THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE

POLYTECHNIQUE

Spécialité : MATHEMATIQUES

Présentée par Pierre GERMAIN

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Sujet de la thèse :

SOLUTIONS FORTES, SOLUTIONS FAIBLES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES D'EVOLUTION

soutenue le 13 décembre 2005 devant le jury composé de :

M. Jean-Michel BONY, Examinateur
M. Jean-Yves CHEMIN, Président du jury
M. Jean-Marc DELORT, Rapporteur
Mme Isabelle GALLAGHER, Directrice de thèse
M. Pierre-Gilles LEMARIE-RIEUSSET, Examinateur
M. Philippe TCHAMITCHIAN, Rapporteur

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier Isabelle Gallagher d'avoir dirigé ma thèse, et de m'avoir initié à l'étude des équations aux dérivées partielles, ainsi qu'à de passionnants sujets de recherche. Ses conseils, sa disponibilité, et sa clairvoyance mathématique m'ont permis de venir à bout de ce travail.

Je suis très reconnaissant à Jean-Marc Delort et Philippe Tchamitchian, qui ont bien voulu établir un rapport sur ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et pour leurs nombreuses remarques qui m'ont permis de parfaire mon manuscrit.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude à Jean-Michel Bony, Jean-Yves Chemin, et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset qui me font l'honneur d'être membres du jury de soutenance.

J'ai préparé ma thèse au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'Ecole polytechnique, dans des conditions de travail particulièrement agréables, qui doivent beaucoup à la gentillesse et à l'efficacité de Stéphane Aicardi, Claudine Harmide et Michèle Lavallette.

Je voudrais remercier mes camarades thésards, de l'Ecole polytechnique et d'ailleurs, qui m'ont accompagné pendant ces années. Merci à eux pour leur gentillesse et pour les discussions partagées.

Mes pensées vont à mes amis, pour tout ce qu'ils m'apportent, mais surtout pour leur amitié.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde affection à ma famille, qui m'a toujours soutenu.

Résumé

Nous exposons en introduction quelques généralités sur les solutions fortes et les solutions faibles d'équations aux dérivées partielles.
Le chapitre 2 est consacré à l'étude des multiplicateurs et des paramultiplicateurs entre espaces de Sobolev. Si l'opérateur de multiplication ponctuelle par une fonction est borné d'un espace de Sobolev dans un autre, on dit que cette fonction est un multiplicateur entre ces espaces. On définit de même les paramultiplicateurs par le caractère borné de l'opérateur de paraproduit de Bony. Nous prouvons une caractérisation presque complète des espaces de multiplicateurs et de paramultiplicateurs.
Cette caractérisation est appliquée dans le chapitre 3 au problème de l'unicité fort-faible pour l'équation de Navier-Stokes en dimension $d \geq 3$. Elle nous permet de prouver un théorème d'unicité fort-faible généralisant presque tous les résultats connus.
Nous nous intéressons dans le chapitre 4 aux solutions d'énergie infinie de l'équation de Navier-Stokes en dimension 2. Un théorème de Gallagher et Planchon affirme qu'une solution globale existe si la donnée initiale appartient à un espace de Besov critique ; nous étendons ce théorème au cas où $u_0 \in \partial BMO$, qui semble optimal.
Nous prouvons dans le chapitre 5 des résultats d'existence globale pour l'équation des ondes semi-linéaire critique (avec non-linéarité polynomiale), pour une donnée initiale d'énergie infinie et de norme arbitrairement grande. Deux méthodes d'interpolation non-linéaire sont employées : la méthode de Calderon et la méthode de Bourgain ; elles donnent des résultats complémentaires.
Le chapitre 6 est consacré à des rappels, et nous mentionnons dans le chapitre 7 quelques perspectives possibles.

Abstract : Weak and strong solutions of partial differential evolution equations

We present in the introduction classical properties of weak and strong solutions of partial differential equations.
Chapter 2 is dedicated to the study of multipliers and paramultipliers between Sobolev spaces. If the pointwise multiplication operator by a function is bounded from a Sobolev space into another, we say that this function is a multiplier between these spaces. We define likewise paramultipliers by the boundedness of Bony's paraproduct operator. We prove an almost full description of multiplier and paramultiplier spaces.
This description is applied in Chapter 3 to the study of the weak-strong uniqueness problem for the Navier-Stokes equation in dimension $d \geq 3$. It enables us to prove a weak-strong uniqueness theorem which generalizes most known results.
We consider in Chapter 4 infinite energy solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. A theorem of Gallagher and Planchon asserts that a global solution exists if the initial data belong to a critical Besov space ; we extend this result to the case where the initial data belong to ∂BMO, which seems optimal.
We prove in Chapter 5 global existence results for the critical semi-linear wave equation (with polynomial non-linearity), for initial data of infinite energy and arbitrarily large norm. Two methods of non-linear interpolation are employed : the method of Calderon and the method of Bourgain ; they give complementary results.
Some classical results are recalled in Chapter 6, and we mention in Chapter 7 some possible further developments.

Table des matières

1 Introduction **9**

1.1 Un cadre général . . . 9
1.1.1 Position du problème . . . 9
1.1.2 Energie et homogénéité . . . 9
1.1.3 Différents types de solutions . . . 10
1.1.4 Unicité fort-faible . . . 13
1.1.5 Interpolation entre solutions d'énergie finie et infinie . . . 14
1.2 Résultats obtenus . . . 15
1.2.1 L'équation de Navier-Stokes et l'équation des ondes . . . 15
1.2.2 Unicité fort-faible pour (NS) . . . 17
1.2.3 Solutions globales d'énergie infinie à données grandes : étude de $(NS2D)$ et de $(NLW)_{2^*-1}$ . . . 19
1.3 Organisation de la thèse . . . 21

2 Multipliers and paramultipliers between Sobolev spaces **25**

2.1 Introduction and definitions . . . 25
2.1.1 Multipliers . . . 25
2.1.2 Paramultipliers . . . 28
2.2 Main theorem . . . 30
2.2.1 Statement of the main theorem . . . 30
2.2.2 Why paramultipliers enable one to better understand the structure of multiplier spaces . . . 30
2.2.3 An open question . . . 32
2.3 Proof of the main theorem . . . 32
2.3.1 Study of the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ . . . 32
2.3.2 Study of the spaces $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ . . . 36
2.3.3 Study of the spaces $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ . . . 38
2.3.4 Study of the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ . . . 38
2.3.5 Another approach : link with singular integrals and pseudodifferential operators . . . 42
2.3.6 A proof of $\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, L^2)$ based on the $\mathcal{H}^1$ - BMO duality 44
2.4 Comparison of multiplier spaces with more classical functional spaces . . . 46
2.5 A dual approach . . . 48
2.5.1 Spaces of products and paraproducts of Sobolev spaces . . . 48
2.5.2 The case of Lebesgue spaces . . . 51
2.6 Annex . . . 53
2.6.1 Some facts about Morrey spaces . . . 53

2.6.2 Boundedness of singular integral operators over Sobolev spaces . . . 54

3 Weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations 59
3.1 Introduction . . . 59
3.1.1 The Cauchy problem for the Navier-Stokes equations . . . 59
3.1.2 The weak-strong uniqueness problem . . . 60
3.1.3 Our approach of the weak-strong uniqueness problem . . . 60
3.1.4 Organisation of the chapter . . . 61
3.2 Navier-Stokes equations and weak-strong uniqueness : review of known results 62
3.2.1 The Navier-Stokes system, weak solutions, strong solutions . . . 62
3.2.2 Weak-strong uniqueness : known results . . . 64
3.2.3 Related problems . . . 69
3.3 Statement of the main results . . . 70
3.3.1 Weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations . . . 70
3.3.2 A result of harmonic analysis . . . 72
3.4 Optimality and proof of Theorem A . . . 74
3.4.1 Proof of Theorem A . . . 74
3.4.2 Continuity of the trilinear term : a heuristic approach . . . 79
3.4.3 Related results . . . 82
3.4.4 Proof of Lemma 3.4.2 in the case $d \geq 5$ . . . 84
3.5 The initial value problem . . . 88
3.5.1 The trend $e^{t\Delta}u_0$ . . . 88
3.5.2 Construction of solutions and bicontinuity of B : the case $0 < r < 1$ 90
3.5.3 Construction of solutions and bicontinuity of B : the case $r = 1$ . . . 93
3.5.4 Proof of Theorem B . . . 95
3.5.5 A summarizing picture . . . 95

4 Solutions globales d'énergie infinie de l'équation de Navier-Stokes 2D 103
4.1 Introduction et énoncé des résultats . . . 103
4.1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . 103
4.1.2 Solutions de (NS) . . . 104
4.1.3 Asymptotique en temps grand des solutions . . . 109
4.2 Preuve du théorème A . . . 112
4.2.1 Le théorème de Koch et Tataru . . . 112
4.2.2 Construction de la solution . . . 113
4.2.3 Preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$ . . . 117
4.2.4 Dépendance continue par rapport aux données initiales . . . 119
4.2.5 Ajout d'une force extérieure . . . 123
4.3 Preuve du théorème B . . . 123
4.3.1 Le cas $d = 3$, $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$ . . . 124
4.3.2 Preuve du théorème B . . . 125
4.4 Annexe . . . 128
4.4.1 L'espace ∂BMO et son sous-espace $\partial BMO^{(0)}$ . . . 128
4.4.2 Relation entre vitesse et vorticité . . . 129
4.4.3 Fonctions homogènes de degré -1 . . . 130
4.4.4 Résultats de type point fixe . . . 132

5 Solutions globales d'énergie infinie de l'équation des ondes semilinéaire

critique **135**
5.1 Introduction . . . 135
5.1.1 Equations d'onde semilinéaires . . . 135
5.1.2 Solutions d'énergie finie et solutions d'énergie infinie de $(NLW)_{2^*-1}$ 136
5.1.3 Interpolation entre solutions d'énergie finie et solutions d'énergie infinie . . . 137
5.1.4 Plan du chapitre . . . 138
5.2 Principaux résultats connus sur $(NLW)_p$ . . . 138
5.2.1 Solutions faibles . . . 138
5.2.2 Inégalité de Strichartz . . . 139
5.2.3 Solutions fortes d'énergie finie . . . 141
5.2.4 Solutions fortes d'énergie infinie . . . 142
5.2.5 Interpolation entre solutions d'énergie finie et infinie . . . 143
5.2.6 Solutions auto-similaires . . . 144
5.2.7 Récapitulation . . . 145
5.2.8 Scattering et comportement asymptotique . . . 145
5.3 Solutions globales de l'équation critique pour des données initiales d'énergie infinie : méthode de Bourgain . . . 147
5.3.1 Enoncé du théorème . . . 147
5.3.2 Preuve du théorème A . . . 149
5.3.3 Preuves des lemmes auxiliaires . . . 152
5.3.4 Résultat complémentaire . . . 157
5.4 Solutions globales de l'équation critique pour des données initiales d'énergie infinie : méthode de Calderón . . . 157
5.4.1 Enoncé du théorème . . . 158
5.4.2 Solution globale pour des données initiales d'énergie infinie et petites 158
5.4.3 Solution locale de l'équation perturbée . . . 159
5.4.4 Etude d'une solution autosimilaire . . . 163
5.4.5 Contrôle de l'énergie et preuve du théorème B . . . 166

6 Appendice : théorie de Littlewood-Paley et espaces de Besov **175**
6.1 Décomposition de Littlewood-Paley et paraproduit . . . 175
6.1.1 Décomposition de Littlewood-Paley . . . 175
6.1.2 L'algorithme du paraproduit . . . 176
6.2 Espaces de Besov : définitions . . . 176
6.2.1 Cas où l'espace de base est un espace de Banach général . . . 176
6.2.2 Cas où l'espace de base est un espace de Lebesgue . . . 177
6.2.3 Définitions équivalentes . . . 178
6.3 Résultats classiques . . . 179
6.3.1 Densité des fonctions régulières . . . 179
6.3.2 Dualité . . . 179
6.3.3 Injection de Sobolev . . . 179
6.3.4 Sommes de fonctions à support fréquentiel borné . . . 179
6.3.5 Stabilité des espaces de Besov par composition avec la valeur absolue 180
6.4 Lien avec des espaces fonctionnels classiques . . . 180
6.4.1 Espaces de Sobolev . . . 180
6.4.2 Espaces de Hölder . . . 181
6.4.3 Espaces de Lebesgue . . . 181

6.5 Une modification des espaces de Besov adaptée aux EDP d'évolution 182

7 Perspectives : solutions auto-similaires et comportement asymptotique 185
7.1 Solutions auto-similaires d'EDP d'évolution 185
7.1.1 La problématique 185
7.1.2 L'équation de la chaleur non-linéaire 186
7.1.3 L'équation des ondes non-linéaire 187
7.1.4 L'équation de Navier-Stokes 187
7.1.5 Limites de l'approche par solutions autosimilaires 188
7.2 Comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie 188
7.2.1 Un schéma général 188
7.2.2 Le cas de $(NS2D)$ 188
7.2.3 Le cas de (NS) 189
7.2.4 Le cas de $(NLW)_p$ 189

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à différentes équations d'évolution non-linéaires. Leur étude repose cependant sur des principes et des méthodes généraux, que nous allons commencer par exposer.

1.1 Un cadre général

1.1.1 Position du problème

Nous considérons le problème de Cauchy générique suivant

$$(G) \qquad \begin{cases} \partial_t u - Lu + N(u) = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ , \end{cases}$$

où $u(t,x)$ est une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$, L un opérateur linéaire sur des fonctions de la variable x seulement (typiquement, un opérateur différentiel), et N une fonction (non-linéaire) de u et de ses dérivées en x.

Les premières questions qui se posent sont les suivantes

- Si l'on sait construire des solutions, à quelle condition sont-elles uniques ?
- Pour quel ensemble de données initiales le problème de Cauchy ci-dessus est-il localement bien posé ?
- S'il existe des solutions locales, c'est à dire définies pour $t \in [0,T]$, peut-on les prolonger en des solutions globales, c'est à dire définies pour $t \in [0,+\infty[$?
- Et enfin, que peut-on dire du comportement en temps grand de ces solutions ?

1.1.2 Energie et homogénéité

Nous supposerons de plus que (G) possède les deux propriétés suivantes :

- On peut associer aux solutions u de (G) une énergie E, qui décroît le long du flot de (G). En d'autres termes, il existe $E(t,\cdot)$ une famille de fonctionnelles indexées par t telle que
  - Pour tout $t \geq 0$, $E(t,\cdot)$ est une fonctionnelle définie positive sur l'espace des fonctions de $[0,t] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$.

– Si u_0 est d'énergie finie (c'est à dire $E(0,u_0)<\infty$), et si u est une solution de (G) issue de u_0, alors

$$t \mapsto E(t,u) \quad \text{est décroissante}$$

sur l'intervalle d'existence de u.

On peut souvent associer de manière naturelle une énergie aux équations issues de la physique.

- Il existe des réels α et β tels que, si u est solution de (G) associée à u_0, alors

$$\lambda u(\lambda^\alpha t\,,\,\lambda^\beta x) \quad \text{est solution de } (G) \text{ associée à } \quad \lambda u_0(\lambda^\beta x)\ . \tag{1.1.1}$$

L'équation (G) possède alors une certaine homogénéité ou scaling. Cette hypothèse est par exemple vérifiée sauf exception si L et N sont homogènes. En effet, si

$$\left\{\begin{array}{l} L(f(\lambda\cdot))(x)=\lambda^\ell (Lf)(\lambda x) \\ N(\lambda f(\mu\cdot))(x)=\lambda^{n_1}\mu^{n_2}(Nf)(\mu x)\ , \end{array}\right.$$

pour des réels ℓ, n_1, n_2, la condition sur α et β pour que (1.1.1) soit vérifiée est

$$1+\alpha = 1+\ell\beta = n_1+n_2\beta\ . \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.1.1 *La deuxième propriété, que l'équation soit homogène, n'est pas vérifiée dans le cas de l'équation des ondes semilinéaire, que nous allons rencontrer plus loin. Elle serait vérifiée si on permettait aux différentes coordonnées de la fonction inconnue (qui s'écrit alors en fait* $U=\begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$*, voir (1.2.1)) d'avoir des homogénéités différentes. Par souci de clarté, nous ne considérons pas cette possibilité, mais on peut adapter sans peine toute notre discussion à ce cas.*

1.1.3 Différents types de solutions

Même si les notions de solution forte et de solution faible sont fondamentales dans l'étude des équations aux dérivées partielles d'évolution, il est difficile d'en donner une définition générale, c'est à dire indépendante du problème particulier considéré. Une possibilité consiste à classer les solutions en fortes et faibles suivant qu'elles dépendent ou non continûment de la donnée initiale.

Nous allons adopter un autre critère, en distinguant solutions fortes et solutions faibles par leur mode de construction. Si ce critère n'est pas parfait (on pourrait trouver des contre-exemples), il permet de retrouver de manière cohérente les propriétés classiques de ces deux types de solutions.

Solutions faibles

Pour construire des solutions de (G), on peut exploiter l'existence d'une énergie. On commence par approcher (G) par une suite d'équations (G^n)

$$(G^n) \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_t u^n + L^n u^n + N^n(u^n)=0 \\ u^n_{|t=0}=u_0^n\ , \end{array}\right.$$

convergeant vers (G) et conservant l'énergie au sens que, si u^n est une solution de (G^n) définie en t,

$$E(t, u^n) \leq E(0, u_0^n) \leq E(0, u_0) \ .$$

On suppose que la suite d'équations (G^n) est choisie de telle sorte que cette propriété de conservation de l'énergie permet de construire, pour tout n, une solution globale, u^n.
La suite (u^n) est alors bornée pour la norme $\sup_{t\geq 0} E(t, u^n)$; on peut donc par un argument de compacité en extraire une suite convergeant faiblement vers une fonction u. Il suffit alors de montrer que $N(u^n)$ converge vers $N(u)$ pour prouver que u est une solution globale de (G). On appelle u une solution faible.

Quelles sont les propriétés des solutions faibles ?

- De par leur méthode même de construction, elles sont globales, ce qui constitue une propriété très intéressante.
- Par contre, on ne sait a priori rien de leur unicité...
- ...pas plus que de leur éventuelle dépendance continue par rapport aux conditions initiales.
- On sait seulement qu'elles appartiennent à $L^\infty([0, \infty[, E)$, ce qui peut correspondre à une régularité plus ou moins élevée selon les cas, mais qui est en tout cas fixée par la méthode.
- De telles solutions sont d'énergie finie et ne peuvent être construites que pour une donnée initiale u_0 elle-même d'énergie finie.

Solutions fortes

Une autre méthode pour construire des solutions de (G) consiste à se ramener à l'étude d'une fonctionnelle. Il est ainsi parfois possible de voir (G) comme l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème de calcul des variations. Nous allons nous concentrer sur une deuxième possibilité : en utilisant la formule de Duhamel, (G) est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\, N(u(s))\, ds \ ,$$

en notant S pour le semi-groupe (qu'on suppose exister) dont le générateur infinitésimal est égal à L. L'équation ci-dessus est un problème de point fixe ; si l'on note $F(u)$ pour le deuxième terme du membre de droite, on peut la réécrire sous la forme

$$u = Su_0 + F(u) \ . \tag{1.1.3}$$

Comme $F(0) = 0$, on peut, grâce au théorème de point fixe de Picard, espérer résoudre cette équation dans un espace X, à condition que $\|Su_0\|_X$ soit assez petit. Une solution de (1.1.3) est dite solution forte.

Quelles sont les propriétés des solutions fortes ?

- On ne peut obtenir de solutions fortes globales (sans l'aide d'arguments autres que le théorème de point fixe) que pour des données initiales petites. En effet, si l'on se donne X un espace de fonctions définies pour tout temps, il faut, comme nous l'avons noté, que $\|Su_0\|_X$ soit assez petit pour pouvoir appliquer le théorème de Picard.

- Pour des données initiales générales, on peut néammoins souvent obtenir des solutions fortes locales. En effet, dans la pratique, la condition que $\|Su_0\|_X$ soit petit revient fréquemment à prendre pour X un espace de fonctions définies pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ avec T assez petit.

- En tant que solutions d'un problème de point fixe, les solutions fortes sont uniques, au moins dans une boule de X centrée en 0. Cette dernière restriction est en général facile à lever.

- Changer les données initiales u_0 dans l'équation (1.1.3) revient à considérer un problème de point fixe avec paramètre. Ceci montre qu'une solution forte dépend continûment des données initiales.

- La régularité des solutions fortes peut être élevée : il suffit d'appliquer le théorème de point fixe de Picard dans un espace X très régulier.

- Les solutions fortes ne sont pas nécessairement d'énergie finie.

- Supposons enfin que X est un espace homogène de fonctions de $(x,t) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$. Que peut-on dire alors de son homogénéité ? Avec la définition de F donnée plus haut, on a

$$\begin{aligned} F(\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot))(t) &= \int_0^t S(t-s) N(\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot))(s)\, ds \\ &= \lambda^{n_1+n_2\beta} \int_0^t S(t-s)(Nu)(\lambda^\alpha s, \lambda^\beta \cdot)\, ds \\ &= \lambda^{n_1+n_2\beta-\alpha} \int_0^{\lambda^\alpha t} S(t-\lambda^{-\alpha}s)(Nu)(s, \lambda^\beta \cdot)\, ds \ . \end{aligned}$$

  On utilise maintenant l'identité

$$S(t)(f(\lambda^\beta \cdot)) = S(\lambda^\alpha t)(f)(\lambda^\beta \cdot)$$

  pour poursuivre de la manière suivante

$$\begin{aligned} F(\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot))(t) &= \lambda^{n_1+n_2\beta-\alpha} \int_0^{\lambda^\alpha t} S(\lambda^\alpha t - s)\left[(Nu)(s)\right](\lambda^\beta \cdot)\, ds \\ &= \lambda F(u)(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta \cdot) \end{aligned}$$

  du fait de la relation (1.1.2). D'autre part, on peut supposer par homogénéité qu'on a une relation du type

$$\|F(u)\|_X \leq C\|u\|_X^p \ ,$$

  pour un réel p. Il suffit de prendre $v = \lambda u$ pour voir que $p = n_1$. En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$\|\lambda F(u)(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot)\|_X = \|F(\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot))\|_X \leq C\|\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot)\|_X^{n_1}$$

et cette dernière condition, si n_1 est différent de 1, ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\|\lambda u(\lambda^\alpha \cdot, \lambda^\beta \cdot)\|_X = \|u\|_X \ .$$

Conclusion 1.1.1 *Si $n_1 \neq 1$, les solutions fortes sont naturellement construites dans des espaces au scaling de l'équation, c'est à dire vérifiant l'identité ci-dessus.*

Réconcilier solutions fortes et solutions faibles

Les propriétés des solutions fortes et des solutions faibles apparaissent clairement comme complémentaires. Nous utilisons dans cette thèse deux approches permettant d'utiliser conjointement ces deux types de solutions afin de prouver un résultat plus fort que si l'on se limite à l'une des deux classes seulement. Mentionnons maintenant ces deux approches, avant de développer dans les sections suivantes leurs principes.

- L'unicité fort-faible : l'idée est de prouver l'unicité des solutions faibles en utilisant des solutions fortes.
- L'interpolation entre solutions fortes et solutions faibles : en interpolant entre solutions faibles (globales, d'énergie finie et de taille quelconque) et solutions fortes (globales, d'énergie infinie et petites), on espère obtenir des résultats d'existence globale pour des données initiales grandes et d'énergie infinie.

1.1.4 Unicité fort-faible

L'idée de l'unicité fort-faible est d'utiliser l'existence de solutions fortes d'énergie finie pour prouver l'unicité des solutions faibles. Pour être plus précis dans nos explications, il nous faut dire un mot de l'énergie E que nous utilisons dans tous les exemples apparaissant dans cette thèse. Elle est obtenue en prenant le produit scalaire de (G) avec u puis en intégrant sur $[0,t] \times \mathbb{R}^d$. On obtient alors

$$\|u(t)\|_2^2 - \|u_0\|_2^2 - \int_0^t \langle Lu\,,\, u\rangle(s)\, ds + \int_0^t \langle N(u)\,,\, u\rangle(s)\, ds = 0$$

(en notant $\|\cdot\|_p$ pour la norme de l'espace de Lebesgue L^p) et on trouve pour énergie

$$E(t,u) = \|u(t)\|_2^2 - \int_0^t \langle Lu\,,\, u\rangle(s)\, ds + \int_0^t \langle N(u)\,,\, u\rangle(s)\, ds \ ,$$

en supposant bien sûr que les deux derniers termes du membre de droite sont positifs.

