональной форме либо суммой квадратов (если характеристика поля не равна 2), либо суммой $\sum x_i y_i$ (регулярная часть) и суммой квадратов. Таким образом, несложно проверить, что условие, что P невырожденная (соотв. почти невырожденная) точка, соответствует разложению в леммах 3.3, 3.5, 3.6 (соотв. 3.4), что выполняется для общего выбора коэффициентов f (см. упражнение [7] V. (5.6.6.3)).

Для доказательства (iii), как и в работе Тотаро [9], мы используем [7] V.5.11 для \mathbb{P}_k^n , $n \geq 3$ и $L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp)$. Получаем :

1. $K_{\mathbb{P}^n} \otimes L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$,
2. При условии $mp \geq 4$ отображение $H^0(\mathbb{P}^n, L^p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/m_x^4 \otimes L^p$ сюръективно для любой замкнутой точки $x \in X$.

Как следует из [7] V.5.7 (см. также [7] V.5.11, [8] Теорема 4.4), для общего выбора $f \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp))$ (в частности, удовлетворяющего (i) и (ii)), если $q : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ – циклическое накрытие \mathbb{P}_k^n степени p , разветвлённое над гиперповерхностью $f = 0$ и $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ – разрешение особенностей X , полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то $\pi^*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$ является подпучком $\Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}$, в частности, если $mp - n - 1 \geq 0$, то $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$.

Как доказано в работе Тотаро [9] (Лемма 2.2), если \tilde{X} является CH_0 -универсально тривиальным, то $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) = 0$. Из лемм 3.3, 3.4, 3.5,

3.6 следует, что все слои морфизма $\tilde{X} \rightarrow X$ являются CH_0 -универсально тривиальными, значит, и морфизм $\tilde{X} \rightarrow X$ также CH_0 -универсально тривиальный (см. [4] 1.8) \square

Замечание. Если $n + 1 > tr - t$ и многообразие X нормально (что верно, в частности, если f имеет только изолированные критические точки), то X является многообразием Фано : пучок $-K_X$ обилен (см. [8] 4.14).

4 Накрытия, которые не являются стабильно рациональными

Теорема 4.1. *Пусть p – простое число. Пусть X – циклическое накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$ степени p , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ степени tr . Предположим, что $t(p - 1) < n + 1 \leq tr$. Тогда X – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием. Существует не стабильно рациональное накрытие степени p , разветвлённое над гиперповерхностью степени tr , определённое над числовым полем.*

Доказательство. Пусть $Y : y^p = f(x_0, \dots, x_n)$ – накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 3.7. Можно выбрать Y таким образом, что коэффициенты многочлена f определены над некоторым конечным полем \mathbb{F}_q характеристики p ; так как в теореме 3.7 условие $f = 0$ задаёт очень общую гиперповерхность, то можно также предположить, что гиперповерхность $f = 0$ является гладкой над \mathbb{F}_q . Таким образом, существует многочлен H степени tr с коэффициентами в некотором числовом поле, такой, что f является редукцией многочлена H по модулю p , и что накрытие $X : y^p = H(x_0, \dots, x_n)$ является гладким многообразием. Так как X вырождается в Y и разрешение особенностей $Y' \rightarrow Y$, построенное в леммах 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 и теореме 3.7 является CH_0 -универсально тривиальным, то $X_{\mathbb{C}}$ не является CH_0 -универсально тривиальным многообразием по теореме 3.7 и [4] 1.14(iii). Следовательно, X не является стабильно рациональным. Более того, по построению мы получаем пример над числовым полем. Так как коэффициенты многочленов степени tr с комплексными коэффициентами параметризуются неприводимым многообразием, то по [4] 2.3 для очень общего выбора такого многочлена, соответствующее накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ степени p не является CH_0 -универсально

тривиальным.

□

Замечание. Таким образом, мы получаем, что циклическое накрытие X проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ степени p , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ степени mp не является CH_0 -универсально тривиальным. Аналогично работе [4], из этого следует, что X не является рациональным ретрактом. Напомним, что стабильно рациональное многообразие является рациональным ретрактом, однако до сих пор неизвестно, различны ли эти понятия.

Примеры.

1. При $p = 2, n = 3$ и $mp = 6$ получаем другое доказательство результата А. Бовиля [3].
2. При $n = 3, m = p = 2$ получаем двойные накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, разветвлённые над кватрикой (более общие результаты получены в работе Клэр Вуазан [10]).
3. При $p = 2, n = 4$ и $mp = 6, 8$ получаем, что двойное накрытие $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью степени 6 или 8 не является стабильно рациональным.
4. При $p = 2, n = 5$ получаем примеры для $2m = 8, 10$.
5. При $p = 3, n = 4$ и $mp = 6$ получаем пример многообразия Фано размерности 4, которое не является стабильно рациональным : накрытие степени 3, разветвлённое над очень общей поверхностью степени 6.
6. Результаты о двойных накрытиях $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n = 4, 5$, разветвлённых над кватрикой (А. Бовиль [2]), не покрываются результатами теоремы 4.1.

Список литературы

- [1] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*. Ann. of Math, **121** (1985) 283–318.
- [2] A. Beauville, *A very general quartic double fourfold or fivefold is not stably rational*, arXiv:1411.3122, готовится к публикации в J. Algebraic Geometry.
- [3] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, arXiv:1411.7484.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, готовится к публикации в Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.
- [5] B. Hassett, A. Kresch, Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, <http://arxiv.org/abs/1503.08497>.
- [6] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces*. J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 1, 241–249.
- [7] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [8] J. Kollár, K. Smith, A. Corti, *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **92**, 2004.
- [9] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, arXiv:1502.04040, готовится к публикации в J. Amer. Math. Soc.
- [10] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycles*, arXiv:1312.2122 décembre 2013, готовится к публикации в Invent. math.