La démarche de l'unicité fort-faible est la suivante : on suppose que

- u et v sont des solutions (faibles) d'énergie finie.
- u est une solution (forte) appartenant à un espace fonctionnel $\mathcal{P}$.

On voudrait alors montrer que $u = v$. Pour ce faire, notons $w = u - v$, et observons que w vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w - Lw + N(u) - N(u+w) = 0 \\ w_{|t=0} = 0 \ . \end{cases}$$

Pour estimer l'énergie de w, on procède comme plus haut, en prenant d'abord le produit scalaire de cette équation avec w puis en intégrant sur $[0,t]\times\mathbb{R}^d$. On obtient

$$E(t,w)=\int_0^t \langle N(u+w)-N(w)-N(u)\,,\,w\rangle(s)\,ds\ . \tag{1.1.4}$$

Le probème majeur est maintenant de caractériser les espaces $\mathcal{P}$ tels que le membre de droite de l'équation ci-dessus soit défini pour u, w d'énergie finie, et $u\in\mathcal{P}$. En effet, si tel est le cas, on peut en général, en utilisant des techniques du type lemme de Gronwall, montrer que $w=0$, c'est à dire qu'il existe une unique solution faible issue de u_0.

Dans un deuxième temps, il est intéressant de caractériser les données initiales u_0 desquelles sont issues des solutions $u\in\mathcal{P}$.

1.1.5 Interpolation entre solutions d'énergie finie et infinie

L'idée des deux méthodes que nous allons décrire consiste à interpoler entre solutions d'énergie finie et infinie.
Il convient avant tout de noter que si la distinction entre solutions d'énergie finie et infinie recouvre souvent celle entre solutions fortes et faibles, ce n'est cependant pas toujours le cas.

On peut en général obtenir des solutions globales de (G) à l'aide de deux techniques :

- Si u_0 est d'énergie finie, on peut utiliser la conservation de l'énergie pour contrôler une solution locale u et la prolonger à $\mathbb{R}^+$ ou bien appliquer une méthode de compacité comme expliqué plus haut, en section 1.1.3.
- On peut aussi s'en remettre à une méthode de point fixe comme celle décrite en section 1.1.3, et obtenir des solutions globales d'énergie infinie appartenant à un espace X. Mais comme nous l'avons noté, il faut alors se restreindre à des données initiales telles que
$$\|u_0\|_Y \overset{\text{déf}}{=} \|Su_0\|_X$$
soit assez petit.

Ainsi, nous pouvons construire des solutions globales grandes et d'énergie finie ou petites et d'énergie infinie.

Pour interpoler entre ces deux classes de solutions globales, donnons-nous u_0 grand et d'énergie infinie, que nous écrivons $u_0=v_0+w_0$, avec

- v_0 d'énergie finie
- w_0 d'énergie infinie et petit dans Y.

On sait alors qu'il existe des solutions globales v et w de (G) issues de v_0 et w_0, et tout le problème réside dans les interactions non-linéaires entre v et w.

La méthode de Calderón

Cette méthode a été introduite par Calderón [3] afin d'étudier les solutions faibles des équations de Navier-Stokes en dimension d'espace égale à 3, puis appliquée par Gallagher

et Planchon aux équations de Navier-Stokes en dimension d'espace égale à 2 [4] ainsi qu'à l'équation des ondes [5].
L'idée est de commencer par résoudre globalement

$$\begin{cases} \partial_t w - Lw + N(w) = 0 \\ w_{|t=0} = w_0 \end{cases}$$

puis de considérer le problème perturbé

$$\begin{cases} \partial_t v - Lv + N(v+w) - N(w) = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{cases}$$

Si v est une solution de ce problème, $u = v + w$ est une solution de (G).
La donnée initiale v_0 est d'énergie finie, et le point crucial est de contrôler l'énergie de v. Si l'on y parvient, on peut appliquer les méthodes standard pour montrer que v est globale, et ainsi conclure.

De nombreux problèmes peuvent survenir, et rendre plus complexe l'application de la méthode de Calderón. En particulier, on ne dispose parfois d'une majoration de l'énergie de v que sur un temps fini, fonction de v_0 et w_0. Il faut alors considérer des suites convenablement choisies de données initiales (v_0^n), (w_0^n) telles que le temps maximal jusqu'auquel on contrôle v tende vers l'infini. On retrouve ainsi des constructions semblables à celles de l'interpolation linéaire.

La méthode de Bourgain

Cette méthode a été introduite par Bourgain pour étudier l'équation de Schrödinger [2]. Elle a notamment été appliquée par Kenig, Ponce et Vega à l'équation des ondes [6].
Elle constitue en quelque sorte le dual de la méthode précédente. On commence cette fois-ci par résoudre globalement

$$\begin{cases} \partial_t v - Lv + N(v) = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ , \end{cases}$$

puis l'on considère le problème perturbé

$$\begin{cases} \partial_t w - Lw + N(w+v) - N(v) = 0 \\ w_{|t=0} = w_0 \ . \end{cases}$$

Si w_0 est assez petit dans Y, on peut utiliser une construction de type point fixe pour obtenir une solution locale sur $[0, T_1]$, tout en contrôlant $\|w(T_1)\|_Y$. On recommence alors en T_1, on obtient une solution sur $[T_1, T_2]$, et ainsi de suite ; on s'arrête à l'étape m quand on ne peut plus garantir que $\|w(T_m)\|_Y$ est assez petit. A priori $T_m < \infty$ (à moins que l'on ne dispose d'une information sur la décroissance de v), et il faut alors avoir recours à des suites de données initiales (v_0^n), (w_0^n) telles que le temps d'existence de w^n tende vers $+\infty$ pour obtenir une solution globale.

1.2 Résultats obtenus

1.2.1 L'équation de Navier-Stokes et l'équation des ondes

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés dans cette thèse à deux équations aux dérivées partielles : l'équation de Navier-Stokes, et l'équation des ondes semi-linéaire. Nous allons les présenter brièvement.

L'équation de Navier-Stokes

Cette équation s'écrit

$$(NS)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0\ , \end{cases}$$

où $u(t,x)$ est une fonction de $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, et $p(t,x)$ une fonction de $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On peut retrouver p à partir de u grâce à la formule

$$\Delta p = -\sum_{i,j=1\ldots d} \partial_i\partial_j(u^j u^i)\ ;$$

ainsi, u constitue la véritable inconnue du problème.
Le scaling associé à cette équation est la transformation suivante

$$u(t,x) \longrightarrow \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

et son énergie, qui s'obtient en prenant le produit scalaire de (NS) avec u puis en intégrant en temps et en espace, s'écrit

$$E(t,u) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds\ .$$

L'équation des ondes semi-linéaire

C'est la seconde équation que nous considérerons. Elle s'écrit

$$(NLW)_p \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1\ , \end{cases}$$

où l'inconnue u est une fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
Si l'on pose $U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, et $N\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |v|^{p-1}v \end{pmatrix}$, $(NLW)_p$ peut se réécrire sous la forme (G) :

$$\begin{cases} \partial_t U - \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} + N(U) = 0 \\ U_{t=0} = U_0\ . \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Cette équation a pour scaling

$$u(t,x) \longrightarrow \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda t, \lambda x)$$

et son énergie (que l'on peut obtenir en prenant le produit scalaire de $(NLW)_p$ avec $\partial_t u$ puis en intégrant en temps et en espace) s'écrit

$$E(t,u) = \frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p+1}\int_0^t \|u(s)\|_{p+1}^{p+1} ds\ .$$

Les questions que nous nous poserons

Ces équations diffèrent par beaucoup d'aspects, en particulier (NS) est une équation parabolique alors que $(NLW)_p$ est une équation hyperbolique. Néammoins, elles ont toutes deux la structure exposée dans la section 1.1 : on peut leur associer une énergie, et elles possèdent une certaine homogénéité.
De ce fait, beaucoup de questions similaires se posent pour (NS) et $(NLW)_p$, par exemple : les solutions faibles sont-elles uniques ? Les solutions d'énergie infinie sont-elles globales ? Nous avons cherché dans cette thèse à répondre à ces questions (dans certains cas) en utilisant les méthodes décrites en section 1.1

Nous allons décrire les résultats ainsi obtenus.

1.2.2 Unicité fort-faible pour (NS)

Comme nous allons le voir, l'étude de l'unicité fort-faible pour (NS) impose un détour par les multiplicateurs et paramultiplicateurs entre espaces de Sobolev. Nous commençons par exposer les résultats que nous avons obtenus à ce sujet avant de revenir à la question de l'unicité fort-faible à proprement parler.

Multiplicateurs et paramultiplicateurs entre espaces de Sobolev

Nous utilisons les espaces de Sobolev homogènes standard ; le lecteur peut se reporter au chapitre 2 où ils sont définis.
Définissons maintenant rapidement les multiplicateurs entre espaces de Sobolev : si s et $s+\alpha$ sont deux réels appartenant à $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, on dit que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ (l'espace des multiplicateurs de $\dot{H}^s$ dans $\dot{H}^{s+\alpha}$) s'il existe une constante C telle que

$$\|f\phi\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s} \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ .$$

Le produit de deux fonctions peut être décomposé à l'aide de l'algorithme du paraproduit introduit par Bony [1] (nous utilisons les notations Δ_j et S_j standard pour la théorie de Littlewood-Paley, voir le chapitre 6 pour une définition) :

$$\begin{aligned} fg &= \sum_j \Delta_j f S_j g + \sum_j S_j f \Delta_j g + \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_j f \Delta_k g \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \quad \Pi(f,g) \quad + \quad \widetilde{\Pi}(f,g) \quad + \quad R(f,g) \ . \end{aligned}$$

Afin d'étudier plus finement les espaces de multiplicateurs, il s'avère intéressant d'examiner la continuité des opérateurs $\Pi(f,\cdot)$, $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ et $R(f,\cdot)$.
Ainsi, de même que $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ est défini par la continuité de $\phi \mapsto f\phi$, nous définissons respectivement $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ et $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ par la continuité de $\Pi(f,\cdot)$, $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ et $R(f,\cdot)$ en tant qu'opérateurs de $\dot{H}^s$ dans $\dot{H}^{s+\alpha}$.
Nous avons pu décrire dans la plupart des cas les espaces de multiplicateurs et de paramultiplicateurs. Il apparaît qu'ils peuvent être déduits par intégration ou différentiation fractionnaire des espaces BMO^s de Youssfi [11] [12] définis par

$$BMO^s \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s)$$

(en particulier, BMO^0 est l'espace BMO classique). Nous notons dans le théorème qui suit Λ pour $|D|$.

Théorème A *Soit $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $s+\alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. On a alors*

- $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^s$.
- $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$.
- *Si* $\alpha < 0$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$.
- $\begin{array}{ll} \textit{Si } \alpha > 0, & \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \{0\} \ ; \\ \textit{si } \alpha = 0, & \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) = BMO^{|s|} \cap L^\infty \ ; \\ \textit{si } \alpha < 0,\ \alpha \neq -2s, & \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)} \ ; \\ \textit{si } s = 1/2 \textit{ ou } 1, & \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}) = \Lambda^{2s} BMO^s. \end{array}$

Ce théorème est prouvé dans le chapitre 2.

Retour à l'unicité fort faible pour (NS)

On sait depuis l'article fondateur de Leray [7] qu'il existe des solutions faibles de (NS) si la condition initiale u_0 de divergence nulle appartient à L^2. Ces solutions appartiennent à l'espace d'énergie

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{déf}}{=} L^\infty([0,\infty), L^2) \cap L^2([0,\infty), \dot{H}^1) \ ;$$

plus précisément, elles vérifient l'inégalité d'énergie

$$\forall t \geq 0 \qquad E(t,u) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 \ . \tag{1.2.2}$$

On sait que ces solutions faibles sont uniques si $d = 2$; par contre, pour $d \geq 3$, on ne sait pas si c'est le cas en général. La technique d'unicité fort-faible décrite en section 1.1.4 permet d'apporter des réponses partielles. Comme nous l'avons expliqué plus haut, toute la difficulté consiste à donner un sens au membre de droite de (1.1.4) ; dans le cas de (NS), il prend la forme suivante

$$\begin{array}{rcl} F & \stackrel{\text{déf}}{:} & (u,v,h) \mapsto \displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) h \, dx \, ds \\ & & \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R} \ . \end{array}$$

Il s'agit de déterminer les espaces fonctionnels $\mathcal{P}$ tels que $F : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue. Or si $\alpha \in [2, \infty]$, on voit par interpolation que

$$\mathcal{L} \hookrightarrow L^\alpha([0, +\infty[, \dot{H}^{2/\alpha}) \ .$$

Une condition suffisante pour que $F : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue est donc que, pour des réels α et β dans $[2, \infty]$ on ait

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) h \, dx \, ds \right| \leq C \|u\|_{L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha}} \|v\|_{L^\beta \dot{H}^{2/\beta}} \|h\|_{\mathcal{P}} \ .$$

L'inégalité ci-dessus est clairement vérifiée pour $\mathcal{P} = L^\gamma([0,T], \mathbf{M}(\dot{H}^{2/\alpha}, \dot{H}^{1-2/\beta}))$ où γ est tel que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$. On voit donc comment les espaces de multiplicateurs sont amenés à jouer un rôle dans des questions d'unicité fort-faible ; en appliquant l'algorithme

du paraproduit au produit $(u \cdot v) \cdot h$ dont l'intégrale définit F, ce sont les espaces de paramultiplicateurs qui apparaissent.

Nous développons dans le chapitre 3 les idées qui ont été exposées ci-dessus. On aboutit au théorème suivant, où nous utilisons encore la notation $\Lambda = |D|$.

Théorème B *Soient u et v deux solutions faibles de (NS) issues de $u_0 \in L^2$ vérifiant l'inégalité d'énergie (1.2.2). Supposons de plus que pour un certain $T > 0$, u appartient à $\mathcal{P}$, avec soit*

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}([0,T], (\Lambda\, BMO^1)^{(0)})$$

(pour un espace de Banach de distributions B, on note $B^{(0)}$ pour l'adhérence de la classe de Schwartz dans B), soit

$$\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], \Lambda^r BMO^r) \qquad \text{pour un certain } r \in [0,1)\ ,$$

soit

$$\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], \Lambda^r BMO) \qquad \text{pour un certain } r \in (-1,0]\ ,$$

soit encore

$$\mathcal{P} = L^1([0,T], \mathrm{Lip})\ ,$$

où Lip *est l'ensemble des fonctions dont le gradient appartient à L^∞.*
Alors $u = v$ sur $[0,T]$. De plus, u appartient à $\mathcal{C}([0,T], L^2)$ et on a l'égalité d'énergie :

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds = \|u_0\|_2^2\ .$$

Les deux premiers cas du théorème ci-dessus sont dus à Lemarié [8], les deux derniers sont nouveaux.
Ce théorème généralise tous les résultats connus en matière d'unicité fort-faible.

1.2.3 Solutions globales d'énergie infinie à données grandes : étude de $(NS2D)$ et de $(NLW)_{2^*-1}$

Le cas de $(NS2D)$

Nous appelons $(NS2D)$ le système de Navier-Stokes avec $d = 2$ (dimension d'espace égale à 2).
Les solutions de Leray qui ont été introduites au paragraphe précédent sont uniques et régulières pour $d = 2$. Ainsi, si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est de divergence nulle, on sait qu'il existe une solution globale, unique, régulière et d'énergie finie.

Comme $d = 2$, l'espace d'énergie pour les données initiales, L^2, est au scaling de l'équation. Il est inclus dans des espaces eux aussi au scaling mais d'énergie infinie :

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{\widetilde{p}}-1}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \hookrightarrow \partial BMO \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}\ ,$$

si $2 \le p \le \widetilde{p} < \infty$ et $2 \le q \le \widetilde{q} \le \infty$ (voir le chapitre 6 pour la définition des espaces de Besov).
On connaît l'existence de solutions globales de $(NS2D)$ pour des données initiales petites dans $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$, avec $p < \infty$, ou dans ∂BMO, l'espace des dérivées de fonctions de BMO.

Gallagher et Planchon [4] ont utilisé la méthode de Calderón présentée en section 1.1.5 pour interpoler entre solutions globales d'énergie finie à données grandes et solutions globales d'énergie infinie à données petites. Ils ont ainsi obtenu l'existence de solutions globales pour une donnée initiale $u_0 \in \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$, avec $p < \infty$ et $q < \infty$

En utilisant la même méthode, nous avons pu étendre leur résultat en prouvant l'existence de solutions globales de $(NS2D)$ pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ (l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO). Nous avons aussi pu établir certaines propriétés de ces solutions globales. Elles sont regroupées dans le théorème suivant.

Théorème C *$(NS2D)$ est globalement bien posé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$. Plus précisément,*

- *Si $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ est de divergence nulle, il existe une solution globale u de (NS) issue de u_0.*
- *Le flot de (NS), c'est à dire l'application*

$$\begin{aligned} \phi \overset{déf}{:} (u_0, t) &\mapsto u(t) \\ \partial BMO^{(0)} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \partial BMO \ , \end{aligned}$$

  est localement lipschitzien par rapport à la première variable.

- *Enfin, u est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$, et, pour tout $\delta > 0$ et pour une constante $C(\delta)$ dépendant de u_0 et de δ, on dispose de l'estimation suivante*

$$\forall t > 0 \quad \|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^{\delta}) \, .$$

Ce théorème est prouvé dans le chapitre 4.

Le cas de $(NLW)_{2^*-1}$

On note $2^* = \dfrac{2d}{d-2}$, il s'agit de l'exposant associé à l'injection de Sobolev

$$\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{2^*} \ .$$

L'étude de $(NLW)_p$ fait apparaître la valeur critique $2^* - 1$ pour p. En effet, si l'on considère des données initiales (u_0, u_1) d'énergie finie, c'est à dire appartenant à $\dot{H}^1 \times L^2$, l'existence de solutions fortes globales de $(NLW)_p$ n'est connue que pour $p \leq 2^* - 1$. Ce résultat est beaucoup plus difficile si $p = 2^* - 1$, il a été établi par Shatah et Struwe [10]. Si $p > 2^* - 1$, on ignore s'il existe dans le cas général des solutions fortes globales d'énergie finie de $(NLW)_p$.
D'autre part, pour des données initiales (u_0, u_1) appartenant à $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$, et de norme petite, Planchon [9] a prouvé l'existence de solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$.

Nous avons appliqué les méthodes de Bourgain et de Calderón exposées plus haut, afin d'obtenir des solutions globales, d'énergie infinie et de norme quelconque de $(NLW)_{2^*-1}$. Les deux méthodes permettent de démontrer des résultats différents. Ainsi, la méthode de Bourgain donne le théorème suivant.

Théorème D *Soit $d = 3, 4$ ou 6. Il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, si des données initiales (u_0, u_1) peuvent s'écrire*

$$(u_0, u_1) = (v_0 + w_0, v_1 + w_1) \ .$$

avec

$$E = \|v_0\|_{\dot{H}^1} + \|v_1\|_{L^2} < \infty \ .$$

et

$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C \exp(-\exp(E^\alpha)) \ ,$$

alors $(NLW)_{2^*-1}$ admet une solution globale (définie pour $t \in \mathbb{R}$).

Quant à la méthode de Calderón, elle permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème E *Soit $d = 6$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy $(NLW)_{2^*-1}$ admette des solutions globales à condition que les données initiales (u_0, u_1) puissent s'écrire*

$$u_0(x) = v_0(x) + \frac{c_0}{|x|^2} \quad \text{et} \quad u_1(x) = v_1(x) + \frac{c_1}{|x|^3} \ ,$$

avec $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, $c_1 < \epsilon$ et $c_2 < \epsilon$.

Notons que les données initiales $\left(\frac{c_0}{|x|^2}, \frac{c_1}{|x|^3}\right)$ sont d'énergie infinie, sans quoi le théorème n'aurait pas d'intérêt.
Notons aussi que ces deux théorèmes sont complémentaires :

- Dans le théorème D, on obtient une solution globale pour une perturbation d'énergie infinie de données initiales d'énergie finie ; il n'y a pas de conditions sur la forme de cette perturbation, mais sa taille doit être exponentiellement petite par rapport à l'énergie des données non perturbées.
- Le théorème E donne le même résultat d'existence globale, mais la condition sur la perturbation est différente : sa forme est fixée, et sa taille doit être inférieure à une constante universelle.

Ces deux théorèmes sont prouvés dans le chapitre 5.

1.3 Organisation de la thèse

Dans les chapitres 2 à 5, les résultats qui viennent d'être évoqués sont développés.

- Le chapitre 2 est consacré à l'étude des multiplicateurs et paramultiplicateurs entre espaces de Sobolev.
- Cette étude est appliquée dans le chapitre 3 à l'unicité fort-faible pour les équations de Navier-Stokes.
- Nous nous intéressons dans le chapitre 4 aux solutions globales d'énergie infinie (à données grandes) des équations de Navier-Stokes en dimension 2 d'espace.
- Enfin, le chapitre 5 porte sur les solutions globales d'énergie infinie (à données grandes) de l'équation des ondes non-linéaire critique $(NLW)_{2^*-1}$.

Ces quatre chapitres peuvent être lus de manière indépendante : les rappels nécessaires sont faits dans chacun d'entre eux.

Des prolongements possibles des travaux de cette thèse sont présentés dans le chapitre 7.

Enfin, nous utilisons abondamment la théorie de Littlewood-Paley et en particulier les espaces de Besov, aussi le chapitre 6 est-il consacré à des rappels sur ce sujet.

Bibliographie

[1] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure **14**, 209-246 (1981)

[2] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications **46**, American Mathematical Society, Providence, RI (1999)

[3] C. Calderón, *Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p*, Transactions of the American Mathematical Society **318**, 179-200 (1990)

[4] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, No.4, 307-337 (2002)

[5] I. Gallagher, F. Planchon, *On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation*, Revista Matematica Iberoamericana **19**, 161-177 (2003)

[6] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations **25**, 1741-1752 (2000)

[7] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934)

[8] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall (2003)

[9] F. Planchon, *Self-similar solutions and semi-linear wave equations in Besov spaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées IX, Sér. **79**, 809-820 (2000)

[10] J. Shatah, M. Struwe, *Geometric wave equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York (2000)

[11] A. Youssfi, *Function spaces related to singular integral operators, in Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1993

[12] A. Youssfi, *Duality of type $\mathcal{H}^1$ - BMO and bilinear operators*, Journal of mathematical analysis and applications **190**, 780-794 (1995)

Chapitre 2

Multipliers and paramultipliers between Sobolev spaces

Abstract
This chapter is dedicated to multipliers and paramultipliers between Sobolev spaces. The pointwise product of f and ϕ can be decomposed using Bony's paraproduct algorithm

$$\begin{aligned} f\phi &= \sum_j \Delta_j f S_j\phi + \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_j f \Delta_k \phi + \sum_j S_j f \Delta_j \phi \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \Pi(f,\phi) \quad + \quad R(f,\phi) \quad + \quad \widetilde{\Pi}(f,\phi) \end{aligned}$$

(see Chapter 6 for the notations). Multipliers (respectively paramultipliers) are functions f such that the operator $M_f : \phi \mapsto f\phi$ (respectively, the operators $\Pi(f,\cdot)$, $R(f,\cdot)$, or $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$) maps a given Sobolev space into another one. Our main result is an almost complete description of paramultiplier and multiplier spaces. In order to prove it, we begin by describing paramultiplier spaces, and prove then that M_f is continuous if and only if the three operators of the above decomposition are continuous. We also give some alternative approaches to this theorem and study the embeddings between multiplier and paramultiplier spaces and more classical functional spaces. Finally, we discuss some properties of the preduals of multiplier and paramultiplier spaces.

2.1 Introduction and definitions

2.1.1 Multipliers

Definition

Let us begin with the definition of Sobolev spaces.

Definition 2.1.1 (Sobolev spaces) *If $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, a tempered distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ belongs to $\dot{H}^s$ if $\hat{f}$ is locally integrable and*

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \ .$$

In order to define multipliers between Sobolev spaces, we remark that multiplying a tempered distribution by a Schwartz function makes sense : if $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, and $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, we

define the tempered distribution $f\phi$ by

$$\langle f\phi\,,\,\lambda\rangle = \langle f\,,\,\phi\lambda\rangle \qquad \forall\lambda\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ .$$

We shall denote by M_f the corresponding multiplication operator

$$M_f\phi \stackrel{\text{def}}{=} f\phi\ .$$

Definition 2.1.2 (Multipliers between Sobolev spaces) *Let s and t belong to $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$. We say that f belongs to $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ (the space of multipliers from $\dot{H}^s$ to $\dot{H}^t$) if*

$$\|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} = \sup\left\{\|f\phi\|_{\dot{H}^t}\ ,\phi\in\mathcal{S}\ \textit{and}\ \|\phi\|_{\dot{H}^s}\le 1\right\}<\infty\ .$$

It is not hard to see that $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ is a Banach space.

Lemma 2.1.1 *Let s and t belong to $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$. The norm $\|\cdot\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)}$ makes of $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ a Banach space.*

PROOF : Let us take (f_n) an absolutely converging series of $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$, i.e. such that $\sum_n\|f_n\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)}<\infty$. Then $\sum_n M_{f_n}$ converges to M, a continuous operator from $\dot{H}^s$ to $\dot{H}^t$, and $\sum_n f_n$ to a tempered distribution f. Necessarily $M=M_f$. ■

Our multipliers are distributions which, by pointwise multiplication, map a Sobolev space based on L^2 of a given index on another one. Multiplier spaces are studied in a more general framework in Maz'ya [10] and Bourdaud [2], Chapter III.

Some examples

Hardy's inequality

Hardy's inequality reads, if $s<d/2$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\phi(x)|^2}{|x|^{2s}}dx\le C\|\phi\|^2_{\dot{H}^s}\ ,$$

which is equivalent to

$$x\mapsto\frac{1}{|x|^s}\ \in\ \mathbf{M}(\dot{H}^s,L^2)\ .$$

Product laws

If s and t are two real numbers less than $\frac{d}{2}$ and such that $s+t>0$, there exists a constant C such that

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+t-d/2}}\le C\|f\|_{\dot{H}^s}\|g\|_{\dot{H}^t}\ ,$$

which means that

$$\dot{H}^s\hookrightarrow\mathbf{M}(\dot{H}^t,\dot{H}^{s+t-d/2})\ .$$

Traces on hypersurfaces

For the sake of simplicity, we only deal with the case of a hyperplane. If $u(x)$ is a function of $x=(x_1\dots x_d)\in\mathbb{R}^d$, we denote by $u(\cdot,0)$ the function $(x_1\dots x_{d-1})\mapsto u(x_1,\dots,x_{d-1},0)$. With this notation, we have the following trace theorem

$$\|u(\cdot,0)\|_{\dot{H}^{s-1/2}}\le C\|u\|_{\dot{H}^s}\ ,$$

if $\frac{1}{2} < s < \frac{d}{2}$. This inequality cannot be expressed in terms of multiplier spaces, but these two topics are very close. Notice for instance that if the value $s = \frac{1}{2}$ were allowed, the above equality would mean that the Lebesgue measure on a hyperplane is a multiplier from $\dot{H}^{1/2}$ to L^2.
Many similar inequalities can be found in Maz'ya [11].

Ricatti's equation
We will see in Chapter 3 that the problem of weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations is a first example of application of multiplier spaces to partial differential equations.
Another example is provided by some nonlinear elliptic equations (see [1] [12]). We shall present one of them : Ricatti's equation. We will see that multiplier spaces are the optimal framework to build up solutions of this equation. We essentially follow Gala [8].

Ricatti's equation reads

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 + f \ . \tag{2.1.1}$$

This equation is set on $\mathbb{R}^d$; we suppose that f is a positive measure.
In order to give a meaning to this equation, it suffices that u belongs locally to $\dot{H}^1$. So let u be a locally $\dot{H}^1$ solution of the above equation. Taking the scalar product of (2.1.1) with ϕ^2, where ϕ is a test function, we get

$$2\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \cdot \nabla \phi)\, \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} f\, \phi^2 \, dx \ . \tag{2.1.2}$$

So on the one hand,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, \phi^2 \, dx \le 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx \right)^{1/2} \|\nabla \phi\|_2 - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx \le \|\nabla \phi\|_2^2 \ , \tag{2.1.3}$$

(we denote $\|\cdot\|_p$ for the norm of the Lebesgue space L^p) and on the other hand, since $f \ge 0$, we deduce from (2.1.2) that

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx \le 2 \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \cdot \nabla \phi)\, \phi \, dx \le 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx \right)^{1/2} \|\nabla \phi\|_2$$

which implies that

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \phi^2 \, dx \le 4 \|\nabla \phi\|_2^2 \ . \tag{2.1.4}$$

We therefore reach the

Conclusion 2.1.1 *If Ricatti's equation (2.1.1) has a solution u, inequalities (2.1.3) and (2.1.4) must be verified. In other words,*

$$\nabla u \in \mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2) \quad \textit{and} \quad \|\nabla u\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2)} \le 2 \ .$$

Likewise, the condition on f is of the "multiplier spaces" kind ; in a non-formal way, we can formulate this condition as the belonging of $\sqrt{f}$ to $\mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2)$.

2.1.2 Paramultipliers

Definition

Multiplier spaces are intended to study how pointwise multiplication maps Sobolev spaces of various regularity indexes. In order to study in a more refined way the action of pointwise multiplication, it is natural to make use of the paraproduct algorithm of Bony (see Chapter 6)

$$\begin{aligned} f\phi &= \sum_j \Delta_j f S_j\phi + \sum_j S_j f \Delta_j\phi + \sum_{|j-k|\le 1} \Delta_j f \Delta_k \phi \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Pi(f,\phi) \quad + \quad \widetilde{\Pi}(f,\phi) \quad + \quad R(f,\phi)\ . \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Recall that multiplier spaces are defined by the boundedness of M_f from one Sobolev space into another one. Now we are led to considering the spaces of functions f for which (respectively) the applications

$$\Pi(f,\cdot)\,,\ \widetilde{\Pi}(f,\cdot)\,,\ R(f,\cdot)\ \ : \dot{H}^s \longrightarrow \dot{H}^{s+\alpha}$$

are bounded. The following definition makes this precise.

Definition 2.1.3 *Let $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $s+\alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Then*

- $\|f\|_{\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} = \sup\left\{\|\Pi(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}}\ , \phi \in \mathcal{S} \text{ and } \|\phi\|_{\dot{H}^s} \le 1\right\}$ *and*

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \left\{ f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}\,,\ \|f\|_{\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} < \infty \right\}$$

- *If $\alpha < 0$,* $\|f\|_{\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} = \sup\left\{\|\widetilde{\Pi}(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}}\ , \phi \in \mathcal{S} \text{ and } \|\phi\|_{\dot{H}^s} \le 1\right\}$ *and*

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \left\{ f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}\,,\ \|f\|_{\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} < \infty \right\}\ ;$$

  if $\alpha = 0$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^s) \stackrel{def}{=} L^\infty$.

- $\|f\|_{\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} = \sup\left\{\|R(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}}\ , \phi \in \mathcal{S} \text{ and } \|\phi\|_{\dot{H}^s} \le 1\right\}$ *and*

$$\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \left\{ f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}\,,\ \|f\|_{\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})} < \infty \right\}$$

Remark 2.1.1

- *We defined the space $\boldsymbol{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ as the set of $f \in \mathcal{S}'$ such that M_f is bounded. But in order to define the paramultiplier spaces, we consider only functions in the Besov spaces $\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$, which is consistent with the scaling, but a priori not completely general. We believe that any distribution f such that $\Pi(f,\cdot)$, $R(f,\cdot)$ or $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ maps $\dot{H}^s$ in $\dot{H}^{s+\alpha}$ also belongs to $\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$, but we have not been able to prove it.*
- *The definition of $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ poses a specific problem : indeed, $\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ does not embed in $\mathcal{S}'$ for $\alpha \ge 0$ (see Chapter 6). Therefore, $S_j f$ cannot, for these values of α, be defined as an element of $\mathcal{S}'$, and it is not clear which meaning should be given to the pointwise product $S_j f \Delta_j \phi$ then. For this reason, and because $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ is obviously continuous on $\dot{H}^s$ if $f \in L^\infty$, we choose to define $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ as L^∞ if $\alpha = 0$. For $\alpha > 0$, we do not consider this space.*

- *The indexes of the Sobolev spaces, s and $s+\alpha$, are taken in $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. The reason is of course that, with s lying in this interval, the following embeddings hold*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \dot{H}^s \hookrightarrow \mathcal{S}' \ ,$$

so there are no difficulties when handling Sobolev spaces. Besides, this range of values for s and $s+\alpha$ suffices for the application to the Navier-Stokes equations in Chapter 3. A larger range of s and $s+\alpha$ is considered in Part 2.3.

The BMO^s spaces

Some of the paramultiplier spaces which have been introduced above were already studied, namely the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s)$.
The most famous one of them is BMO, which can be defined as

$$BMO = \mathbf{\Pi}(L^2, L^2) \ ,$$

see for instance Stein [18]. Youssfi [20] [21] generalised this definition by introducing the spaces BMO^s

$$BMO^s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) \ .$$

We will say a few words about the BMO^s spaces, since they will play a major role in the following.
The definition we have just given is not very easy to manipulate : it is for example hard to find examples of functions belonging to $BMO^s \setminus BMO^t$ for $s \neq t$. Another definition (which is unfortunately also unpleasant to handle) exists, and it relies on Riesz capacities.

Definition 2.1.4 (Riesz capacities) *Let s be a real number. If Ω is an open set of $\mathbb{R}^d$, its Riesz capacity of order s is given by*

$$\mathrm{Cap}_s(\Omega) = \inf \left\{ \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ , \ \phi_{|\Omega} = 1 \right\}$$

Proposition 2.1.1 (Youssfi [20]) *Let $f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}$, and $s \in (0, \frac{d}{2})$. Then $f \in BMO^s$ if and only if there exists a constant $C > 0$ such that for any bounded open domain Ω,*

$$\sum_j 4^{sj} \int_\Omega |\Delta_j f(x)|^2 \, dx \leq C \, \mathrm{Cap}_s(\Omega) \ .$$

Let us now give some other properties of the BMO^s spaces.

Proposition 2.1.2 *Let $s, t \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Then*
(i) If $s > t$, $BMO^s \hookrightarrow BMO^t$: the BMO^s decrease if s increases.
(ii) If $s = 0$, BMO^0 is the classical BMO space.
(iii) If $s < 0$, $BMO^s = \dot{B}^0_{\infty,\infty}$.
(iv) $L^\infty \hookrightarrow BMO^s$ if and only if $s \leq 0$.

PROOF : (i) is proved in [21] ; it is a particular case of Lemma 2.3.1 of the present Chapter.
(ii) is true by definition.
(iii) can be proved by a simple computation : let $s < 0$, $f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}$, and $\phi \in \mathcal{S}$, then we have

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 4^{js} \|\Delta_j f S_j \phi\|_2^2 \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 4^{js} \|S_j \phi\|_2^2 \leq C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ .$$

(iv) The "if" part is obvious ; for the "only if", see Youssfi [21]. ■

Value of s	$-d/2 < s < 0$	$s = 0$	$0 < s < \frac{d}{2}$
BMO^s	$\dot{B}^0_{\infty,\infty}$	BMO	BMO^s

Figure 2.1: The spaces BMO^s

2.2 Main theorem

The aim of this chapter is to describe the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ and $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. This goal is achieved (at least if $\alpha \neq 0$) in Theorem A.

2.2.1 Statement of the main theorem

Before stating the theorem, we have to define the Calderón operator

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} |D| \ .$$

Theorem A *Take $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $s + \alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. One has then*

- $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^s$.
- $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$.
- *If $\alpha < 0$,* $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$.
- *If $\alpha > 0$,* $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \{0\}$;
  if $\alpha = 0$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) = BMO^{|s|} \cap L^\infty$;
  if $\alpha < 0$, $\alpha \neq -2s$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$;
  if $s = 1/2$ or 1, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}) = \Lambda^{2s} BMO^s$.

The following figure is an attempt to sum up the situation.

Space considered	$\alpha > 0$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0$
$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\Lambda^{-\alpha} BMO^s$	BMO^s	$\Lambda^{-\alpha} BMO^s$
$\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$	BMO^{-s}	$\Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$
$\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$		L^∞	$\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$
$\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\{0\}$	$L^\infty \cap BMO^{\lvert s\rvert}$	If $s \neq -\alpha/2$, $\Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$

Figure 2.2: Multiplier and paramultiplier spaces ; s and $s + \alpha$ are supposed to lie in $(-d/2, d/2)$

2.2.2 Why paramultipliers enable one to better understand the structure of multiplier spaces

The heavy notations that we have had to use in the statement of the previous theorem might have frightened the reader. However, we would like to show that the introduction of paramultiplier spaces gives very good insights into the structure of muliplier spaces.

First remark that Theorem A can be rephrased as (with some restrictions on s and α)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha}) &= \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\cap\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\cap\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\\ &= \begin{cases}\text{if } \alpha<0 & \Lambda^{-\alpha}BMO^{\max(s,-s-\alpha)}\\ \text{if } \alpha=0 & L^\infty\cap\Lambda^{-\alpha}BMO^{\max(s,-s-\alpha)}\\ \text{if } \alpha>0 & \{0\}\end{cases}\end{aligned}$$

Let us see how the above equality permits to explain some properties of multiplier spaces. We will focus on two of them

Multipliers of positive order

If $s<t$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)=\{0\}$. This fact is very intuitive : one cannot gain regularity by multiplication by a non-zero function ; see Proposition 2.3.5 for a formal proof.

How does Theorem A enable us to better understand the reason why 0 is the only multiplier of positive order ?
We observe that the two spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ and $\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ of the paraproduct decomposition do not reduce to $\{0\}$ for $\alpha>0$; on the contrary, we have $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})=\{0\}$, or more precisely $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ cannot be defined then, see Remark 2.1.1. As a conclusion, it is this one term, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$, which is responsible for the non existence of non zero multipliers for $\alpha>0$.

Ordering of the multiplier spaces

With the usual restrictions on s and α, let us fix $\alpha<0$ and consider the spaces

$$E_s=\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\ .$$

If s increases from its minimal value,

- the sequence (E_s) is increasing for $s\le-\alpha/2$ ie $E_s\subset E_t$ if $s\le t\le-\alpha/2$,
- the sequence reaches its maximum for $s=-\alpha/2$ ie $\forall s\,,\ E_s\subset E_{-\alpha/2}$,
- and the sequence is decreasing for $s\ge-\alpha/2$ ie $E_t\subset E_s$ if $-\alpha/2\le s\le t$.

The proof of these three points is a simple consequence of a duality argument, see Proposition 2.3.4 below.

More than formally proving these points, we would like now to show what in the structure of multiplier spaces makes them happen.
With $\alpha<0$ fixed, we keep the notation E_s defined above, and denote furthermore

$$\begin{aligned}F_s&=\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\\ G_s&=\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})\ .\end{aligned}$$

Since $\alpha<0$, we have

$$E_s=F_s\cap G_s\ .$$

But the sequence F_s is decreasing, whereas the sequence G_s is increasing [indeed, we have the formulas $F_s=\Lambda^{-\alpha}BMO^s$ and $G_s=\Lambda^{-\alpha}BMO^{-s-\alpha}$ given in Theorem A, and the sequence BMO^s is decreasing, see Proposition 2.1.2].
Furthermore, $F_s=G_s$ for $s=-\alpha/2$. Thus, E_s is the intersection of two sequences, one increasing, the other decreasing, and both are equal for $s=-\alpha/2$. This explains all the observations made about the sequence (E_s) above.

2.2.3 An open question

There is an obvious gap in the above theorem : we have not been able to describe precisely the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s})$, for $s > 0$ different to $1/2$ and 1. But the examples provided by the other multiplier spaces make the following equality very likely

$$\text{if } s \in]0, d/2[\quad \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}) = \Lambda^{2s} BMO^s \ . \tag{2.2.1}$$

The proof that this equality holds in the cases $s = 1/2$ and $s = 1$, due to Maz'ya and Verbitsky [14] relies on tools of potential theory quite different from the techniques used in the present chapter.

2.3 Proof of the main theorem

We shall in the next subsection prove a proposition which describes, for any s and α, the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. This is the main step in the proof of Theorem A. In the three following subsections, we describe the spaces $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, $\tilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ and $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, and this completes the proof of Theorem A. In the sequel of the present part, we present alternative proofs of some parts of the theorem.

Gala and Lemarié [8] have obtained independently from us a result close to ours : they focused on multipliers and considered therefore only the case $\alpha \leq 0$, i.e. the case when the pointwise multiplication operator M_f maps a given Sobolev space in a Sobolev space of lower regularity. Their method, which is based on duality, is completely different from ours.

2.3.1 Study of the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$

In this section we intend to study the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, which have already been defined in Section 2.1.2.
We shall relax here this definition, by allowing s and α to be any real numbers. This will permit us to state a more general result without any supplementary effort.
So, if s and α belong to $\mathbb{R}$, we set

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty} \, , \, \|\Pi(f, \phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C \|\phi\|_{\dot{H}^s} \text{ for any } \phi \in \mathcal{S}_\infty \} \ ,$$

see Chapter 6 for the definition of $\mathcal{S}_\infty$. This definition makes sense because of the density of $\mathcal{S}_\infty$ in $\dot{H}^s$.

We have already met the BMO^s spaces of Youssfi in Section 2.1.2, for $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. They can also be defined for any real value of s, see [20] [21] :

$$BMO^s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) \, .$$

Allowing s to belong to $\mathbb{R}$ yields new properties for the BMO^s spaces, which essentially generalise some of the results already given in Proposition 2.1.2.

Proposition 2.3.1 *Let $s, t \in \mathbb{R}$. Then*
(i) If $s > t$, $BMO^s \hookrightarrow BMO^t$.
(ii) If $s > \dfrac{d}{2}$, $BMO^s = \{0\}$.
(iii) If $s < 0$, $BMO^s = \dot{B}^0_{\infty,\infty}$.

PROOF : (i) and (iii) can be proved as indicated in Proposition 2.1.2. (ii) is Corollary 1 of [21]. ■

We now want to consider the case $\alpha \neq 0$, and will first prove that the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ are decreasing (for the inclusion) when s increases.

Lemma 2.3.1 *Let $\alpha, s, t \in \mathbb{R}$ with $s > t$. Then*

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^t, \dot{H}^{t+\alpha}) \ .$$

PROOF : Let $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ and $\phi, \psi \in \mathcal{S}$; we intend to prove that

$$| < \Pi(f, \psi), \phi > | = \left| < \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f S_j \psi \ , \ \phi > \right| \leq C \|\psi\|_{\dot{H}^t} \|\phi\|_{\dot{H}^{-\alpha-t}} \ . \tag{2.3.1}$$

We observe first that

$$\Pi(f, \psi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi(f, \Delta_k \psi) \ . \tag{2.3.2}$$

Because of the spectral localisation of the Littlewood-Paley operators, we have for some $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\langle \Pi(f, \psi), \phi \rangle| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \, \Pi(f, \Delta_k \psi) \, , \, (Id - S_{k-N}) \phi \rangle \right| \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\Delta_k \psi\|_{\dot{H}^s} \|(Id - S_{k-N}) \phi\|_{\dot{H}^{-s-\alpha}} \ , \end{aligned}$$

where we have used that $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. Schwarz' inequality enables us to conclude :

$$\begin{aligned} |\langle \Pi(f, \psi), \phi \rangle| &\leq C \left(\sum_k 4^{k(t-s)} \|\Delta_k \psi\|^2_{\dot{H}^s} \right)^{1/2} \left(\sum_k 4^{k(s-t)} \|(Id - S_{k-N}) \phi\|^2_{\dot{H}^{-s-\alpha}} \right)^{1/2} \\ &\leq C \|\psi\|_{\dot{H}^t} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} 4^{\ell(-s-\alpha)} \|\Delta_\ell \phi\|_2^2 \sum_{\ell \geq k-N-1} 4^{k(s-t)} \right)^{1/2} \\ &\leq C \|\psi\|_{\dot{H}^t} \|\phi\|_{\dot{H}^{-\alpha-t}} \ . \end{aligned}$$

■

We are now in a position to prove a technical lemma, analogous to Proposition 3 of [21]. We will show that if a function f belongs to $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, then one has as expected

$$\sum_j 4^{j(s+\alpha)} \|\Delta_j f S_j \phi\|_2^2 \leq C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ .$$

More generally, we will prove that this property still holds if one replaces Δ_j by $R_j = h(2^{-j} D)$, with h smooth and supported in an annulus.
This lemma will then enable us to describe all the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, using only the BMO^s spaces.

Lemma 2.3.2 *Let $h \in \mathcal{D}$ be such that* $\operatorname{Supp} h \subset \{\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma\}$ *with $\gamma > 1$. Define for all $j \in \mathbb{Z}$*

$$R_j = h(2^{-j}D) \ .$$

Consider also $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, with s and α in $\mathbb{R}$. Then there exists a constant C such that for any $\phi \in \mathcal{S}_\infty$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha)} \|R_j f S_j \phi\|_2^2 \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}^2 \ .$$

PROOF : **1.** Take f in $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ and let $N \geq 0$ be such that

$$R_j = R_j\left(\sum_{\nu=-N}^{N} \Delta_{j+\nu}\right) \quad \text{and} \quad R_j\left(\sum_{\nu=-N}^{N} \Delta_{j+\nu} f S_{j+\nu}\phi\right) = R_j\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta_{j+\nu} f S_{j+\nu}\phi\right) \ ,$$

for any $\phi \in \mathcal{S}_\infty$. Choosing N which fulfills the two above conditions is possible, due to the spectral localisation of the operators Δ_j, S_j and R_j.
We define then

$$\begin{cases} X_j(\phi) = R_j f S_j \phi \\ Y_j(\phi) = \displaystyle\sum_{\nu=-N}^{N} R_j(\Delta_{j+\nu} f S_{j+\nu}\phi) = R_j \Pi(f,\phi) \ . \end{cases}$$

Still using the spectral localisation of the R_j on the one hand, and the belonging of $\Pi(f,\cdot)$ to $\mathcal{L}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ on the other hand, we obtain

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha)} \|Y_j(\phi)\|_2^2 \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}^2 \ ,$$

and consequently we just have to show that

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha)} \|X_j(\phi) - Y_j(\phi)\|_2^2 \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}^2 \ .$$

Finally, we can write $Y_j(\phi) - X_j(\phi) = A_j(\phi) + B_j(\phi)$, with

$$\begin{cases} A_j(\phi) = \displaystyle\sum_{\nu=-N}^{N} [R_j(\Delta_{j+\nu} f S_{j+\nu}\phi) - R_j(\Delta_{j+\nu} f) S_{j+\nu}\phi] \\ B_j(\phi) = \displaystyle\sum_{\nu=-N}^{N} R_j(\Delta_{j+\nu} f)\,[S_{j+\nu}\phi - S_j\phi] \ . \end{cases}$$

2. The term B_j is the easier to treat : since $f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ and $S_{j+\nu}\phi - S_j\phi = \displaystyle\sum_{k=j+1}^{j+\nu} \Delta_k\phi$ (for $\nu > 0$, with a symmetrical formula in the case $\nu < 0$), we have, for a constant C proportional to $\|f\|^2_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}}$ and a new $N \in \mathbb{N}$

$$\|B_j(\phi)\|_2^2 \leq C 4^{-j\alpha} \sum_{\nu=-N}^{N} \|\Delta_{j+\nu}\phi\|_2^2 \ ,$$

which implies

$$\sum_j 4^{j(s+\alpha)}\|B_j\phi\|_2^2 \le C\|\phi\|_{\dot H^s}^2 \ .$$

3. Writing

$$\phi_j = S_j\phi \ , \ f_j = \Delta_j f \ , \ H_j = 2^{dj}\widehat{h}(2^j\cdot)$$

we get that

$$\begin{aligned} A_j(\phi)(x) &= \sum_{\nu=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^d} H_j(x-y)(\phi_{j+\nu}(y)-\phi_{j+\nu}(x))f_{j+\nu}(y)dy \\ &= \sum_{\nu=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^d} H_j(x-y)\left(\phi_{j+\nu}(y)-\phi_{j+\nu}(x)+\sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)\partial_i\phi_{j+\nu}(y)\right)f_{j+\nu}(y)dy \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^d} H_j(x-y)\sum_{i=1}^{d}(y_i-x_i)\partial_i\phi_{j+\nu}(y)f_{j+\nu}(y)dy \\ &\overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=-N}^{N} I_{j,\nu}(x)+II_{j,\nu}(x) \ . \end{aligned}$$

4. First, to estimate I_j, we will consider only the case $\nu = 0$; the other cases are identical. Besides, we will only treat the case where $s < 2$; the cases where s is larger than 2 can be handled in the same way, but the Taylor expansion we need to use has then to be developped up to terms including derivatives of larger order. If $s < 2$, applying Taylor's formula of order 2, we see that

$$\begin{aligned} |I_j(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 H_j(x-y)\sum_{i,k=1}^{d}(x_i-y_i)(x_k-y_k)(1-t)\partial_{ik}\phi_j(y+t(x-y))f_j(y)\,dt\,dy\right| \\ &\le \|f_j\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \left|H_j(z)\sum_{i,k=1}^{d} z_iz_k(1-t)\partial_{ik}\ \phi_j(x+(t-1)z)\right|dt\,dz \ . \end{aligned}$$

Therefore, recalling that $f \in \dot B^\alpha_{\infty,\infty}$, we find

$$\begin{aligned} \|I_j\|_2 &\le C2^{-j\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \left|H_j(z)\sum_{i,k=1}^{d} z_iz_k\right| \|\partial_{ik}\ \phi_j(x+(t-1)z)\|_{L^2_x}dt\,dz \\ &\le C2^{j(-\alpha-2)}\|\partial^2\phi_j\|_2 \end{aligned}$$

since $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|H_j(z)z_iz_k|\,dz = C2^{-2j}$. Now we can sum over j :

$$\begin{aligned} \sum_j 4^{j(s+\alpha)}\|I_j\|_2^2 &\le C\sum_j 4^{j(s-2)}\|\partial^2\phi_j\|_2^2 \le C\sum_{j\,,\,k\le j-2} 4^{j(s-2)}4^{2k}\|\Delta_k\phi\|_2^2 \\ &= C\sum_k 4^{2k}\|\Delta_k\phi\|_2^2\sum_{j\ge k+2}4^{j(s-2)} = C\sum_k 4^{ks}\|\Delta_k\phi\|_2^2 \le C\|\phi\|_{\dot H^s}^2 \ . \end{aligned}$$

5. We are left with $\sum_\nu II_{j,\nu}$. It may be written as

$$\sum_\nu II_{j,\nu}(x) = 2^{-j} \sum_{\nu=-N}^{N} \sum_{i=1}^{d} \widetilde{\Delta}_j^i (S_{j+\nu} \partial_i \phi \Delta_{j+\nu} f) \ ,$$

where $\widetilde{\Delta}_j^i$ is the convolution operator whose kernel reads $x \mapsto 2^j x_i H_j(x)$ and whose symbol is of the form $F_i(2^{-j}\xi)$, with $F_i \in \mathcal{S}$ supported in an annulus. In the following, we shall drop the index i, in order to keep notations as light as possible.
Summing over j, and keeping in mind that, according to Lemma 2.3.1, $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^{s-1}, \dot{H}^{s+\alpha-1})$, we get

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha)} \left\| \sum_{\nu=-N}^{N} II_{j,\nu} \right\|_2^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha-1)} \left\| \widetilde{\Delta}_j \left(\sum_{\nu=-N}^{N} \Delta_{j+\nu} f S_{j+\nu} \partial\phi \right) \right\|_2^2 \\
&= \sum_j 4^{j(s+\alpha-1)} \|\widetilde{\Delta}_j \Pi(f, \partial\phi)\|_2^2 \leq C \|\Pi(f, \partial\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha-1}}^2 \\
&\leq C \|f\|_{\mathbf{\Pi}(\dot{H}^{s-1}, \dot{H}^{s+\alpha-1})}^2 \|\partial\phi\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 \leq C \|\phi\|_{\dot{H}^s}^2
\end{aligned}$$

This ends the proof of the lemma. ■

The following theorem is a straightforward consequence of the previous lemma. It shows that all the $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ spaces can be deduced from the BMO^s spaces.

Theorem 2.3.1 *Let s and α in $\mathbb{R}$. We denote by Λ the Calderón operator, $\Lambda = |D|$. Then*

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^s \ .$$

PROOF : Recall that $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) = BMO^s$. Hence, it suffices to prove that

$$\Lambda^\alpha \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{t-\alpha})$$

for any s, t and α in $\mathbb{R}$. Let $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. Let

$$R_j = \Delta_j \Lambda^\alpha 2^{-j\alpha} \ ;$$

the symbol of this operator reads $\psi(2^{-j}\xi) 2^{-j\alpha} |\xi|^\alpha$. We can apply Lemma 2.3.2 to get

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(t-\alpha)} \|\Delta_j \Lambda^\alpha f S_j \phi\|_2^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{jt} \|R_j f S_j \phi\|_2^2 \\
&\leq C \|\phi\|_{\dot{H}^s}^2 \ ,
\end{aligned}$$

which implies the theorem. ■

2.3.2 Study of the spaces $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$

From now on, we let s and $s+\alpha$ belong to $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.
The study of the spaces $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ reduces to the study of the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ since the operator $R(f, \cdot)$ is almost the transpose operator of $\Pi(f, \cdot)$. This observation is formulated in the following proposition.

Proposition 2.3.2 *Let s and t belong to $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. One has then*

$$\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) = \mathbf{\Pi}(\dot{H}^{-t}, \dot{H}^{-s}) \ .$$

In other words,

$$\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) = \Lambda^{s-t} BMO^{-t} \ .$$

PROOF : Let $f \in \dot{B}^{t-s}_{\infty,\infty}$. By definition,

$$f \in \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \iff \langle R(f,\phi), \psi\rangle \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^{-t}} \text{ for any } \phi \text{ and } \psi \text{ in } \mathcal{S} \ . \quad (2.3.3)$$

Let us denote $\widetilde{\Delta}_j = \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}$. Due to the spectral localisation of the Littlewood-Paley operators, there exists a $N \geq 0$ such that

$$\langle R(f,\phi), \psi\rangle = \langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \widetilde{\Delta}_j \phi \, , \, \psi\rangle = \sum_j \langle \Delta_j f \widetilde{\Delta}_j \phi \, , \, S_{j+N}\psi\rangle = \sum_j \langle \Delta_j f S_{j+N}\psi \, , \, \widetilde{\Delta}_j \phi\rangle \ .$$

From now on, we denote by $A(\phi,\psi)$ any bilinear operator such that

$$|A(\phi,\psi)| \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^{-t}} \ .$$

It is easy to see that, for any integers M and N,

$$\left| \sum_j \langle \Delta_j f (S_{j+N} - S_{j-M})\psi \, , \, \widetilde{\Delta}_j \phi\rangle \right| \leq C\|f\|_{\dot{B}^{t-s}_{\infty,\infty}}\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^{-t}} \ ,$$

therefore, if M is an integer,

$$\langle R(f,\phi), \psi\rangle = \sum_j \langle \Delta_j f S_{j-M}\psi \, , \, \widetilde{\Delta}_j \phi\rangle + A(\phi,\psi) \ .$$

Using once again the spectral localisation of the Littlewood-Paley operators, we see that for M large enough, $\langle \Delta_j f S_{j-M}\psi \, , \, \widetilde{\Delta}_j \phi\rangle = \langle \Delta_j f S_{j-M}\psi \, , \, \phi\rangle$, which implies

$$\langle R(f,\phi), \psi\rangle = \langle \sum_j \Delta_j f S_{j-M}\psi \, , \, \phi\rangle + A(\phi,\psi) \ .$$

We observe now that, still because of the spectral localisation of the Δ_j and S_j,

$$\left| \langle \sum_j \Delta_j f (S_j - S_{j-M})\psi \, , \, \phi\rangle \right| \leq C\|f\|_{\dot{B}^{t-s}_{\infty,\infty}}\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^{-t}} \ ,$$

and this implies

$$\langle R(f,\phi), \psi\rangle = \langle \sum_j \Delta_j f S_j \psi \, , \, \phi\rangle + A(\phi,\psi) = \langle \Pi(f,\psi), \phi\rangle + A(\phi,\psi) \ .$$

This proves the first assertion of the proposition. The second assertion is a consequence of Theorem 2.3.1. ■

2.3.3 Study of the spaces $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$

These spaces are easily described. Recall that they are defined only for $\alpha \leq 0$, and that they are equal to L^∞ for $\alpha = 0$.

Proposition 2.3.3 *Let $s \in \mathbb{R}$ and $\alpha < 0$. Then*

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} \ .$$

PROOF : Consider $f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$, and $\phi \in \mathcal{S}$.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j(s+\alpha)} \|S_j f \Delta_j \phi\|_2^2 \leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{j\alpha} \|S_j f\|_\infty^2 4^{js} \|\Delta_j \phi\|_2^2 \leq C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ ,$$

which proves the proposition. ■

2.3.4 Study of the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$

We shall study in this paragraph functions f such that the operator M_f maps a given Sobolev space into another given Sobolev space. This is the last step in the proof of Theorem A.

Proposition 2.3.4 (Elementary properties of multipliers) *Let $r \geq s \geq t$ be real numbers in $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, and α be a non-positive real number. One has then*

(i) $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s) = \mathbf{M}(\dot{H}^{-s}, \dot{H}^{-r})$.

(ii) If furthermore $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)$ and $g \in \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$, then

$$h = fg \in \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^t) \ .$$

(iii) If $r \geq s \geq -\alpha/2 \geq 0$,

$$\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{r+\alpha}) \hookrightarrow \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \ .$$

If $r \leq s \leq -\alpha/2$,

$$\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{r+\alpha}) \hookrightarrow \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \ .$$

(iv) If $s + \alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$,

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \hookrightarrow \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} \ .$$

(v) If $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)$,

$$\|\chi * f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)} \leq C \|\chi\|_1 \|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)} \ .$$

PROOF :
(i) follows by duality

(ii) is obvious.

(*iii*) To prove the first embedding, take $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{r+\alpha})$. By (*i*), we know that f belongs also to $\mathbf{M}(\dot{H}^{-r-\alpha}, \dot{H}^{-r})$. In other words, $M_f \in \mathcal{L}(\dot{H}^r, \dot{H}^{r+\alpha}) \cap \mathcal{L}(\dot{H}^{-r-\alpha}, \dot{H}^{-r})$. Since $r \geq s \geq -\alpha/2 \geq 0$, we have

$$-r-\alpha \leq s \leq r \qquad \text{and} \qquad -r \leq s+\alpha \leq r+\alpha \ ,$$

so by complex interpolation, $M_f \in \mathcal{L}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$.
The second embedding is the dual of the first.

(*iv*) To prove this point, observe that if $\phi \in \mathcal{S}$, it may be written as

$$\phi = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n h_n \text{ with } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{\dot{H}^s} \|h_n\|_{\dot{H}^{-s-\alpha}} < \infty \ .$$

(To obtain such a decomposition, it suffices to consider a smooth non-homogeneous partition of unity in dyadic annuli $1 = \sum_{n\geq 0} \lambda_n$, to write then $\phi = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \widetilde{\lambda_n}\phi$, where $\widetilde{\lambda_n} \in \mathcal{S}$ and $\lambda_n\widetilde{\lambda_n} = \lambda_n$, and eventually to set $g_n = \lambda_n$, $h_n = \widetilde{\lambda_n}\phi$.)
Now let $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, and ϕ be the convolution kernel associated with the Littlewood-Paley decomposition, which we decompose as a sum as above. Then if $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |\Delta_j f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} 2^{jd} f(x-y)\phi(2^j y)\, dy \right| \leq 2^{jd} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \langle f(x-\cdot)\, ,\, g_n(2^j\cdot) h_n(2^j\cdot)\rangle \right| \\ &\leq 2^{jd} \|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})} \sum_n \|g_n(2^j\cdot)\|_{\dot{H}^s} \|h_n(2^j\cdot)\|_{\dot{H}^{-s-\alpha}} \leq C 2^{-j\alpha} \ . \end{aligned}$$

(*v*) Let $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)$, and $\chi, \phi, \psi \in \mathcal{S}$. We want to show that

$$|\langle \chi * f, \phi\psi\rangle| \leq C \|\phi\|_{\dot{H}^r} \|\psi\|_{\dot{H}^{-s}} \ .$$

We notice that

$$\langle \chi * f, \phi\psi\rangle = -\langle f * (\phi\psi), \chi(-\cdot)\rangle \ ,$$

and, by definition of $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)$, that

$$\|f * (\phi\psi)\|_\infty \leq \|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)} \|\phi\|_{\dot{H}^r} \|\psi\|_{\dot{H}^{-s}} \ .$$

Therefore,

$$|\langle \chi * f, \phi\psi\rangle| \leq \|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^s)} \|\phi\|_{\dot{H}^r} \|\psi\|_{\dot{H}^{-s}} \|\chi\|_1 \ .$$

This proves (*v*) and the proposition. ■

We would like now to describe the multiplier spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ with the help of the results that we have proved about the paramultiplier spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, and $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. Matters would be easy if we could affirm

$$\text{“}M_f \in \mathcal{L}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi(f,\cdot),\ R(f,\cdot) \text{ and } \widetilde{\Pi}(f,\cdot) \in \mathcal{L}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})\text{”} \ .$$

Unfortunately, we do not know whether this statement is always true or not. The $\Leftarrow$ part is obviously true, which gives the embedding

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \cap \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \cap \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \subset \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \ , \tag{2.3.4}$$

but the converse embedding is not clear : there might be compensations between the operators $\Pi(f,\cdot)$, $R(f,\cdot)$ and $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ which make their sum bounded while each of them is not bounded.
The following lemma, which we borrow from Gala and Lemarié [8], will enable us to prove the converse embedding in (2.3.4) in most cases.

Lemma 2.3.3 ([8]) *Take $s \in (0, d/2)$, and $t \in (-s, s)$. Then*

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \cap \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \cap \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \ .$$

PROOF : Take $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. Since by Proposition 2.3.4 $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^t) \hookrightarrow \dot{B}^{t-s}_{\infty,\infty}$, we have $f \in \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. On the other hand, if $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\|\Pi(f,\phi)\|^2_{\dot{H}^{-s}} &\leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{-js} \|\Delta_j f S_j \phi\|_2^2 \leq C \sum_j 4^{-j(s+t)} \|\Delta_j f S_j \phi\|^2_{\dot{H}^t} \\ &\leq C \sum_j 4^{-j(s+t)} \|S_j \phi\|^2_{\dot{H}^s} \ ,\end{aligned}$$

since, by Proposition 2.3.4 point (v), $\|\Delta_j f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} \leq C\|f\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)}$. It is now easy to end the computation.

$$\|\Pi(f,\phi)\|^2_{\dot{H}^{-s}} \leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{-j(s+t)} \sum_{k\leq j-2} 4^{ks} \|\Delta_k \phi\|^2_{\dot{H}^s} \leq C\|\phi\|^2_{\dot{H}^{-t}} \ ,$$

because $s + t > 0$. Hence $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^{-t}, \dot{H}^{-s})$, and Proposition 2.3.2 gives that $f \in \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. We can now conclude :

$$\Pi(f,\cdot) = M_f - R(f,\cdot) - \tilde{\Pi}(f,\cdot)$$

belongs to $\mathcal{L}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$, and therefore $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. ■

And as a consequence of this lemma and of other results proved above, we can describe the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$ in most cases.

Proposition 2.3.5 *Let α and s be two real numbers such that s and $s + \alpha$ belong to $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. One has then*

(i) $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \{0\}$ *if* $\alpha > 0$.

(ii) $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) = BMO^{|s|} \cap L^\infty$.

(iii) $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$ *if* $\alpha < 0$ *and* $2s + \alpha \neq 0$.

PROOF : (i) We shall prove this assertion by contradiction. Take $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, and $f \neq 0$ in $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$.
By point (v) of Proposition 2.3.4, if one convolves f with a function of $\mathcal{D}$, one obtains a $\mathcal{C}^\infty$ function, different of 0, and belonging to $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. So we might as well suppose that f belongs to $\mathcal{C}^\infty$.
Furthermore, $\mathcal{D}$ is included in $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^s)$, thus, by point (ii) of Proposition 2.3.4, the pointwise product of f with a function of $\mathcal{D}$ still belongs to $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^s)$. For this reason, we can assume that f belongs to $\mathcal{D}$.
Finally, by translation invariance, we can suppose that $f(0) = 1$.
Now take ϕ in $\mathcal{C}^\infty$ such that

$$\phi(\xi) = |\xi|^{-s-d/2-\epsilon} \ \text{ if } |\xi| > 1 \ ,$$

and consider $\lambda = \mathcal{F}^{-1}\phi$, which belongs obviously to $\dot{H}^s$. The pointwise product $f\lambda$ is well defined, and its Fourier transform reads $\frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{f} * \phi$. Since $\widehat{f}$ belongs to $\mathcal{S}$ and verifies $\int \widehat{f} = (2\pi)^d$, the following equivalent holds, for $\xi \to \infty$,

$$\mathcal{F}(f\lambda)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}(\widehat{f} * \phi)(\xi) \sim |\xi|^{-s-d/2-\epsilon} .$$

If we choose $\epsilon < \alpha$, this proves that $f\lambda$ does not belong to $\dot{H}^{s+\alpha}$, yielding a contradiction.

(ii) This assertion is proved in [20]. Let us briefly recall the proof : suppose first $|s| < 1$ and consider the multiplication operator M_f. It is a singular integral operator (with a zero kernel), hence we can apply Theorem 2.6.2 given in the Annex. M_f is weakly bounded if and only if $f \in L^\infty$, and besides $M_f(1) = f$: this yields the result. If $|s| > 1$ the criterion for the boundedness of singular integral operators is more complicated ; however, since M_f has a zero kernel, matters become easier, see [20].

(iii) Suppose first $2s + \alpha > 0$. We know that

$$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \cap \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \cap \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \hookrightarrow \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) ,$$

and we have proved in Theorems 2.3.1, Proposition 2.3.2 and Proposition 2.3.3 that, for $\alpha < 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) &= \Lambda^{-\alpha} BMO^s \\ \mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) &= \Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha} \\ \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) &= \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} . \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

We now just have to remember that $BMO^\alpha \hookrightarrow BMO^\beta$ for $\alpha > \beta$ to prove that

$$\Lambda^{-\alpha} BMO^s \hookrightarrow \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) ;$$

the converse embedding is provided by Lemma 2.3.3.

The case $2s + \alpha < 0$ is nothing but the dual of the case $2s + \alpha > 0$. ■

As appears in the statement of the preceding theorem, there were some cases where we have not satisfactorily described the space $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, namely if $2s + \alpha = 0$.

For certain values of s, this problem has been settled by Maz'ya and Verbitsky, using methods of potential theory.

Theorem 2.3.2 (Maz'ya, Verbitsky [14] [15]) *If $s = 1/2$ or 1,*

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}) = \Lambda^{2s} BMO^s .$$

Finally, we state another result of Maz'ya and Verbitsky [13] (Lemma 3.1.), which we use in our treatment of the Navier-Stokes equations in Chapter 3.

Theorem 2.3.3 (Maz'ya, Verbitsky [13]) *The Riesz transforms $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ are bounded on BMO^s for $s \in (0, d/2)$.*

2.3.5 Another approach : link with singular integrals and pseudodifferential operators

So far, we have studied multiplier and paramultiplier spaces using very basic tools ; this elementary approach has enabled us to describe all the relevant spaces, and in particular to derive all the results which we need for the application to the Navier-Stokes equations in Chapter 3.
However, it is interesting to gain a wider prospect by connecting these spaces to the theory of pseudo-differential and of singular integral operators. We will first describe this connection, and then show how some of the results about paramultiplier spaces can be obtained with the help of the singular integral operators theory.

The problem we have been investigating in this part was to find conditions on f so that the operators $R(f,\cdot)$, $\Pi(f,\cdot)$, $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$, M_f be bounded from a Sobolev space $\dot{H}^s$ in $\dot{H}^{s+\alpha}$. The operators M_f are simple pointwise multiplication operators ; the case of the operators $\widetilde{\Pi}(f,\cdot)$ has been settled very quickly ; and we have seen that $\Pi(f,\cdot)$ is almost the transpose of $R(f,\cdot)$. So let us concentrate on this last operator.
We would like to study the boundedness of this operator from $\dot{H}^s$ in $\dot{H}^{s+\alpha}$; but most of the results in the literature concern the boundedness of operators mapping some Sobolev space into itself. We therefore introduce

$$T = R(f,\cdot)\Lambda^{\alpha}$$

and the problem reduces to studying the boundedness of T on $\dot{H}^{s+\alpha}$. If we suppose that $f \in \dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$, one can check easily that T is a pseudo-differential operator whose symbol σ verifies

$$|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}|\xi|^{|\beta|-|\alpha|} .$$

Recall that σ would belong to the exotic symbol class $S^0_{1,1}$ (see [18]) if the right-hand side of the above inequality was replaced by $C(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$; so T belongs to a kind of homogeneous version of $S^0_{1,1}$. These estimates are not enough to grant the $\dot{H}^s$ continuity, but they imply that T is a singular integral operator (see section 2.6.2 in the annex of the present chapter for a definition of singular integral operators, and the book of Meyer [16], page 294, for a proof of this statement).
We can therefore apply theorems similar to the $T1$ theorem of David and Journé, and deduce a criterion of boundedness of T over $\dot{H}^{s+\alpha}$. This program is implemented in the proof of the next theorem.

The following theorem is actually a particular case of Theorem A, but we present another proof, which makes use of the theory of singular integral operators. Treating the general case (ie, for any s and α) using this method seems to be difficult ; indeed, the hypotheses of the $T1$ theorem, which we will use, would then have to be supplemented with commutator conditions (see [20]) which are not very easy to manipulate.

Theorem 2.3.4 *Let $s,\alpha \in \mathbb{R}$ such that $-1 < s+\alpha < 1$. Then*

$$\mathbf{R}(\dot{H}^s, H^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha}BMO^{-s-\alpha} .$$

PROOF : **1.** f is in $\mathbf{R}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha})$ if and only if

$$\left(R(f,\cdot) : \phi \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \widetilde{\Delta_j}\phi \right) \in \mathcal{L}(\dot{H}^s,\dot{H}^{s+\alpha}) ,$$

where $\widetilde{\Delta_j} = \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}$. The above statement is equivalent to

$$\left(T = R(f,\cdot)\Lambda^\alpha \,:\, \phi \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \widetilde{\Delta}_j \Lambda^\alpha \phi \right) \in \mathcal{L}(\dot{H}^{s+\alpha}, \dot{H}^{s+\alpha}) \ .$$

2. The crucial observation is that T is a singular integral operator (some basic facts of the theory of singular integral operators are recalled in the Annex, in Section 2.6.2). Indeed, the kernel K of T (in the sense that $(T\phi)(x) = \int K(x,y)\phi(y)dy$) reads

$$K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(d+\alpha)} \Delta_j f(x) \lambda(2^j(x-y)) \ ,$$

where $\lambda \in \mathcal{S}$ is such that the kernel of $\widetilde{\Delta}_j \Lambda^\alpha$ reads $2^{j(d+\alpha)}\lambda(2^j\cdot)$. Since $f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}$, we have that $\|\partial^\beta \Delta_j f\|_\infty \leq C 2^{j(-\alpha+|\beta|)}$ for any multiindex β. Furthermore, for any $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathcal{S}$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jm} |h(2^j(x-y))| \leq C|x-y|^{-m} \ .$$

Hence we get the estimate we were looking for,

$$|\partial^\beta K(x,y)| \leq C|x-y|^{-d-|\beta|} \ .$$

3. So as to be able to apply the classical theorems on the continuity of singular integral operators, we have to show that T has the weak boundedness property.
Let $\mathcal{B}$ be a bounded set of $\mathcal{D}$, let $t \in (0,\infty)$, $a \in \mathbb{R}^d$, and $F, G \in \mathcal{B}$. We want to show that the following quantity is bounded independently of t, a, F and G :

$$t^{-n}\langle T\left[F\left(\frac{\cdot - a}{t}\right)\right] , G\left(\frac{\cdot - a}{t}\right)\rangle = t^{-n}\langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f 2^{j\alpha} \widetilde{\widetilde{\Delta}}_j \left[F\left(\frac{\cdot - a}{t}\right)\right] , G\left(\frac{\cdot - a}{t}\right)\rangle \ ,$$

where $\widetilde{\widetilde{\Delta}}_j$ is the convolution operator of kernel $2^{dj}\lambda(2^j\cdot)$.
We observe first that, by translation invariance, we might as well take $a = 0$. Furthermore, we shall suppose, to simplify the notations, that $\log_2 t = A \in \mathbb{N}$. After a change of variables, we are led to estimating

$$\langle \sum_j 2^{j\alpha} (\Delta_j f)(t\cdot) \widetilde{\widetilde{\Delta}}_{j+A} F \ , \ G\rangle \ .$$

But the functions $2^{j\alpha}\Delta_j f$ are bounded in L^∞, and G is bounded in L^1. Therefore, we only have to show that F is bounded in $\dot{B}^0_{\infty,1}$. This can be deduced from the two following inequalities, valid for any $j \in \mathbb{Z}$, which are simple applications of the Bernstein lemma.

$$\begin{cases} \|\Delta_j F\|_\infty \leq C 2^{-2j} \|\Delta\Delta_j F\|_\infty \leq C 2^{-2j} \|\Delta F\|_\infty \leq C 2^{-2j} \\ \|\Delta_j F\|_\infty \leq 2^{jd} \|\Delta_j F\|_{L^1} \leq C 2^{jd} \|F\|_{L^1} \leq C 2^{jd} \end{cases}$$

4. To complete the proof, we simply have to apply the theorems on the boundedness on Sobolev spaces of weakly bounded singular integral operators. Different cases must be considered, depending on the sign of $s + \alpha$.
Suppose first $s + \alpha = 0$. To determine under which conditions $T \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$, we can use the T1 theorem of David and Journé (this theorem is recalled in the Annex : Theorem 2.6.1). The conditions to be fulfilled are :

- T is weakly bounded ; this has already been verified.
- $T1 \in BMO$; this is always the case, since obviously $T1 = 0$.
- $T^*1 \in BMO$. The transpose operator of T is :

$$T^* \, : \, \phi \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{\Delta}_j \Lambda^\alpha (\Delta_j f \phi) \; .$$

  Hence $T^*1 = \Lambda^\alpha \sum_j \widetilde{\Delta}_j \Delta_j f = \Lambda^\alpha f$, which belongs to BMO if and only if $f \in \Lambda^{-\alpha} BMO$.

5. Assume now $s + \alpha > 0$. We now apply the theorem of Meyer (which is recalled in the Annex : Theorem 2.6.2) : the continuity of T on $\dot{H}^{s+\alpha}$ is equivalent to the fact that $T1 \in BMO^{s+\alpha}$. Since $T1 = 0$, the theorem is proved in that case.

6. Finally, suppose $s+\alpha < 0$. We remark that the boundedness of T on $\dot{H}^{s+\alpha}$ is equivalent to the boundedness of T^* on $\dot{H}^{-s-\alpha}$. But the kernel of T^* is $K(y,x)$, therefore T^* is also a weakly bounded singular integral operator.
Recall that $T^*1 = f$; we apply the theorem of Meyer (Theorem 2.6.2) to T^*, and the condition $T^*1 \in BMO^{-s-\alpha}$ yields that T^* is continuous on $\dot{H}^{-s-\alpha}$ if and only if $f \in \Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$.
This concludes the proof of the theorem. ■

2.3.6 A proof of $\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, L^2)$ based on the $\mathcal{H}^1$ - BMO duality

We have already proved above that

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) \hookrightarrow \Lambda^s BMO = \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, L^2) \; , \tag{2.3.6}$$

see Lemma 2.3.3 for the embedding of $\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2)$ in $\Lambda^s BMO$, and Theorem 2.3.1 for the equality between $\Lambda^s BMO$ and $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, L^2)$.
We shall give in this section another proof of the embedding

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) \hookrightarrow \Lambda^s BMO \; .$$

If $s > 0$, we denote

$$X_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) \; .$$

Lemma 2.3.4 *Let $s \in [0, d)$. Then*

$$X_s \hookrightarrow \Lambda^s BMO \; .$$

PROOF : **1.** The case $s = 0$ is obvious ; we suppose from now on that $s > 0$.
First, the predual of X_s can be described (see Proposition 2.5.1) : it is the space

$$Y_s = \{h \text{ such that } h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_n \text{ with } \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha_n\|_2 \|\beta_n\|_{\dot{H}^s} < \infty\} \; ,$$

with the natural norm $\|h\|_{Y_s} = \inf_{\sum_n \alpha_n \beta_n = h} \sum_n \|\alpha_n\|_2 \|\beta_n\|_{\dot{H}^s}$.
From now on, we fix $f \in X_s$. If $g \in \mathcal{S}_\infty$, we have

$$|\langle \Lambda^{-s} f, g \rangle| = |\langle f, \Lambda^{-s} g \rangle| \leq \|f\|_{X_s} \|\Lambda^{-s} g\|_{Y_s} \; . \tag{2.3.7}$$

We would like to show that $\Lambda^{-s} f \in BMO$, which is equivalent to

$$|\langle \Lambda^{-s} f, g \rangle| \leq \|g\|_{\mathcal{H}^1} \ .$$

Because of (2.3.7), it actually suffices to prove that Λ^{-s} continuously maps $\mathcal{H}^1$ in Y_s, ie that for any g in $\mathcal{H}^1$,

$$\|\Lambda^{-s} g\|_{Y_s} \leq \|g\|_{\mathcal{H}^1} \ .$$

Any function G in $\mathcal{H}^1$ can be decomposed as a sum of atoms $G = \sum_j \lambda_j m_j$; a function m is said to be an atom if for a certain $r > 0$ it satisfies

$$\begin{aligned} &\int m = 0 \\ &\operatorname{Supp} m \subset B(0,r) \\ &\|m\|_\infty \leq r^{-d} \ . \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

We have then $\|G\|_{\mathcal{H}^1} = \inf \sum_j |\lambda_j|$, where the infimum is taken over all possible decompositions of G as a sum of atoms (see [18]). In the following, we will take m to be one such atom, with $r = 1$, and will try to prove that $\Lambda^{-s} m \in Y_s$.

2. We will first examine $\Lambda^{-s} m$ near $B(0,1)$. Since $s \in (0,d)$, the convolution kernel of Λ^{-s} is, up to a multiplicative constant, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^{d-s}}$, which is integrable near 0. This implies that

$$\|\Lambda^{-s} m\|_\infty \leq C \ .$$

Define $\beta \in \dot{H}^s$, such that $\beta = 1$ on $B(0,2)$, and

$$\alpha = \chi_{B(0,2)} \Lambda^{-s} m \ .$$

We have then

$$\|\chi_{B(0,2)} \Lambda^{-s} m\|_{Y_r} \leq \|\alpha\|_{L^2} \|\beta\|_{\dot{H}^s} \leq C \cdot \tag{2.3.9}$$

3. Now we have to take care of $\Lambda^{-s} m$ outside $B(0,2)$. We observe first that if $x \notin B(0,2)$ and $y \in B(0,1)$, there exists a constant C such that

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{d-s}} - \frac{1}{|x|^{d-s}} \right| \leq \frac{C}{|x|^{d-s+1}} \ .$$

Using this estimate, the zero integral of m and once again the fact that the convolution kernel of Λ^{-s} is $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^{d-s}}$, we get

$$\begin{aligned} |\Lambda^{-s} m(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|^{d-s}} m(y) dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{|x-y|^{d-s}} - \frac{1}{|x|^{d-s}} \right) m(y) dy \right| \\ &\leq C \|m\|_\infty \frac{1}{|x|^{d-s+1}} \leq C \frac{1}{|x|^{d-s+1}} \ , \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

for $|x| \geq 2$. We will now need a kind of space-Littlewood Paley decomposition. Let $\lambda, \widetilde{\lambda} \in \mathcal{C}^\infty$ such that

$$\begin{aligned} &\operatorname{Supp} \lambda \subset \{1 \leq |x| \leq 4\} \\ &\operatorname{Supp} \widetilde{\lambda} \subset \{0.9 \leq |x| \leq 4.1\} \\ &\lambda \widetilde{\lambda} = \lambda \\ &\text{if } \lambda_k \overset{\text{def}}{=} \lambda\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) \text{ then } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k(x) = 1 \text{ for } x \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Using λ and $\widetilde{\lambda}$, we can decompose $\Lambda^{-s}m$ outside $B(0,2)$ into functions whose space support are dyadic annuli,

$$\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k\left(\widetilde{\lambda}_k\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\right)$$

and obtain :

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\|_{Y_s}&\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\|\lambda_k\widetilde{\lambda}_k\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\right\|_{Y_s}\\&\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\lambda_k\|_{\dot{H}^s}\left\|\widetilde{\lambda}_k\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\right\|_{L^2}\ .\end{aligned}\tag{2.3.11}$$

This last term is easily estimated : we have obviously

$$\|\lambda_k\|_{\dot{H}^s}=C2^{k(d/2-s)}$$

and (2.3.10) yields

$$\left\|\widetilde{\lambda}_k\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\right\|_{L^2}\leq C2^{k(s-\frac{d}{2}-1)}\ .$$

Combining the two last estimates with (2.3.11), we see that

$$\|\Lambda^{-s}m\left(1-\chi_{B(0,2)}\right)\|_{Y_s}\leq C$$

and with the help of (2.3.9), we conclude that

$$\|\Lambda^{-s}m\|_{Y_s}\leq C\ .\tag{2.3.12}$$

4. The case of general atoms (ie, with $r\neq 1$) is easily deduced by homogeneity of (2.3.12). So the proof of the lemma is complete. ■

2.4 Comparison of multiplier spaces with more classical functional spaces

In this section, we study the embeddings between multiplier and paramultiplier spaces, and other functional spaces : Lebesgue, Lorentz, Sobolev, Besov, and Morrey spaces. A few facts about Morrey spaces are recalled in the Annex.
We begin with the space $X_0=BMO$, for which the following results are classical (see [2] and [19]) ; we denote in the following proposition $\dot{W}^{\alpha,q}$ for $\Lambda^{-\alpha}L^q$.

Proposition 2.4.1 *The following embeddings hold :*
(i) (Lebesgue spaces) $L^\infty\hookrightarrow BMO$
(ii) (Sobolev spaces) If $p\in(1,\infty)$, $\dot{W}^{d/p,p}\hookrightarrow BMO$
(ii) (Besov spaces) $\dot{B}^0_{\infty,2}\hookrightarrow BMO\hookrightarrow\dot{B}^0_{\infty,\infty}$

We now come to the X_s, with $s>0$.

Proposition 2.4.2 *Let* $s\in(0,\frac{d}{2})$. *The following embeddings hold*
(i) (Lebesgue and Lorentz spaces) $L^{d/s}\hookrightarrow L^{d/s,\infty}\hookrightarrow X_s$
$X_s\hookrightarrow L^2_{\rm loc}$

(ii) (Morrey spaces) If $p \in (2, \frac{d}{s}]$, $M^{p,d/s} \hookrightarrow X_s \hookrightarrow M^{2,d/s}$ *and the last embedding is strict.*
(iii) (Besov spaces) $\dot{B}^{-s+d/p}_{p,\infty} \hookrightarrow X_s$ *provided* $p < \frac{d}{s}$.
$\dot{B}^0_{d/s,2} \hookrightarrow X_s$
$\dot{B}^0_{d/s,\infty}$ *and* X_s *are not comparable.*
$X_s \hookrightarrow \dot{B}^{-s}_{\infty,\infty}$

PROOF : (i) The first embedding follows from the sharp Sobolev embedding $\dot{H}^s \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s},2}$. To prove the second embedding, take a compact set K, and $\phi \in \mathcal{S}$ such that $\phi = 1$ on K. Then if $f \in X_s$, $\phi f \in L^2$, and this yields the result.

(ii) The first embedding is a deeper result ; it can be easily deduced by duality of Lemma 2.6.1 given in the Annex. The second (strict) embedding is proved in [9].

(iii) Let $f \in \dot{B}^{-s+d/p}_{p,\infty}$, with $p < d/s$. Thanks to Theorem A, the first embdeding of (iii) will be proved if we show that $\Pi(f,\cdot) \in \mathcal{L}(\dot{H}^s, L^2)$. Take $\phi \in \dot{H}^s$; by Sobolev embedding, $\dot{H}^{d/p} \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}$, so we have

$$\begin{aligned}
\|\Pi(f,\phi)\|^2_{L^2} &\le C \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j f S_j \phi\|_2^2 \le C \sum_j \|\Delta_j f\|_p^2 \|S_j\phi\|^2_{\frac{2p}{p-2}} \\
&\le C \sum_j 4^{j(s-d/p)} \|S_j\phi\|^2_{\dot{H}^{d/p}} \\
&\le C \sum_{j,k<j} 4^{j(s-d/p)} 4^{kd/p} \|\Delta_k \phi\|_2^2 \\
&\le C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ .
\end{aligned}$$

Let now $f \in \dot{B}^0_{d/s,2}$; to prove the second embedding of (iii), we will also show that $\Pi(f,\cdot) \in \mathcal{L}(\dot{H}^s, L^2)$. Using the Sobolev embedding $\dot{H}^s \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}$, we have

$$\begin{aligned}
\|\Pi(f,\phi)\|^2_{L^2} &\le C \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j f S_j \phi\|_2^2 \le C \sum_j \|\Delta_j f\|_{d/s}^2 \|S_j\phi\|^2_{\frac{2d}{d-2s}} \\
&\le C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \sum_j \|\Delta_j f\|^2_{d/s} \le C \|\phi\|^2_{\dot{H}^s} \ .
\end{aligned}$$

Remark that the embedding $\dot{B}^0_{d/s,2} \hookrightarrow X_s$ could also have been proved using (i) and the Littlewood-Paley theorem : $\dot{B}^0_{d/s,2} \hookrightarrow L^{d/s}$ (see Chapter 6).

To see that $X_s \hookrightarrow \dot{B}^0_{d/s,\infty}$ does not hold, it suffices to construct a function belonging to $L^{d/s,\infty} \setminus \dot{B}^0_{d/s,\infty}$ and to use (i). How can we build up such an example ?
Define λ by its Fourier transform

$$\widehat{\lambda}(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{|\xi|^{d-s}} \ ,$$

where $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0$, $\operatorname{Supp}\phi \subset B(0,1)$, and $\phi(0) = 1$. Then $\lambda \in \mathcal{C}^\infty$ and we have for a non zero constant c

$$\lambda(x) \overset{|x|\to\infty}{\sim} \frac{c}{|x|^s} \ ,$$

and thus $\lambda \in L^{d/s,\infty} \setminus L^{d/s}$. Now define f by its Fourier transform

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\phi((\xi-\xi_0)/r)}{|\xi-\xi_0|^{d-s}} \ .$$

We can choose $r>0$ and ξ_0 such that $f = \Delta_0 f$; and we still have $f \in L^{d/s,\infty} \setminus L^{d/s}$. Thus $f \in L^{d/s,\infty} \setminus \dot{B}^0_{d/s,\infty}$; this is the example we were looking for.

Finally, we would like to show that $\dot{B}^0_{d/s,\infty} \hookrightarrow X_s$ does not hold either. Define

$$f = \sum_{j\geq 0} e^{i2^j x_1}\phi(x) \ ,$$

where ϕ belongs to the Schwartz class, and has a Fourier transform supported in $B(0,1)$. It is well-known that f is not a Radon measure ; and it is obvious that $f \in \dot{B}^0_{d/s,\infty}$. Since f is not a Radon measure, it cannot belong to $L^2_{\rm loc}$, and therefore not to X_s.

The last embedding of the proposition has already been proved in Proposition 2.3.4. ■

Remark 2.4.1 *Since for $s>0$ Λ^s is an isomorphism from BMO^s to X_s, the above embeddings imply corresponding embeddings for the BMO^s.*

2.5 A dual approach

The preduals of the spaces $\mathbf{M}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$, $-\frac{d}{2}<t<s<\frac{d}{2}$ and of the spaces $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ can be described, as we will see in the following. This dual approach provides a tool which could be used to settle the open problem raised in Section 2.2.3, and also has an interest of its own.
Besides, studying spaces of products and paraproducts will suggest an interesting problem for generic spaces of products and paraproducts. Although we do not know how to solve it in the framework of Sobolev spaces (it is more or less equivalent to the open problem of Section 2.2.3), we will see that this problem can be given a satisfactory answer in the framework of Lebesgue spaces.

2.5.1 Spaces of products and paraproducts of Sobolev spaces

Definitions

Definition 2.5.1 (Spaces of products) *Let s and t be two real numbers in $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$ such that $s+t\geq 0$. We say that g belongs to $\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ if*

$$\|g\|_{\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} = \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\|_{\dot{H}^s}\|\psi_k\|_{\dot{H}^t} \ , \ f=\sum_{k\in\mathbb{N}}\phi_k\psi_k\right\} < \infty \ .$$

The restriction on s and t which we impose permits to give a meaning to the product of a function of $\dot{H}^s$ by a function of $\dot{H}^t$.

Definition 2.5.2 (Spaces of paraproducts) *If s and t are two real numbers in the interval $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$, we say that g belongs to $\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)$ if*

$$\|g\|_{\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} = \inf\left\{\|a\|_{\dot{B}^{s+t}_{1,1}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\|_{\dot{H}^s}\|\psi_k\|_{\dot{H}^t} \ , \ f=a+\sum_{k\in\mathbb{N}}\Pi(\phi_k,\psi_k)\right\} < \infty \ .$$

We omit the proof of the following lemma, which is straightforward.

Lemma 2.5.1 *The spaces* $\mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$ *and* $\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$ *endowed with (respectively) the norms* $\|\cdot\|_{\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)}$ *and* $\|\cdot\|_{\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)}$ *are Banach spaces.*

The duality result

The "multiplier part" (point (i)) of the below proposition has been proved by Gala and Lemarié [9], whereas the "paramultiplier part" (point (ii)) is a generalisation of a result of Youssfi [21].

Proposition 2.5.1 *Let* s *and* t *belong to* $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. *Then*

(i) $(\mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t))' = \mathbf{M}(\dot{H}^t, \dot{H}^{-s})$ *if* $s + t \geq 0$

(ii) $(\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t))' = \mathbf{\Pi}(\dot{H}^t, \dot{H}^{-s})$

PROOF : (i) First, if f belongs to the dual of $(\mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t))$, and if ϕ and ψ belong to $\mathcal{S}$, we have

$$\langle f, \phi\psi\rangle \leq C\|\phi\psi\|_{\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^t} \ ,$$

which means that $(\mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t))'$ is included in $\mathbf{M}(\dot{H}^t, \dot{H}^{-s})$.

Conversely, take $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^t, \dot{H}^{-s})$. It suffices to consider the case where $g \in \mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$ can be written as $g = \phi\psi$ with $2\|g\|_{\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} \geq \|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^t}$. We have then

$$|\langle f \ , \ g\rangle| = |\langle f \ , \ \phi\,\psi\rangle| \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^t} \leq C\|g\|_{\mathbf{M}^*(\dot{H}^s,\dot{H}^t)} \ ,$$

and therefore $(\mathbf{M}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t))' = \mathbf{M}(\dot{H}^t, \dot{H}^{-s})$.

(ii) Take first f in the dual of $\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$. Since $\dot{B}^{s+t}_{1,1}$ is densely embedded in $\mathbf{\Pi}^*(\dot{H}^s, \dot{H}^t)$, f must belong to $\dot{B}^{-s-t}_{\infty,\infty}$ (see Chapter 6). Moreover, if ϕ and ψ belong to $\mathcal{S}$, one has

$$\langle f, \Pi(\phi, \psi)\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu=-N}^{N} \langle \Delta_j f \ , \ \Delta_{j+\nu}\phi \, S_{j+\nu}\psi\rangle \ ,$$

where N is a natural number ; the existence of such a N is due to the fact that each term $\Delta_j\phi S_j\psi$ is spectrally localised in an annulus of radius $\sim 2^j$.

$$\begin{aligned}\langle f, \Pi(\phi, \psi)\rangle &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu=-N}^{N} [\langle \Delta_j f \ , \ \Delta_{j+\nu}\phi \, S_j\psi\rangle + \langle \Delta_j f \ , \ \Delta_{j+\nu}\phi \, (S_{j+\nu}\psi - S_j\psi) \, \rangle] \\ &= \langle \Pi(f, \psi), \phi\rangle + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu=-N}^{N} \langle \Delta_j f \ , \ \Delta_{j+\nu}\phi \, (S_{j+\nu}\psi - S_j\psi) \, \rangle \ .\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Since $f \in \dot{B}^{-s-t}_{\infty,\infty}$,

$$\left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu=-N}^{N} \langle \Delta_j f \ , \ \Delta_{j+\nu}\phi \, (S_{j+\nu}\psi - S_j\psi) \, \rangle \right| \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\|\psi\|_{\dot{H}^t} \ ,$$

and combining this last inequality with (2.5.1), we obtain

$$|\langle \Pi(f,\psi),\phi\rangle| \le C\|\phi\|_{\dot H^s}\|\psi\|_{\dot H^t} + |\langle f,\Pi(\phi,\psi)\rangle| \le C\|\phi\|_{\dot H^s}\|\psi\|_{\dot H^t} \ ,$$

where we used in the last inequality the assumption that f belongs to the dual of $\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t)$. As a conclusion, $\Pi(f,\cdot)$ is a continuous operator from $\dot H^t$ to $\dot H^{-s}$ ie $f\in\mathbf{\Pi}(\dot H^t,\dot H^{-s})$.

Conversely, take $f\in\mathbf{\Pi}(\dot H^t,\dot H^{-s})$. It suffices to consider the case where $g\in\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t)$ can be written as $g=\Pi(\phi,\psi)$ with $2\|g\|_{\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t)}\ge\|\phi\|_{\dot H^s}\|\psi\|_{\dot H^t}$. We have then

$$\langle f\ ,\ g\rangle = \langle f\ ,\ \Pi(\phi,\psi)\rangle = \langle f\ ,\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j\phi\, S_j\psi\rangle = \sum_j\langle\widetilde\Delta_j f S_j\psi\ ,\ \Delta_j\phi\rangle \ ,$$

where $\widetilde\Delta_j = F(2^{-j}D)$, with $F\in\mathcal{S}$ supported in an annulus. We now apply Lemma 2.3.2 and obtain

$$\begin{aligned}|\langle f\ ,\ g\rangle| &\le \left(\sum_j 4^{-js}\|\widetilde\Delta_j f S_j\psi\|_2^2\right)^{1/2}\left(\sum_j 4^{js}\|\Delta_j\phi\|_2^2\right)^{1/2}\\ &\le C\|\phi\|_{\dot H^s}\|\psi\|_{\dot H^t} \le C\|g\|_{\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t)} \ ,\end{aligned}$$

which implies $(\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t))' = \mathbf{\Pi}(\dot H^t,\dot H^{-s})$. ■

And since the dual of a Banach space is itself a Banach space, we have the

Corollary 2.5.1 *If s and t belong to $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$, $\mathbf{\Pi}(\dot H^s,\dot H^t)$ is a Banach space.*

Interest of product and paraproduct spaces

Product spaces appear naturally if one wants to sudy product laws between Sobolev spaces. Indeed, by definition, $\mathbf{M}^*(\dot H^s,\dot H^t)$ is the smallest Banach space B such that the product operator $M:(f,g)\mapsto fg$ be continuous from $\dot H^s\times\dot H^t$ to B.
This statement of course remains true if one replaces "product" by "paraproduct", the space $\mathbf{M}^*(\dot H^s,\dot H^t)$ by $\mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^t)$ and the operator M by Π.

The duality result which we proved in the last paragraph could also possibly be used to give an answer to the open question raised in section 2.2.3. Indeed, we would like to prove the identity (2.2.1), which can also be written, by Theorem A,

$$\text{if } s\in]0,d/2[\quad \mathbf{M}(\dot H^s,\dot H^{-s}) = \mathbf{\Pi}(\dot H^s,\dot H^{-s}) \ .$$

The inclusion "$\hookleftarrow$" (ie from $\mathbf{\Pi}(\dot H^s,\dot H^{-s})$ into $\mathbf{M}(\dot H^s,\dot H^{-s})$) is known, always by theorem A. So we are left with proving

$$\text{if } s\in]0,d/2[\quad \mathbf{M}(\dot H^s,\dot H^{-s}) \hookrightarrow \mathbf{\Pi}(\dot H^s,\dot H^{-s}) \ .$$

By duality, proving identity (2.2.1) reduces to showing

$$\text{if } s\in]0,d/2[\quad \mathbf{\Pi}^*(\dot H^s,\dot H^s) \hookrightarrow \mathbf{M}^*(\dot H^s,\dot H^s) \ . \tag{2.5.2}$$

We did not manage to prove this embedding. Nevertheless, it suggests a range of interesting problems, to which we now turn.

A general problem

As we have seen in the previous section, proving the embedding (2.5.2) would be very interesting. This embedding can be recast in a more general framework : if A and B are Banach spaces of tempered distributions, when is the embedding

$$\mathbf{\Pi}^*(A,B) \hookrightarrow \mathbf{M}^*(A,B) \tag{2.5.3}$$

verified ?
An equivalent formulation is : does there exist a constant C such that given $\phi \in A$ and $\psi \in B$, there exist two sequences (f_n) and (g_n) such that

$$\Pi(\phi,\psi) = \sum_n f_n g_n \qquad \text{with} \qquad \sum_n \|f_n\|_A \|g_n\|_B \leq C\|\phi\|_A\|\psi\|_B \qquad ?$$

The above relations mean that the paraproduct behaves in a similar way to the product, at least from a functional analytic point of view.

The above inclusion can be studied in a still more general framework by introducing the generalised product operators of Coifman and Meyer [3] [4]. Such operators are given by the formula, for $x \in \mathbb{R}^d$,

$$B(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)h(\xi,\eta)e^{i\langle x\,,\xi+\eta\rangle}\,d\xi\,d\eta\ ,$$

where h is supposed to belong to L^∞ ; stronger regularity assumptions on h can also be made, see Coifman and Meyer [4]. The question which arises then is of course : if f and g belong respectively to the Banach spaces A and B, does $B(f,g)$ belong to $\mathbf{M}^*(A,B)$?

We shall in the following forget the generalised product operators, and focus on the paraproduct operators, which constitute a particular case. The sequel of this chapter is dedicated to studying, if A and B are Lebesgue spaces, when relation (2.5.3) holds.

2.5.2 The case of Lebesgue spaces

In this section, we will study multiplier spaces and spaces of products in the framework of Lebesgue spaces ; this is very easy. We will then investigate when relation (2.5.3) is valid, if A and B are Lebesgue spaces.

Multipliers and product spaces between Lebesgue spaces

We define multipliers between Lebesgue spaces exactly as we did in the case of Sobolev spaces.

Proposition 2.5.2 *Let $p,q \in [1,\infty]$.*

- *If $q > p$, $\mathbf{M}(L^p,L^q) = \{0\}$.*
- *Otherwise, there exists $r \in [1,\infty]$ such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}$, and $\mathbf{M}(L^p,L^q) = L^r$.*

PROOF : To show the first point, we proceed by regularisation, as in the proof of point (i) of Proposition 2.3.5. To show the second point, it suffices to apply Hölder's inequality and a duality argument. ■

It is interesting to notice that the same phenomenon as in the case of Sobolev spaces appears : multiplier spaces corresponding to a positive gain of regularity reduce to $\{0\}$.

If p and q belong to $[1,\infty]$ and verify $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1$, one defines as in the case of Sobolev spaces, the spaces $\mathbf{M}^*(L^p,L^q)$ and $\mathbf{\Pi}^*(L^p,L^q)$ which correspond to the norms

$$\|g\|_{\mathbf{M}^*(L^p,L^q)}=\inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\phi_k\|_{L^p}\|\psi_k\|_{L^q}\ ,\ f=\sum_{k\in\mathbb{N}}\phi_k\psi_k\right\}$$

and

$$\|g\|_{\mathbf{\Pi}^*(L^p,L^q)}=\inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\phi_k\|_{L^p}\|\psi_k\|_{L^q}\ ,\ f=\sum_{k\in\mathbb{N}}\Pi(\phi_k,\psi_k)\right\}\ .$$

It is then obvious, that, if r is such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, one has

$$\mathbf{M}^*(L^p,L^q)=L^r\ .$$

Study of $\mathbf{\Pi}^*(L^p,L^q)$ for $0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$

Let us recall that $\mathbf{\Pi}^*(L^p,L^q)$ is only defined for $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1$. We shall deal with the case $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ in the next section, and prove first the following lemma.

Lemma 2.5.2 *If $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ with $r\in]1,\infty[$,*

$$\mathbf{\Pi}^*(L^p,L^q)\hookrightarrow L^r=\mathbf{M}^*(L^p,L^q)\ .$$

PROOF : We will follow the proof of Coifman and Meyer [3]. To begin with, let us recall two important results. First of all, an extension of the Littlewood-Paley theorem (see Chapter 6) states that for any sequence of functions (f_j) such that the Fourier transform of f_j is supported in an annulus $A2^j\leq|\xi|\leq B2^j$,

$$\left\|\sum_j f_j\right\|_r\sim\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^2\right)^{1/2}\right\|_r\ . \tag{2.5.4}$$

(where we denote by $\sim$ the equivalence of two norms). Moreover, as proved in [18], any function $f\in L^r$ verifies

$$\forall j\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}^d,\quad S_jf(x)\leq CMf(x)\quad , \tag{2.5.5}$$

where M stands for the Hardy and Littlewood maximal function.

Let now $f\in L^p$ and $g\in L^q$. In the following computations, we will ignore all the technical difficulties due to overlappings between different frequency annuli in Littlewood-Paley type formulas.
Applying (2.5.4) and (2.5.5), we get

$$\|\Pi(f,g)\|_r\leq C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_jf|^2|S_jg|^2\right)^{1/2}\right\|_r\leq C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_jf|^2\right)^{1/2}Mg\right\|_r\ ,$$

which gives, using Hölder's inequality, the boundedness of M over L^q, and once again (2.5.4),

$$\|\Pi(f,g)\|_r \leq C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \|Mg\|_q \leq C\|f\|_p \|g\|_q \ .$$

■

Study of the limit cases

We can deal with the limit spaces as we have dealt with the general case in the previous section, but L^1 and L^∞ are not necessarily the relevant spaces.
For example, the Hardy and Littlewood maximal function M is not continuous over L^1, but from $\mathcal{H}^1$ to L^1.
Also, the Littlewood-Paley theorem is not valid any more for L^1 and L^∞ : these spaces must be replaced by $\mathcal{H}^1$ and BMO, see the Chapter 6.
Furthermore, **we assume** that the extension of the Littlewood-Paley theorem used in the above section is valid for $\mathcal{H}^1$ and BMO, ie that for any sequence of functions (f_j) such that the Fourier transform of f_j is supported in an annulus $A2^j \leq |\xi| \leq B2^j$,

$$\left\| \sum_j f_j \right\|_{\mathcal{H}^1} \sim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{\mathcal{H}^1}$$
$$\left\| \sum_j f_j \right\|_{BMO} \sim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{BMO} \ .$$

It is very likely that the two above relations hold, but we have not been able to prove them.

Proceeding exactly as in the last section, we conclude that the following embeddings hold

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Pi}^*(L^p, L^{p'}) \hookrightarrow \mathcal{H}^1 \qquad \text{if } p \in]1,\infty[\\
&\mathbf{\Pi}^*(BMO, L^\infty) \hookrightarrow BMO \\
&\mathbf{\Pi}^*(L^1, L^\infty) \hookrightarrow L^1 \\
&\mathbf{\Pi}^*(\mathcal{H}^1, L^\infty) \hookrightarrow \mathcal{H}^1 \\
&\mathbf{\Pi}^*(BMO, \mathcal{H}^1) \hookrightarrow \mathcal{H}^1 \ .
\end{aligned}$$

2.6 Annex

2.6.1 Some facts about Morrey spaces

First of all, Morrey spaces are defined as follows.

Definition 2.6.1 (Homogeneous Morrey spaces) *If $1 < p \leq q \leq \infty$, $f \in M^{p,q}$ if and only if f is locally L^p and $\|f\|_{M^{p,q}} < \infty$ where*

$$\|f\|_{M^{p,q}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\,,\,R>0} R^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{L^p(B(x,R))} \ .$$

The next proposition recalls some basic properties of the Morrey spaces.

Proposition 2.6.1 *(i) If $p \in (1, \infty]$, $M^{p,p} = L^p$.*
(ii) If $p_1 > p_2$, $M^{p_1,q} \hookrightarrow M^{p_2,q}$.
(iii) $M^{p,q}$ has the homogeneity of L^q.
(iv) The dual space of $M^{p,q}$ is $N^{p',q'}$ (conjugate exponents), which can be defined as

$$N^{p,q} = \left\{ h = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k \text{ with } \sum_k \operatorname{diam}(\operatorname{Supp}(g_k))^{d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|g_k\|_{L^p} \right\} .$$

The next lemma is crucial if one wants to compare Morrey spaces and multiplier or paramultiplier spaces. It was first proved by Lemarié [9], see also Dubois [6].

Lemma 2.6.1 *Let $2 < p \leq q \leq \infty$; define $s = \frac{2}{q}$; take $\phi \in L^2$, $\psi \in \dot{H}^s$. Then*

$$\|\phi\psi\|_{N^{p',q'}} \leq \|\phi\|_{L^2} \|\psi\|_{\dot{H}^s} .$$

2.6.2 Boundedness of singular integral operators over Sobolev spaces

We shall recall here some basic results about singular integral and Calderón-Zygmund operators. A comprehensive study of these operators can be found in [17].

Let us first define a singular integral operator ; the definition relies on properties of its kernel K. We say that an operator U on $\mathcal{S}$ with values in $\mathcal{S}'$ has a kernel K if, for any f, g belonging to $\mathcal{D}$ and of disjoint supports,

$$\langle Uf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) g(x) f(y) dy .$$

Notice that K does not define completely U : if U is the multiplication operator by some function, K can be chosen equal to zero.

Definition 2.6.2 (Singular integral operator) *Let U be an operator of kernel K. U is a singular integral operator if K verifies :*

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-d}$$
$$|\partial_x K(x,y)| \leq C|x-y|^{-d-1}$$
$$|\partial_y K(x,y)| \leq C|x-y|^{-d-1} .$$

Definition 2.6.3 (Calderón-Zygmund operator) *A Calderón-Zygmund operator is a singular integral operator bounded on L^2.*

The crucial question is now to determine when singular integral oerators are L^2 bounded. Before answering it, we shall define a weaker boundedness notion.

Definition 2.6.4 (Weak boundedness) *An operator U is weakly bounded if for any set $\mathcal{B}$ bounded in $\mathcal{D}$ there exists a constant $C_{\mathcal{B}}$ such that*

$$t^{-n} \langle T \left[F\left(\frac{\cdot - a}{t} \right) \right] , G\left(\frac{\cdot - a}{t} \right) \rangle \leq C_{\mathcal{B}}$$

for any F, G in $\mathcal{B}$, a in $\mathbb{R}^d$ and $t > 0$.

We can now give a criterion for the L^2 boundedness of singular integral operators.

Theorem 2.6.1 (David & Journé [5]) *Let U be a aingular integral operator. Then U is bounded on L^2 if and only if*

- *$T1$ belongs to BMO*
- *T^t1 belongs to BMO*
- *T is weakly bounded.*

There is also a boundedness criterion over Sobolev spaces of positive index ; it involves the spaces BMO^s defined in section 2.3.1.

Theorem 2.6.2 (Meyer [16]) *Let U be a singular integral operator, and s a real number in the interval $(0,1)$. U is bounded on $\dot{H}^s$ if and only if*

- *$T1$ belongs to BMO^s*
- *T is weakly bounded.*

Acknowledgement : The author wishes to thank Professor Bourdaud for interesting and useful discussions during the writing of this chapter.

Bibliography

[1] D.R. Adams, M. Pierre, *Capacitary strong type estimates in semilinear problems*, Annales de l'Institut Fourier **41**, 117-135 (1991)

[2] G. Bourdaud, *Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien*, Publications mathématiques de l'université Paris VII, **23** (1987)

[3] R. Coifman, Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque **57**, Société Mathématique de france (1957)

[4] R. Coifman, Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs, Vol. III*, Hermann, Paris (1991)

[5] G. David, J.-L. Journé *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Annals of mathematics **120**, 371-397 (1984)

[6] S. Dubois, *Thèse de doctorat. Equations de Navier-Stokes dans l'espace : espaces critiques et solutions d'énergie finie*, Université de Picardie Jules Verne (2002)

[7] S. Gala, *Opérateurs de multiplication ponctuelle entre espaces de Sobolev*, thèse de doctorat de l'université d'Evry-Val d'Essonne

[8] S. Gala, P.-G. Lemarié-Rieusset, *Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation*, prépublication de l'Université d'Evry Val d'Essonne **203** (2005)

[9] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall (2003)

[10] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Pitman, Monographs and studies in Mathematics **23**, Boston-London (1985)

[11] V. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer Verlag, Berlin (1985)

[12] V. Maz'ya, I. Verbitsky, *Capacitary inequalities for fractional integrals with applications to partial differential equations and Sobolev multipliers*, Arkiv för Matematik **33**, 81-115 (1995)

[13] V. G. Maz'ya, I. E. Verbitsky, *Capacitary estimates for fractional integrals, with applications to partial differential equations and Sobolev multipliers*, Arkiv för Matematik **33**, 81-115 (1995)

[14] V. G. Maz'ya, I. E. Verbitsky, *The Schrödinger operator on the energy space: Boundedness and compactness criteria*, Acta Mathematica **188**, 263-302 (2002)

[15] V. G. Maz'ya, I. E. Verbitsky, *The form boundedness criterion for the relativistic Schrödinger operator*, preprint (2004)

[16] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs, Vol. I*, Hermann, Paris (1991)

[17] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Hermann, Paris (1991)

[18] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University press (1993)

[19] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhaüser Verlag (1992)

[20] A. Youssfi, *Function spaces related to singular integral operators, in Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1993

[21] A. Youssfi, *Duality of type $\mathcal{H}^1$ - BMO and bilinear operators*, Journal of mathematical analysis and applications **190**, 780-794 (1995)

Chapitre 3

Weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations

Abstract
In this article, we describe spaces $\mathcal{P}$ such that : if u is a weak (in the sense of Leray [22]) solution of the Navier-Stokes system for some initial data u_0, and if u belongs to $\mathcal{P}$, then u is unique in the class of weak solutions. We say then that weak-strong uniqueness holds. It turns out that the proof of such results relies on the boundedness of a trilinear functional. In order to find optimal conditions for the boundedness of this functional, we make use of spaces of multipliers and of paramultipliers (that is, functions which map, by classical pointwise product or by paraproduct, a given Sobolev space in another given Sobolev space). These spaces are described in Chapter 2. With the help of this description, we derive conditions for weak-strong uniqueness which generalise all previously known results, from the famous Serrin criterion [31], to the recent conditions formulated by Lemarié [21].

3.1 Introduction

3.1.1 The Cauchy problem for the Navier-Stokes equations

We shall in this paper study uniqueness criteria for the solutions of the Cauchy problem associated to the Navier-Stokes equations. We shall consider these equations in the whole space $\mathbb{R}^d$, where $d \geq 2$. The Cauchy problem reads then

$$(NS) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

It describes the evolution of a viscous fluid filling the whole space : $u(x,t)$ and $p(x,t)$ are, respectively, the velocity and the pressure of the fluid. The initial condition $u_{|t=0} = u_0$ gives its velocity at $t = 0$. The fluid is furthermore supposed to be incompressible (hence the condition $\operatorname{div} u = 0$) and of viscosity $\nu = 1$.

The modern theory of the Navier-Stokes equations goes back to Leray [22] who first constructed weak solutions of finite energy of (NS), for an initial data u_0 in L^2_σ (for a Banach space of distributions B, we denote B_σ for the kernel of the divergence operator in B). A solution is said to be of finite energy if it belongs to the space

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} L^\infty([0,\infty), L^2) \cap L^2([0,\infty), \dot{H}^1) \ , \tag{3.1.1}$$

where $\dot{H}^1$ is the homogeneous Sobolev space, ie the space of functions whose gradient belongs to L^2. These weak solutions are global in time ; they are known to be unique for $d = 2$ but for $d \geq 3$, their uniqueness is still an open problem today.
Another approach is the one of strong solutions, also already considered by Leray. One of the major steps in that domain was accomplished by Fujita and Kato [13], who built, for an initial data u_0 in $\dot{H}^{d/2-1}_\sigma$, solutions in the space

$$\mathcal{C}([0,T], \dot{H}^{d/2-1}) \text{ for some } T > 0 \ .$$

Strong solutions are in general unique ; for small initial data, they are defined for any time, but for large initial data it is not known whether they might blow up in finite time or not.

3.1.2 The weak-strong uniqueness problem

Let us now come to the weak-strong uniqueness problem ; we shall remain here rather sketchy and formal, but explain everything more thoroughly in Parts 3.2 and 3.3.
Weak-strong uniqueness is an attempt to reconcile the two points of view which have been described : weak and strong solutions. More precisely, the problem is to find conditions on a strong solution u of (NS) such that all weak solutions which share the same initial condition u_0 equal u. Leray already considered this problem ; however the articles of Prodi [28] and Serrin [31] were a very important improvement of the theory.

How does one proceed to prove weak-strong uniqueness ? The almost universal method is to establish the boundedness of the trilinear functional

$$\begin{aligned} F \overset{\text{def}}{:} (u,v,h) &\mapsto \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) h \, dx \, ds \\ \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \ , \end{aligned}$$

where $T > 0$ is given, and $\mathcal{P}$ is to be determined. Notice that this functional is classical in the framework of the Navier-Stokes equations. If it is bounded independently of T for a certain $\mathcal{P}$, then, using energy estimates and a Gronwall type argument, one can in general conclude that weak-strong uniqueness holds.

So the problem reduces to finding $\mathcal{P}$ so that F be continuous. Prodi and Serrin suggested Lebesgue spaces in time and space, and, in a series of articles ([2] [10] [14] [19] [21] [29] [35]), spaces always more refined were considered. The common point of all these articles is that the authors actually do not prove the boundedness of F on $\mathcal{L}^2 \times P$ but on $L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha} \times L^\beta \dot{H}^{2/\beta} \times \mathcal{P}$ (we denote for the sake of simplicity $L^p \dot{H}^s$ instead of $L^p([0,\infty), \dot{H}^s)$) with $\alpha, \beta \in [2, \infty]$, where $L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha}$ and $L^\beta \dot{H}^{2/\beta}$ are interpolated spaces between $L^\infty L^2$ and $L^2 \dot{H}^1$.

3.1.3 Our approach of the weak-strong uniqueness problem

What we will do is try to find optimal conditions on $\mathcal{P}$ so that F be bounded from $L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha} \times L^\beta \dot{H}^{2/\beta} \times \mathcal{P}$ to $\mathbb{R}$. We will use two important tools :

- The paraproduct of Bony : following Gallagher and Planchon [14], we will split the product defining the integrand of F into three terms, with the help of the paraproduct

algorithm. In other words, we write

$$F(u,v,h) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \sum_j (\Delta_j u \cdot \nabla v) S_j h \, dx \, ds$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \sum_j (S_j u \cdot \nabla v) \Delta_j h \, dx \, ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|j-k|\leq 1} (\Delta_j u \cdot \nabla v) \Delta_k h \, dx \, ds$$

(see Chapter 6 for a definition of the Littlewood-Paley operators Δ_j, S_j, and a more consequent explanation of the paraproduct algorithm).

- Multiplier spaces : following Lemarié [21], we observe that, in order to give a meaning to the integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \, b \, c \, dx \ ,$$

where $a \in \dot{H}^\alpha$ and $b \in \dot{H}^\beta$ (α and β are real numbers), it suffices that $c \in \mathbf{M}(\dot{H}^\alpha, \dot{H}^{-\beta})$. We denote $\mathbf{M}(\dot{H}^\alpha, \dot{H}^{-\beta})$ the multiplier space

$$\mathbf{M}(\dot{H}^\alpha, \dot{H}^{-\beta}) = \{ f \in \mathcal{S}' \, , \, \|f\phi\|_{\dot{H}^{-\beta}} \leq C \|\phi\|_{\dot{H}^\alpha} \} \ .$$

This observation can be adapted to the functional F.

In order to combine the ideas of Lemarié and of Gallagher and Planchon, we will introduce paramultiplier spaces, ie spaces of functions f which make one of the mappings

$$\phi \mapsto \sum_j \Delta_j f S_j \phi$$
$$\phi \mapsto \sum_j S_j f \Delta_j \phi$$
$$\phi \mapsto \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_j f \Delta_k \phi$$

bounded from one Sobolev space in another.
A refined study of these spaces is necessary ; it is performed in Chapter 2. With the help of the results proved in that chapter, we will obtain a criterion for weak-strong uniqueness which generalises all results already known, and is, in a certain sense, optimal.

3.1.4 Organisation of the chapter

We recall first in Part 3.2 some results about the Navier-Stokes equations, and their weak and strong solutions ; we then proceed by reviewing known results about weak-strong uniqueness.

We state in Part 3.3 our main results : Theorem A and Theorem B.

Theorem A is an optimal criterion for weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations, it is proved in Part 3.4.

Theorem B gives a condition on the initial value for local uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations. It is proved in Part 3.5.

The proofs of Theorems A and B rely on a result of harmonic analysis, namely the description of multiplier and paramultiplier spaces given in Theorem 3.3.1. This theorem is proved in Chapter 2, but the reader only interested in the Navier-Stokes equations can skip this Chapter and simply admit this result.

3.2 Navier-Stokes equations and weak-strong uniqueness : review of known results

3.2.1 The Navier-Stokes system, weak solutions, strong solutions

Recall the Navier-Stokes system

$$(NS)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

It is often easier to solve (NS) under its integral form (both formulations are equivalent for large classes of solutions, see [21])

$$(INS) \qquad u(t) = e^{t\Delta}u_0 - B(u,u) \ ,$$

where

$$B(u,v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot(u(s)\otimes v(s))dx\,ds \ . \tag{3.2.1}$$

The Leray projection operator, $\mathbb{P}$, is given, if $1\le i\le d$, by

$$(\mathbb{P}f)_j \stackrel{\text{def}}{=} f_j - \sum_{i=1}^d R_i R_j f \ ,$$

where R_i is the Riesz transform $R_i = \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$.

Leray's weak solutions and the energy space

Leray [22] proved in 1934 the existence of *weak* solutions, ie obtained by a weak limiting process and satisfying the equation in the distribution sense. These solutions are of finite energy : the initial data u_0 belongs to L^2_σ, and the solution u itself to the energy space

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} L^\infty([0,\infty),L^2_\sigma)\cap L^2([0,\infty),\dot H^1) \ .$$

For later use, we also define

$$\mathcal{L}_t \stackrel{\text{def}}{=} L^\infty([0,t],L^2_\sigma)\cap L^2([0,t],\dot H^1) \ .$$

Theorem 3.2.1 (Leray [22]) *Let $u_0\in L^2_\sigma$. Then (NS) has a solution $u\in\mathcal{L}$, global in time. Furthermore, u verifies the following energy inequality*

$$\forall t\ge 0 \ , \qquad \|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\,ds \le \ \|u_0\|_2^2 \ . \tag{3.2.2}$$

Definition 3.2.1 (Leray weak solutions) *We call u a Leray weak solution if u is a solution of (NS) for some $u_0\in L^2_\sigma$ and if u satisfies the energy inequality (3.2.2).*

If $d=2$, Leray weak solutions are unique and continuous with values in L^2, but for $d>2$, it is not known whether, in general, Leray weak solutions are unique and / or regular. Finally, the following result will be useful in the sequel.

Lemma 3.2.1 (Foias [12], Serrin [31]) *Let T be a real number in $(0,\infty]$, $u_0 \in L^2_\sigma$, and take $u \in \mathcal{L}_T$ a solution of (NS). Then there exists a zero measure set N such that for any $t \in [0,T) \setminus N$, and any function $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0,t],\mathcal{S})$ whose divergence identically vanishes,*

$$\int_0^t (\langle u, \partial_t \phi\rangle - \langle \nabla u, \nabla \phi\rangle - \langle u \cdot \nabla u, \phi\rangle)\, ds = \langle u(t), \phi(t)\rangle - \langle u_0, \phi(0)\rangle \ .$$

Furthermore, it is possible to change the definition of u on N in such a way that the above equality holds for any $t \in [0,T)$, and that u is weakly L^2 continuous.

In the following, we **always** assume that the Leray solutions we consider are weakly L^2 continuous.

Strong solutions and critical spaces

While the weak solutions of (NS) belong to the energy space $\mathcal{L}$, the strong (ie obtained by a fixed point argument) solutions of (NS) are a priori of infinite energy : it is natural to construct them in critical spaces, in other words spaces whose scaling is adapted to the Navier-Stokes equations. Let us be more precise : if $u(x,t)$ is a solution of (NS) associated to the initial data $u_0(x)$, then $\lambda u(\lambda(x-x_0), \lambda^2 t)$ is a solution associated to $\lambda u_0(\lambda(x-x_0))$ for any $\lambda > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^d$. The following definition is now natural.

Definition 3.2.2 *We say that a Banach space B of distributions on $\mathbb{R}^d$ is critical for the initial conditions if its norm verifies for any $\lambda \in \mathbb{R}$, any $x_0 \in \mathbb{R}^d$ and any $u \in B$,*

$$\|u\| = \|\lambda u(\lambda(\cdot - x_0)\| \ .$$

A Banach space of distributions of $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ is a critical path space if its norm verifies for any $\lambda \in \mathbb{R}$, any $x_0 \in \mathbb{R}^d$ and any $u \in B$

$$\|u\| = \|\lambda u(\lambda(\cdot - x_0), \lambda^2 \cdot)\| \ .$$

The energy space L^2 is critical for the initial conditions only if $d = 2$.
It must be emphasized that in the following, *all* the spaces (except the energy space) in which we will take u_0 (respectively u) will be critical spaces for the initial conditions (respectively critical path spaces).

Many works have been devoted to strong solutions of the Navier-Stokes equations, and we will mention only some of them.
Let us begin with the theorem of Koch and Tataru. Before stating it, recall that ∂BMO is the space of derivatives of functions of BMO (see [18]), and that $\partial BMO^{(0)}$ is the closure of the Schwartz class in ∂BMO. In the following theorem, the existence part is due to Koch and Tataru [18], and the uniqueness to Miura [25].

Theorem 3.2.2 (Koch and Tataru [18], Miura [25]) *If $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$, there exists $T > 0$ such that the system (NS) admits a unique solution in*

$$\mathcal{C}([0,T), \partial BMO^{(0)}) \cap L^\infty_{\rm loc}([0,T), L^\infty) \ .$$

This theorem is very important because the space ∂BMO enjoys a maximality property (see [1]), in particular any known critical space for the initial data for which the (NS) system is well posed is included in ∂BMO.

This shows the importance of the space BMO for the Navier-Stokes equations ; in our approach of the weak-strong uniqueness problem, we will mainly work with BMO-type spaces.

We will also need some results of Lemarié-Rieusset, who studied in particular shift invariant local measure spaces.

Definition 3.2.3 ([21]) *A Banach space E is a shift invariant Banach space of test functions if and only if*

- $\mathcal{S} \subset E \subset \mathcal{S}'$.
- *E and its norm are translation invariant.*
- *$\mathcal{S}$ is dense in E.*

A Banach space E is a space of local measures if and only if

- *E is the dual of a shift invariant Banach space of test functions.*
- *E is homogeneous of degree -1.*
- *If $f \in E$, $g \in \mathcal{S}$, $\|fg\|_E \leq C\|f\|_E\|g\|_\infty$.*

The spaces of local measures can be seen as generalisations of the classical Lebesgue spaces : the following theorems are generalisations of theorems previously known only in the framework of Lebesgue spaces. Besov spaces (which have been introduced in the study of the Navier-Stokes equations by Cannone, Meyer and Planchon [5], [24]) appear in both these theorems ; for a definition of these spaces, see Chapter 6.

Theorem 3.2.3 ([21] p.176) *Let E be a space of local measures embedded in $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, and let $u_0 \in E^{(0)}_\sigma$. Then there exists $T > 0$ such that (NS) has a solution $u \in \mathcal{C}([0,T), E^{(0)})$.*

Theorem 3.2.4 ([21] p.200) *Suppose F is a space of local measures, q a real number in the set $(2,\infty)$, and define*

$$E = \dot{B}^{-2/q}_{F,q} \ .$$

Suppose finally that F is embedded in $\dot{B}^{-1+2/q}_{\infty,\infty}$, which is equivalent to : E is embedded in $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$. Then if $u_0 \in E^{(0)}_\sigma$ there exists $T > 0$ such that (NS) has a unique solution u such that

$$\|u\|_{L^q([0,T],F)} + \sup_{t\in[0,T)} t^{1/q}\|u(t)\|_F + \sup_{t\in[0,T)} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty < \infty \ .$$

3.2.2 Weak-strong uniqueness : known results

First of all, let us present the weak-strong uniqueness problem.

Presentation of the problem

Let $u_0 \in L^2$. Let g and h be such that

$$\begin{array}{l} g \text{ and } h \text{ are Leray weak solutions of } (NS) \\ h \text{ is, on } [0,T], \text{ a strong solution of } (NS). \end{array} \tag{3.2.3}$$

Then one has **weak-strong uniqueness** if $g = h$ on $[0,T]$.

Actually the weak-strong uniqueness problem is twofold. We shall try to

- determine which are the spaces $\mathcal{P}$ (*path spaces*) such that : if h belongs to $\mathcal{P}_T$ (the restriction of $\mathcal{P}$ to $[0,T]$), then weak-strong uniqueness holds on $[0,T]$.
- determine to which space $\mathcal{I}$ (*initial value space*) u_0 must belong so that there exists a strong solution $h \in \mathcal{P}_T$ for some $T > 0$.

We will now give very quickly the idea (see Serrin [31]) generally used to prove weak-strong uniqueness ; we shall come back to this in Parts 3.3 and 3.4.
Consider g and h as in (3.2.3) and set $w = g - h$. Using the energy inequality (3.2.2) satisfied by g and h, we get formally that

$$\|w(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 \, ds \leq \|w_0\|_2^2 + 2 \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (w \cdot \nabla w) \cdot h \, dx \, ds \right| . \tag{3.2.4}$$

The crucial point is now to estimate the trilinear term

$$F(u,v,h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) \cdot h \, dx \, dt . \tag{3.2.5}$$

Suppose F is continuous from $\mathcal{L}^2_T \times \mathcal{P}_T$ to $\mathbb{R}$ with a norm independent of T. Then it becomes possible to justify the formal inequality (3.2.4), and after a few manipulations to get $w = 0$ as long as h is defined.

Known results

Let us review the results which have been, to our knowledge, obtained about the weak-strong uniqueness ; for each of them, we will indicate what are the path space $\mathcal{P}$ and the initial value space $\mathcal{I}$, and what method is used in the proof.
Many of the references cited below also address the question of the regularity of the weak solutions ; it is sometimes even their first motivation. As we shall see in Section 3.2.3, this problem is connected with the weak-strong uniqueness, but these two questions are not equivalent. Besides, the question of the initial value space for u_0 which gives solutions u in a given path space is often left aside by the authors, but we will try as much as possible to give a couple $(\mathcal{I}, \mathcal{P})$.

- Prodi [28] and Serrin [31] showed that weak-strong uniqueness holds if u belongs to the path space

$$\mathcal{P} = L^q L^p \quad \text{with} \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} = 1 \quad \text{and} \quad d < p < \infty \tag{3.2.6}$$

  (To be more explicit : if u is a weak Leray solution which belongs to $L^q([0,T], L^p)$ for some $T > 0$, then it is unique in the class of weak Leray solutions on $[0,T]$).

  If q and p verify (3.2.6), a strong solution in $L^q([0,T], L^p)$ exists for some $T > 0$ if and only if u_0 belongs to the initial value space

$$\mathcal{I} = (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q})_\sigma ,$$

  because of Theorem 3.2.4.

  The idea of the proof of Prodi and Serrin is simple : if $u, v \in \mathcal{L}$, then ∇v belongs to $L^2 L^2$ (when the value of T is obvious by the context, we denote $L^p B$ instead of

$L^p([0,T],B))$, and, by interpolation, u belongs to $L^r\dot{H}^{2/r}$ for any $r \in [2,\infty]$; hence by Sobolev injection

$$u \in L^r L^{\frac{2rd}{rd-4}} \ .$$

By Hölder's inequality, this implies that $u \cdot \nabla v$ belongs to $L^{\frac{2r}{2+r}} L^{\frac{rd}{rd-2}}$. To make F bounded, it suffices to take h in the dual of this space : it is not hard to see that, taking $r \in]2,\infty[$, this yields precisely the relation (3.2.6).

- Von Wahl [35] extended the result of Serrin to the limit case

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}L^d \ ,$$

(i.e. : a weak Leray solution u which belongs to $\mathcal{C}([0,T],L^d)$ for some $T > 0$ is unique). This path space corresponds to the initial value space

$$\mathcal{I} = L^d_\sigma \ ,$$

see [17].

The idea of the proof is the same as above (use Sobolev injections to see that the functional F is continuous), but one has to be more careful when applying the Gronwall lemma.

Finally, this last result was improved by Kozono and Sohr [20], who proved that weak-strong uniqueness holds for

$$\mathcal{P} = L^\infty L^d \ .$$

- The other limit case, namely

$$\mathcal{P} = L^2 BMO$$

was treated by Kozono and Taniuchi [19]. It is not clear what is the associated initial value space.

The method of the proof is still based on the continuity of F. Noticing that u belongs to $L^\infty L^2$, that ∇v belongs to $L^2 L^2$, and that

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \operatorname{curl} \nabla v = 0 \ , \end{cases}$$

one can conclude, using the $\operatorname{div} - \operatorname{curl}$ lemma [8] that

$$u \cdot \nabla v \in L^2 \mathcal{H}^1 \ ,$$

where $\mathcal{H}^1$ is the Hardy space, whose dual is BMO. Therefore F is continuous from $\mathcal{L}^2 \times L^2 BMO$ to $\mathbb{R}$.

- The relation (3.2.6) obviously does not make sense if $q < 2$. But we observe that, as $q \geq 2$ gets smaller, down to 2, p gets larger, up to ∞, ie the required space regularity increases as the required time regularity decreases. If one wants to take $q < 2$, it seems logical to demand more space regularity than L^∞. This is the result obtained by Beirão da Vega [2] : weak-strong uniqueness holds for

$$\mathcal{P} = L^q W^{1,p} \quad \text{with} \quad \frac{2}{q} + \frac{d}{p} = 2 \quad \text{and} \quad p \in (1, \min(2, \frac{n}{n-2})) \ .$$

It is not clear what initial value space u_0 should belong to.

The method employed by Beirão da Vega is based on an L^p energy estimate.

Following the same approach, but with a proof relying on the continuity of the trilinear term, Ribaud [29] showed that weak-strong uniqueness holds for

$$\mathcal{P} = L^q W^{s,p} \quad \text{with} \quad \frac{2}{q} - s + \frac{d}{p} = 1 \quad \text{and} \quad p, q \in (1, \infty) \ , \ s \geq 0, \ .$$

Again, it is not clear what initial value space u_0 should belong to.

- In [14], Gallagher and Planchon studied a Besov spaces scale, which is much more refined than the Lebesgue spaces scale used by Serrin. They proved that weak-strong uniqueness holds for the path space

$$\mathcal{P} = L^q \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}+\frac{2}{q}} \quad \text{with} \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} > 1 \ .$$

The corresponding initial value space is

$$\mathcal{I} = (\dot{B}_{p,q}^{-1+d/p})_\sigma \ ,$$

see [7] [15].

Gallagher and Planchon proved the continuity of $F : \mathcal{L}^2 \times L^q \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}+\frac{2}{q}} \to \mathbb{R}$ with the help of a paraproduct type decomposition of the three term product defining F in (3.2.5).

- Dubois [10] studied the case of Lorentz, Morrey, and Besov over Morrey spaces (see the annex of Chapter 2 for the definition of Morrey spaces and some of their properties). She could find many new path spaces which grant weak strong uniqueness. We give below these path spaces, plus the corresponding initial value spaces, which are obtained with the help of Theorems 3.2.3 and 3.2.4. For the space $\mathcal{C}L^{d,\infty}$, see also [24].

$$\begin{cases} \mathcal{P} = L^q L^{p,\infty} & \text{with} \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} = 1 \quad \text{and} \quad p \in (d, \infty] \\ \mathcal{I} = (\dot{B}_{L^{p,\infty},q}^{-1+d/p})_\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{C}(L^{d,\infty})^{(0)} \\ \mathcal{I} = (L^{d,\infty})_\sigma^{(0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} = L^q M^{r,p} & \text{with} \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} = 1 \quad \text{and} \quad p \in [d, \infty] \ , \ r \in (2, p] \\ \mathcal{I} = (\dot{B}_{M^{r,p},q}^{-1+d/p})_\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{C}(M^{r,d})^{(0)} & \text{with} \quad r \in (2, d] \\ \mathcal{I} = (M^{r,d})_\sigma^{(0)} \end{cases}$$

$$\mathcal{P} = L^q \dot{B}^s_{M^{r,p},\infty} \quad \text{with} \quad \frac{2}{q} - s + \frac{d}{p} = 1 \quad \text{and} \quad 1 < r \leq p < \infty \ ,$$

$$\max\left(0, \frac{3}{p}\left(1 - \frac{r}{2}\right), \frac{3}{p} - 1\right) < s < 1 + \frac{3}{p}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}(\dot{B}_{M^{r,p},\infty}^{-1+\frac{d}{p}})^{(0)} \quad \text{with} \quad 2 \leq r \leq p < \infty \ , \ p \leq 3$$

The weak-strong uniqueness for all these classes is proved by the classical argument : one shows that the functional F is continuous from $\mathcal{P} \times \mathcal{L}^2$ to $\mathbb{R}$.

- Finally, Lemarié-Rieusset ([21], chapter 21) was able to generalise some of the previous results using multiplier spaces. He proved that weak-strong uniqueness holds for the path spaces

$$\begin{aligned} &\mathcal{P} = \mathcal{C}X_1^{(0)} \\ &\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}X_r \quad \text{with} \quad r \in [0,1) \ , \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

  where, by definition, $X_s = \mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2)$ is the space of distributions such that their pointwise product with a function in $\dot{H}^s$ belongs to L^2 (we will come back in greater detail to these spaces in Part 3.3, since they will play a very important role in our main theorem). The embeddings of Proposition 2.4.2 of Chapter 2 show that the first case above generalises the result of von Wahl, and the second one the result of Serrin.
  The initial value spaces for u_0 are, respectively, and due to Theorems 3.2.3 and 3.2.4,

$$\mathcal{I} = (\dot{X}_1)^{(0)}_\sigma \quad \text{and} \quad \mathcal{I} = (\dot{B}^{r-1}_{X_r, \frac{2}{1-r}})_\sigma \ .$$

  Recall that the idea of Serrin was to make F continuous, by choosing an appropriate path space for w. More precisely, Serrin noticed that the two first arguments of F are such that $u \in L^p\dot{H}^{2/p}$ for any $p \in [2,\infty]$ and $\nabla v \in L^2L^2$; then he used Sobolev injections to characterize the space to which w should belong. But Lemarié-Rieusset stops here, and the conditions (3.2.7) are then obvious.

"Strong-weak" uniqueness

The problem converse to weak strong uniqueness could be stated as "When is a strong solution a Leray solution ?" This question was solved by Dubois [9] for a great number of strong solution classes. It turns out then that a strong solution with an initial data in L^2 verifies the energy *equality*, and not simply the energy inequality (3.2.2).
The criterion for strong-weak uniqueness which we will need is the following.

Theorem 3.2.5 ([9], Chapter 4) *Let $u_0 \in L^2_\sigma \cap X^{(0)}$, where X is a critical initial value space. Suppose X_T is a Banach space of functions on $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, for a time $T>0$, and set*

$$\widetilde{X}_T = X_T \cap \{u \in L^\infty_{\text{loc}}((0,T], L^\infty)\,,\ \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty < \infty\,,\ \lim_{t\to 0}\sqrt{t}\|u(t)\|_\infty = 0\} \ .$$

Suppose furthermore that the sequence u^n, given by

$$\begin{cases} u^1 = e^{t\Delta}u_0 \\ u^{n+1} = e^{t\Delta}u_0 - B(u^n,u^n) \end{cases} \ ,$$

converges in $\widetilde{X}_T$ to a solution u of NS.
Suppose finally that the convergence rate is such that

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{t}\|u^{n+1}(t) - u^n(t)\|_\infty \le C\rho^n \ ,$$

for some real number $\rho < 1$.
Then $u \in \mathcal{C}([0,T], L^2)$ and verifies the energy equality

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds = \|u_0\|_2^2 \ .$$

Actually, the hypothesis contained in the above theorem about the convergence rate of the fixed point method is not very restrictive : it is verified as soon as a solution u of (NS) is contructed with the help of a fixed point method, in a space whose norm includes the expression $\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty$.

3.2.3 Related problems

General domains

In this article, we have chosen to work in the setting of $\mathbb{R}^d$, but the Navier-Stokes equations can also be considered in a domain Ω, with a Dirichlet boundary condition. Weak solutions with the same properties than in the case of the whole space exist, and weak-strong uniqueness has been studied in this more general framework.
For example, if $\mathbb{R}^d$ is replaced by a domain Ω, weak-strong uniqueness still holds for a given u_0 if a weak solution exists, which belongs to the classical Serrin class $L^pL^q(\Omega)$, $\frac{2}{p}+\frac{d}{q}=1$ (see [31]). Ribaud [29] also considers the case of general domains.
However, all technical difficulties are solved much more easily in the setting of $\mathbb{R}^d$ and we chose therefore to work in this framework. In particular, the functional analysis problems and the construction of strong solutions are simplified ; for example, we have made a great use of Littlewood-Paley theory, relying on Fourier analysis, which must be replaced for general domains by much more complicated spectral methods.

Regularity of the weak solutions

We have been focusing in this paper on the uniqueness of the weak solutions, but another problem is still open, namely the regularity of these solutions. By regularity, we mean the belonging of a weak solution to the space $\mathcal{C}^\infty((0,T]\times\mathbb{R}^d)$.
Uniqueness and regularity of weak solutions are of course related problems. The uniqueness seems to be harder to establish, because it requires some kind of regularity at $t=0$. Regularity for $t>0$ does not a priori grant uniqueness because the bifurcation from u_0 might happen precisely at $t=0$.
In most cases, milder conditions than the ones known to ensure weak-strong uniqueness suffice to imply the regularity of weak solutions. Recall that the classical condition for weak-strong uniqueness is the belonging of a weak solution u of (NS) to some space L^qL^p, with $\frac{2}{q}+\frac{d}{p}=1$. If one simply wants regularity of weak solutions, this condition can be improved. For example, for $d=3$, Sohr [32] proved that if a weak solution u of (NS) verifies

$$u\in L^{s,r}([0,T],L^{q,\infty}) \text{ , with } T>0 \text{ , } 3<q<\infty \text{ , } 2<s\leq r<\infty \text{ and } \frac{2}{s}+\frac{3}{q}=1 \text{ ,}$$

then u is regular. Montgomery-Smith [26] proved that the same result holds if

$$\int_0^T \frac{\|u(t)\|_q^p}{1+\log^+\|u(t)\|_q}\,dt<\infty \text{ with } T>0 \text{ , } 3<q<\infty \text{ and } \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1 \text{ .}$$

A more complete review of existing results can be found in [3].

Finally, let us note that the regularity of suitable (in the sense of Caffarelli, Kohn and Nirenberg [6]) weak solutions belonging to $L^\infty L^d$ has recently been proved by Iskauriaza, Seregin and Šverák (see [30] [16] and references therein) using backward uniqueness theory for parabolic equations.

3.3 Statement of the main results

We will first state our results concerning the Navier-Stokes equations : Theorem A and Theorem B ; in order to do this, we simply need to define multiplier spaces.
However, the proof of these theorems will require the use of tools of harmonic analysis, in particular Theorem 3.3.1. These tools are presented in the following of this part.

3.3.1 Weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations

In this section, we will state our main results concerning the Navier-Stokes equations, trying to keep the technical points as elementary as possible.

First, let us define the Calderón fractional derivation operator Λ^α : it equals, for any real number α, $|D|^\alpha$; in other words

$$\Lambda^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi)) \ .$$

Secondly, we say that a function belongs to the multiplier space $\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2)$ if it maps, by pointwise multiplication, $\dot{H}^s$ in L^2 :

$$\mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) = \{f \in \mathcal{S}' \ , \ \|f\phi\|_2 \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\}$$

(see Section 3.3.2 for details).
Finally, we denote Lip for the set of lipschitzian functions, ie of functions whose gradient belongs to L^∞.
We can now define the spaces X_s.

Definition 3.3.1

$$\begin{cases} X_s = \mathbf{M}(\dot{H}^s, L^2) & \text{if } s \in (0,1] \\ X_s = \Lambda^s BMO & \text{if } s \in (-1,0] \\ X_{-1} = \text{Lip} \end{cases}$$

Let us state the main theorem ; we recall that for a functional space F, $F^{(0)}$ denotes the closure of the Schwartz class in F.

Theorem A *Let u and v be two Leray weak solutions of (NS) for a given $u_0 \in L^2_\sigma$. Suppose furthermore that for some $T > 0$, $u \in \mathcal{P}$, where either*

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}([0,T], X_1^{(0)})$$

or

$$\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r) \qquad \text{for some } r \in [-1,1) \ .$$

Then $u = v$ on $[0,T]$. Furthermore, u belongs to $\mathcal{C}([0,T], L^2)$ and the energy equality holds : if $t \in [0,T]$,

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds = \|u_0\|_2^2 \ .$$

The proof of Theorem A is given in Part 3.4.

Remark 3.3.1
- *Our result is optimal, in a sense which will be made precise in Section 3.4.2.*
- *In particular, the above theorem encompasses all the results given in Section 3.2.2 (except for the result of Kozono and Sohr related to $L^\infty L^d$). This can be checked using the embeddings of Proposition 2.4.2 of Chapter 2. Or one can observe that our method gives the optimal space $\mathcal{P}$ (see Section 3.4.2) which makes $F : L^{2/\alpha}\dot{H}^\alpha \times L^{2/\beta}\dot{H}^\beta \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ bounded, for some $\alpha, \beta \in [0,1]$. Since the proofs of all the results recalled in Section 3.2.2 (except the one of Kozono and Sohr) rely on the boundedness of F over $L^{2/\alpha}\dot{H}^\alpha \times L^{2/\beta}\dot{H}^\beta \times \mathcal{P}$, they are necessarily generalized by our criterion.*
- *Weak-strong uniqueness in the case $r \in [0,1]$ was already obtained by Lemarié [21] ; but for $r < 0$, our result is new.*

Remark 3.3.2 *Three different assertions (uniqueness, L^2 continuity, energy equality) are contained in Theorem A ; each of these assertions represents a gain of regularity for the Leray weak solution v. Indeed*

- *It is not known whether Leray weak solutions are, in general, unique.*
- *A Leray weak solution is a priori only weakly L^2 continuous, see Lemma 3.2.1.*
- *A Leray weak solution a priori only satisfies the energy inequality (3.2.2).*

These three points are of course related.

It is natural to wonder now : what is the set of initial data which yields a solution in one of the path spaces $\mathcal{P}$ appearing in Theorem A ? The answer to this question yields a criterion for the local uniqueness of weak solutions relying on the initial data.

Theorem B *Let $u_0 \in L^2_\sigma \cap X_1^{(0)}$. Then there exists $T > 0$ such that there exists a Leray solution u of (NS) which belongs to $\mathcal{C}([0,T], X_1^{(0)})$. Furthermore, this solution is unique, on $[0,T]$, in the class of Leray solutions.*

Similarly, take $u_0 \in L^2_\sigma \cap \dot{B}^{r-1\ (0)}_{X_r, \frac{2}{1-r}}$, for some $r \in (0,1)$. Then there exists $T > 0$ such that there exists a Leray solution u of (NS) which belongs to $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r)$. Furthermore, this solution is unique, on $[0,T]$, in the class of Leray solutions.

The proof of Theorem B which is given in section 3.5.4 only uses already known results of Lemarié [21] and Dubois [9].
Nevertheless, we will give an alternative proof of a part of this theorem in Part 3.5 ; this new approach is more simple, but it relies on a conjecture (stated in Section 2.2.3 of Chapter 2) which is known to be true in some particular cases only.

Remark 3.3.3 *The above theorem does not deal with the case $r \leq 0$; we did not succeed in treating it. One of the difficulties is that we are led to considering functions belonging to Lebesgue spaces in time, whose index is smaller than 2. It is difficult to give a meaning to the pointwise product of such functions, and hence to the nonlinear term in (NS).*

3.3.2 A result of harmonic analysis

In the previous section, we have stated our two main results concerning the Navier-Stokes equations. Their proofs require tools of harmonic analysis, which we present briefly now, together with the main result which we will use. For a more detailed exposition of these matters, and the proof of the main result, see Chapter 2.

Definitions of multiplier and paramultiplier spaces

We want to study how pointwise multiplication maps Sobolev spaces of various regularity indexes. Using Bony's paraproduct algorithm, we set

$$f\phi = \sum_j \Delta_j f S_j\phi + \sum_{|j-k|\leq 1} \Delta_j f \Delta_k \phi + \sum_j S_j f \Delta_j \phi$$
$$\stackrel{\text{déf}}{=} \quad \Pi(f,\phi) \quad + \qquad R(f,\phi) \qquad + \qquad \widetilde{\Pi}(f,\phi)\ .$$

We are led to considering the spaces of functions f for which (respectively) the applications

$$M_f \stackrel{\text{déf}}{:} \phi \mapsto f\phi \ , \ \Pi(f,\cdot) \ , \ \widetilde{\Pi}(f,\cdot) \ , \ R(f,\cdot)$$

are bounded from $\dot{H}^s$ to $\dot{H}^{s+\alpha}$. The following definition makes this precise.

Definition 3.3.2 *Let $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $s+\alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Then*

- $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \{f \in \mathcal{S}' \, , \, \|M_f(\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\}$
- $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \{f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} \, , \, \|\Pi(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\}$
- *If $\alpha < 0$,* $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \{f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} \, , \, \|\widetilde{\Pi}(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\}$;
  if $\alpha = 0$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^s) \stackrel{def}{=} L^\infty$.
- $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) \stackrel{def}{=} \{f \in \dot{B}^\alpha_{\infty,\infty} \, , \, \|R(f,\phi)\|_{\dot{H}^{s+\alpha}} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^s}\}$

Main result obtained in Chapter 2

In this section, we will state the main result proved in Chapter 2, and recall very quickly some basic facts about BMO^s spaces, whose proofs can also be found in Chapter 2.

The spaces BMO^s have been introduced by Youssfi [36] [37] as

$$BMO^s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^s)\ .$$

These spaces have the following properties (Proposition 2.1.2 of Chapter 2) :

- If $s > t$, $BMO^s \hookrightarrow BMO^t$.
- If $s = 0$, BMO^0 is the classical BMO space.
- If $s < 0$, $BMO^s = \dot{B}^0_{\infty,\infty}$.

As we will see, all the paramultiplier spaces can be described starting from the BMO^s, by (fractional) differentiation or integration.
We now come to the main theorem proved in Chapter 2.

Theorem 3.3.1 *Take $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $s+\alpha \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. One has then*

- $\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^s$.
- $\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$.
- *If* $\alpha < 0$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$.
- *If* $\alpha > 0$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \{0\}$;
  if $\alpha = 0$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = BMO^{|s|} \cap L^\infty$;
  if $\alpha < 0$, $\alpha \neq -2s$, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha}) = \Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$;
  if $s = 1/2$ *or* 1, $\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}) = \Lambda^{2s} BMO^s$.

The two following figures are an attempt to sum up the situation.

Value of s	$-d/2 < s < 0$	$s = 0$	$0 < s < \frac{d}{2}$
BMO^s	$\dot{B}^0_{\infty,\infty}$	BMO	BMO^s

Figure 3.1: The spaces BMO^s

Space considered	$\alpha > 0$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0$
$\mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\Lambda^{-\alpha} BMO^s$	BMO^s	$\Lambda^{-\alpha} BMO^s$
$\mathbf{R}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$	BMO^{-s}	$\Lambda^{-\alpha} BMO^{-s-\alpha}$
$\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$		L^∞	$\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$
$\mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$	$\{0\}$	$L^\infty \cap BMO^{\lvert s\rvert}$	If $s \neq -\alpha/2$, $\Lambda^{-\alpha} BMO^{\max(s,-s-\alpha)}$

Figure 3.2: Multiplier and paramultiplier spaces ; s and $s+\alpha$ are supposed to lie in $(-d/2, d/2)$

Back to the X_s spaces

In this very short section, we take the opportunity to give a first hint that the result of harmonic analysis which has been stated above (Theorem 3.3.1) is indeed useful in the context of the Navier-Stokes equations. Using this theorem, one sees that the X_s spaces defined in Definition 3.3.1 can also be given by (we drop the case $s = -1$, which is exceptional)

$$\begin{cases} X_s = \Lambda^s BMO^s & \text{if } s \in (0,1] \\ X_s = \Lambda^s BMO & \text{if } s \in (-1,0] \ . \end{cases}$$

The two above equalities show that the lack of symmetry in Definition 3.3.1 between the cases $s > 0$ and $s \leq 0$ was actually artificial.
More generally, we shall see that Theorem 3.3.1 plays a central role in the proof of the two theorems about the Navier-Stokes equations which we have stated, Theorem A and Theorem B.

3.4 Optimality and proof of Theorem A

3.4.1 Proof of Theorem A

This section is dedicated to the proof of Theorem A. We will often distinguish two cases, $r \in (0,1]$ and $r \in [-1,0]$. Theorem A has already been proved by Lemarié [21] in the former case ; in the latter case $r \in [-1,0)$, it is new. If $r \in [-1,0)$, new technical problems arise ; in particular, one has to make use of a paraproduct decomposition.

We need first some preparatory steps ; the following lemma is in some sense the key of the theorem, because it explains why, under the hypotheses of the theorem, the functional F is continuous (since $\mathcal{L} \hookrightarrow L^{2/\alpha}\dot{H}^{\alpha}$ for any $\alpha \in [0,1]$).

Lemma 3.4.1 *Let u belong to one of the path spaces $\mathcal{P}$ defined in Theorem A, and v belong to $\mathcal{L}$ (defined in (3.1.1)), both being divergence free. Then $(v \cdot \nabla u)$ can be written as a (finite) sum of functions which belong to one of the spaces $L^{\frac{2}{2-\alpha}}([0,T],\dot{H}^{-\alpha})$, for some $\alpha \in [0,1]$.*

PROOF OF THE LEMMA : We have to distinguish two cases :

Case 1 : $r \in (0,1]$ We can simply write

$$v \cdot \nabla u = \nabla \cdot (v \otimes u) \ ,$$

and then observe that $u \in L^{\frac{2}{1-r}}\mathbf{M}(\dot{H}^r, L^2)$ and $v \in L^{2/r}\dot{H}^r$. It follows immediately that

$$\nabla \cdot (v \otimes u) \in L^2\dot{H}^{-1} \ .$$

Case 2 : $r \in [-1,0]$ We use the paraproduct decomposition (see (2.1.5)), forgetting the vectorial nature of u and v for a moment :

$$v \cdot \nabla u = \Pi(\nabla u, v) + R(\nabla u, v) + \widetilde{\Pi}(\nabla u, v) \ .$$

Recall that u belongs to $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T],X_r)$, and v belongs to $\mathcal{L}$, hence to $L^{\frac{2}{r+1}}\dot{H}^{r+1}$ and $L^{\infty}L^2$. We will examine one by one the terms of the paraproduct decomposition.

- $\nabla u \in L^{\frac{2}{1-r}}\Lambda^{1+r}BMO = L^{\frac{2}{1-r}}\mathbf{\Pi}(L^2,\dot{H}^{-r-1})$ (see Theorem 3.3.1) and $v \in L^{\infty}L^2$ hence
$$\Pi(\nabla u, v) \in L^{\frac{2}{1-r}}\dot{H}^{-r-1} \ .$$
- $\nabla u \in L^{\frac{2}{1-r}}\Lambda^{1+r}BMO = L^{\frac{2}{1-r}}\mathbf{R}(\dot{H}^{r+1},L^2)$ (see Theorem 3.3.1) and $v \in L^{\frac{2}{1+r}}\dot{H}^{r+1}$ hence
$$R(\nabla u, v) \in L^1L^2 \ .$$
- $\nabla u \in L^{\frac{2}{1-r}}\dot{B}^{-1-r}_{\infty,\infty} = L^{\frac{2}{1-r}}\widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^{r+1},L^2)$ (due to the embedding $BMO \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ and to Theorem 3.3.1) and $v \in L^{\frac{2}{r+1}}\dot{H}^{r+1}$ hence
$$\widetilde{\Pi}(\nabla u, v) \in L^1L^2 \ .$$

In both cases, we have obtained the announced result : $(v\cdot\nabla u)$ is a (finite) sum of functions belonging to one of the spaces $L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}$, for some $\alpha \in [0,1]$. ■

The following proposition is actually the second assertion of the theorem.

Proposition 3.4.1 *Let u satisfy the hypotheses of Theorem A. It is then strongly L^2 continuous on $[0,T]$.*

Remark 3.4.1 *The classical way to prove the L^2 strong continuity of u under such hypotheses is to use the weak formulation of (NS), see [31]. We will use a different method, already used in [21] and based on the integral form of the Navier-Stokes equations.*

PROOF OF THE PROPOSITION : Since u is a Leray weak solution, it is also (see [21]) a solution of the integral Navier-Stokes equations

$$(INS) \qquad u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u) \ .$$

The trend $e^{t\Delta}u_0$ is clearly L^2 continuous. The other term, $B(u,u)$, is defined as

$$B(u,u)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u(s)\cdot\nabla u(s))ds \ .$$

But, using Lemma 3.4.1, all we have to show is actually that, if $z \in L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}$ for some $\alpha \in [0,1]$,

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}z(s)\,ds$$

is continuous with values in L^2. We can forget from now on the projector $\mathbb{P}$, since it is bounded on L^2. First, let us show that h is well defined. We have

$$\begin{aligned}\|\Delta_j h(t)\|_2 &\le \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\Delta_j z(s)\|_2 ds \\ &\le \int_0^t e^{-C(t-s)2^{2j}}2^{j\alpha}\|\Delta_j z(s)\|_{\dot{H}^{-\alpha}}ds \ .\end{aligned}$$

The last integral is bounded independently of $t \in [0,T]$ due to Hölder's inequality, since $s \mapsto \|\Delta_j z(s)\|_{\dot{H}^{-\alpha}}$ belongs to $L^{\frac{2}{2-\alpha}}([0,T])$ and $s \mapsto e^{-C(t-s)2^{2j}}2^{j\alpha}$ has a norm in $L^{2/\alpha}(-\infty,t]$ bounded independently of j. In other words,

$$\|\Delta_j h(t)\|_2 \le C\|\Delta_j z\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}} \ ,$$

so taking the square and summing over j we get using Minkowski's inequality

$$\|h(t)\|_2 \le C\|z\|_{L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}} \ . \tag{3.4.1}$$

This proves that h belongs to $L^\infty L^2$; proving the continuity is now easy. Suppose for example $t' < t$, then

$$h(t) - h(t') = \int_{t'}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}z(s)\,ds + \int_0^{t'} e^{(t'-s)\Delta}\mathbb{P}(e^{(t-t')\Delta} - Id)z(s)\,ds \ ,$$

and the estimate (3.4.1) yields the conclusion. ■

The following lemma is the key step in the proof of Theorem A.

Lemma 3.4.2 *Let u and v as in Theorem A. Set $w = u - v$. Then for any t in $[0,T]$,*

$$\langle u(t), v(t)\rangle + 2\int_0^t \langle \nabla u, \nabla v\rangle(s)\, ds = \|u_0\|_2^2 + \int_0^t \langle w\cdot\nabla u, w\rangle(s)\, ds\ .$$

Furthermore, the last term can be estimated by

$$\left|\int_0^t \langle w\cdot\nabla u, w\rangle(s)\, ds\right| \leq C\|u\|_{\mathcal{P}}\|w\|_{\mathcal{L}_t}^2\ ,$$

where $\mathcal{P}$ is defined in Theorem A.

Remark 3.4.2 *We will hereafter give a proof of Lemma 3.4.2 which is quite natural (the idea of it goes back to Serrin [31]). However, it has a flaw : it works only for $d \leq 4$. For the sake of completeness, we present in Section 3.4.4 another proof of this lemma, which works for any space dimension, but is more technical.*

PROOF : **1.** As mentioned above, we assume $d \leq 4$. Let us define first the family of mollifiers $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, where ρ is a smooth and even function supported in $[-1,1]$. Take u, v as in the statement of Theorem A and $t \in [0,T]$; we set for any $s \in [0,t]$

$$u_n(s) = \int_0^t \rho_n(s-\tau)u(\tau)d\tau \qquad\qquad v_n(s) = \int_0^t \rho_n(s-\tau)v(\tau)d\tau\ .$$

We now observe that, for $d = 2, 3$ or 4, we can modify the statement of Lemma 3.2.1 by allowing ϕ to belong to $H^1([0,t], H^1)$.

To prove this, we notice that by Hölder's inequality and Sobolev injection we have

$$|\langle u\cdot\nabla u, \phi\rangle| \leq C\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^d}\|\phi\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^d}\|\phi\|_{\dot{H}^1}\ ;$$

by Sobolev injection and interpolation this last quantity is smaller than

$$C\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2\cap\dot{H}^1}\|\phi\|_{\dot{H}^1}$$

provided $d \leq 4$. Therefore, if $u \in \mathcal{L}_t$ and $\phi \in H^1([0,t], H^1)$ it becomes possible to give a meaning to

$$\int_0^t \langle u\cdot\nabla u, \phi\rangle ds\ ,$$

and an approximation argument (see Serrin ([31])) shows that Lemma 3.2.1 is true for $\phi \in H^1([0,t], H^1)$.

We can now apply Lemma 3.2.1 to u with v_n as a test function, and to v with u_n as a test function ; we get

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (\langle u, \partial_t v_n\rangle - \langle \nabla u, \nabla v_n\rangle - \langle u\cdot\nabla u, v_n\rangle)\, ds = \langle u(t), v_n(t)\rangle - \langle u_0, v_n(0)\rangle \\
&\int_0^t (\langle v, \partial_t u_n\rangle - \langle \nabla v, \nabla u_n\rangle - \langle v\cdot\nabla v, u_n\rangle)\, ds = \langle v(t), u_n(t)\rangle - \langle v_0, u_n(0)\rangle\ .
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

All we have to do is now to sum these two equalities and pass to the limit $n \to \infty$.

2. We find first that

$$\int_0^t \langle u, \partial_t v_n\rangle\, ds + \int_0^t \langle v, \partial_t u_n\rangle\, ds = \int_0^t \int_0^t \partial_t \rho_n(\tau - s)\left[\langle v(\tau), u(s)\rangle + \langle v(s), u(\tau)\rangle\right]\, ds\, d\tau = 0 \tag{3.4.3}$$

since ρ is an even function. Besides, we have clearly

$$\int_0^t \left[\langle \nabla u, \nabla v_n\rangle + \langle \nabla v, \nabla u_n\rangle\right]\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\int_0^t \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, ds\ . \tag{3.4.4}$$

Let us examine now

$$\langle u_0, v_n(0)\rangle - \frac{1}{2}\langle u_0, v_0\rangle = \int_0^1 \rho(s)\,\langle u_0, v\left(\frac{s}{n}\right) - v(0)\rangle\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

by weak L^2 continuity of v and the Lebesgue theorem. In other words,

$$\langle u_0, v_n(0)\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\langle u_0, v_0\rangle \tag{3.4.5}$$

and, likewise,

$$\begin{aligned}
&\langle v_0, u_n(0)\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\langle u_0, v_0\rangle \\
&\langle v(t), u_n(t)\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\langle u(t), v(t)\rangle \\
&\langle u(t), v_n(t)\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\langle u(t), v(t)\rangle\ .
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

3. We are left with the convection terms. Thanks to Lemma 3.4.1, we know that $u\cdot\nabla u$ can be written as a sum of functions each of which belongs to a space $L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}$, for some α in $[0,1]$. On the other hand, we know that v belongs to $L^{\frac{2}{\alpha}}\dot{H}^{\alpha}$ for any $\alpha \in [0,1]$. It is therefore clear that

$$\int_0^t \langle u\cdot\nabla u, v_n\rangle\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \langle u\cdot\nabla u, v\rangle\, ds\ . \tag{3.4.7}$$

For the last term, an integration by parts (justified since $d \le 4$) yields

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle v\cdot\nabla v, u_n\rangle\, ds &= -\int_0^t \langle v\cdot\nabla u_n, v\rangle\, ds \\
&= -\int_0^t \int_{n(s-t)}^{ns} \rho(\tau)\langle v(s)\cdot\nabla u\left(s - \frac{\tau}{n}\right), v(s)\rangle\, d\tau\, ds\ .
\end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle v\cdot\nabla v, u_n\rangle\, ds + \int_0^t \langle v\cdot\nabla u, v\rangle\, ds \\
&\quad= \int_{1/n}^{t-1/n}\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\langle v(s)\cdot\nabla\left[u(s) - u\left(s-\frac{\tau}{n}\right)\right], v(s)\rangle\, d\tau\, ds \\
&\qquad - \int_{[0,1/n]\cup[t-1/n,t]}\int_{\max(-1,-t+ns)}^{\min(1,ns)} \rho(\tau)\langle v(s)\cdot\nabla u\left(s-\frac{\tau}{n}\right), v(s)\rangle\, d\tau\, ds \\
&\qquad + \int_{[0,1/n]\cup[t-1/n,t]} \langle v\cdot\nabla u, v\rangle\, ds \\
&\quad\overset{\text{def}}{=} I + II + III\ .
\end{aligned}$$

Using the same arguments as in Lemma 3.4.1, we get

$$|I| \leq C\|v\|^2_{\mathcal{L}_t} \int_{-1}^{1} \rho(\tau) \left\| u - u\left(\cdot - \frac{\tau}{n}\right)\right\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([1/n,t-1/n],X_r)} d\tau \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

and we see similarly that

$$\lim_{n\to\infty} II = \lim_{n\to\infty} III = 0 \ .$$

Finally, we have shown that

$$\int_0^t \langle v\cdot\nabla v, u_n\rangle \, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} - \int_0^t \langle v\cdot\nabla u, v\rangle \, ds \ . \tag{3.4.8}$$

4. To prove the first assertion of the lemma, it suffices to gather the equations (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5), (3.4.6), (3.4.7) and (3.4.8), and to insert these limits in the sum of the two equalities of (3.4.2).
The proof of the second assertion of the lemma (estimate on the trilinear term) is a repetition of arguments already given, in particular Lemma 3.4.1. ■

We now come to the proof of Theorem A, but most of the work has already been done.

PROOF OF THEOREM A : **1.** First remark that the energy equality can be proved using exactly the same technique as in Lemma 3.4.2. We will now prove the uniqueness.

2. Assume first $r \neq 1$.
Let T_0 be the largest real number smaller than T such that $u = v$ on $[0, T_0]$. We will suppose that $T_0 < T$ and obtain a contradiction. By weak continuity $u(T_0) = v(T_0)$, so we can take $T_0 = 0$.
On the one hand, u and v verify the energy inequality

$$\|u\|^2_{\mathcal{L}_t} = \|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \leq \|u_0\|_2^2$$
$$\|v\|^2_{\mathcal{L}_t} = \|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds \leq \|v_0\|_2^2 \ ;$$

on the other hand, lemma 3.4.2 yields

$$\|u_0\|_2^2 - \langle u, v\rangle(t) - 2\int_0^t \langle \nabla u, \nabla v\rangle(s) ds = -\int_0^t \langle w\cdot\nabla u, w\rangle(s)\, ds \leq C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([0,t],X_r)} \|w\|^2_{\mathcal{L}_t} \ .$$

Combining these two estimates, we get that

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{\mathcal{L}_t} &= \|w(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 ds \\
&= \|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 - 2\langle u, v\rangle(t) + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds + 2\int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds \\
&\qquad - 4\int_0^t \langle \nabla u, \nabla v\rangle(s) ds \\
&\leq C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([0,t],X_r)} \|w\|^2_{\mathcal{L}_t} \ .
\end{aligned}$$

We now simply have to choose $t > 0$ such that $C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([0,t],X_r)} < 1$; then $w = 0$ on $[0, t]$, ie $u = v$ on $[0, t]$: this is the contradiction we were looking for.

3. Assume now $r = 1$, ie $u \in \mathcal{C}([0,T], X_1^{(0)})$. If $\epsilon > 0$, we can choose λ and ζ such that

$$\begin{aligned} &u = \lambda + \zeta \\ &\|\lambda\|_{L^\infty([0,T],X^1)} < \epsilon \\ &\zeta \in L^\infty([0,T], L^\infty) \ . \end{aligned}$$

Then the trilinear term can be estimated as follows for $t < T$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \langle w \cdot \nabla u, w \rangle(s)\, ds \right| &= \left| \int_0^t \langle w \cdot \nabla w, \lambda + \zeta \rangle(s)\, ds \right| \\ &\leq C\epsilon \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 ds + C\|\zeta\|_{L^\infty([0,\tau],L^\infty)} \left(\int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2C\epsilon \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 ds + \frac{C}{\epsilon} \int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds \ . \end{aligned}$$

We choose ϵ such that $2C\epsilon < 1$; proceeding as in the case $r \neq 1$, we get

$$\|w\|_{\mathcal{L}_t}^2 \leq \frac{C}{\epsilon} \int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds \ .$$

If we now apply the Gronwall lemma, we obtain that $u = v$ on $[0,T]$. ■

3.4.2 Continuity of the trilinear term : a heuristic approach

We would like in this section to investigate the optimality of Theorem A. All the manipulations we will perform will be rather formal, but could be justified.

As we have seen, the continuity of the trilinear term is the crucial point to prove weak-strong uniqueness, and we could almost say that weak-strong uniqueness holds for a path space $\mathcal{P}$ if and only if F is continuous on $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{P}$.

Splitting of the trilinear term

To study the continuity of F, we are going to split it into three terms, using the paraproduct algorithm, as was already done in [14].

To simplify the notations, we will consider that F operates on real functions, and not on vector fields. The reader can check that we are perfectly elicited to do so. With this convention we have

$$\begin{aligned} F(u,v,h) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) \cdot h \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Pi(h,u) \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\Pi}(h,u) \nabla v \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} R(h,u) \nabla v \, dx \, dt \\ &\overset{\text{def}}{=} F_\Pi(u,v,h) + F_{\widetilde{\Pi}}(u,v,h) + F_R(u,v,h) \ . \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

If one drops the exceptional case $s = -1$, it is actually, as was noted in [14], the term F_Π which determines the continuity of F. Indeed, we will see that we have to require less regularity on h in order to make the two other terms $F_{\widetilde{\Pi}}$ and F_R continuous.

We will successively discuss the boundedness of F_Π, $F_{\widetilde{\Pi}}$ and F_R. Due to the divergence-free condition for elements of $\mathcal{L}$, we have

$$F(u,v,h) = \int\int (u\cdot\nabla v)\cdot h = -\int\int (u\cdot\nabla h)\cdot v$$

and each one of the three terms F_Π, $F_{\widetilde{\Pi}}$ and F_R can also be written in two different ways. It turns out that, depending on which one of these terms one considers, one of the two formulations is better. So for each of the three terms, we shall study only the formulation which gives the best results.

Continuity of F_Π

Since, for any α and β in $[2,\infty]$, $u\in L^\alpha\dot H^{2/\alpha}$ and $\nabla v\in L^\beta\dot H^{2/\beta-1}$, and since

$$F_\Pi(u,v,h) = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \Pi(h,u)\nabla v\,dx\,dt\ ,$$

a straightforward computation shows that a sufficient condition for F_Π to be well-defined is

$$h\in L^{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\alpha-\beta}}\mathbf{\Pi}(\dot H^{2/\alpha},\dot H^{1-2/\beta}) \text{ for some } \alpha,\beta\in[2,\infty]\ .$$

We also have the following embedding property

$$\text{if } s>t \quad , \quad \mathbf{\Pi}(\dot H^s,\dot H^{s+\alpha})\hookrightarrow\mathbf{\Pi}(\dot H^t,\dot H^{t+\alpha})$$

(Lemma 2.3.1 of Chapter 2), and therefore the above criterion is implied by the following one

$$\begin{cases} h\in L^{\frac{2}{1-r}}\mathbf{\Pi}(\dot H^r,L^2) \text{ for some } r\in[0,1] \\ \text{or } h\in L^{\frac{2}{1+t}}\mathbf{\Pi}(L^2,\dot H^t) \text{ for some } t\in[0,1]\ , \end{cases}$$

which we can also write, if $s\neq -1$, as

$$h\in L^{\frac{2}{1-r}}X_r \text{ for some } r\in(-1,1]\ . \tag{3.4.10}$$

Continuity of $F_{\widetilde{\Pi}}$

To study the continuity of $F_{\widetilde{\Pi}}$, we will use the well-known identity

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(u\cdot\nabla v)\cdot h\,dx\,dt = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(u\cdot\nabla h)\cdot v\,dx\,dt\ . \tag{3.4.11}$$

This identity is simply the result of an integration by parts, where we use the fact that u is divergence free. Applying the same idea to $F_{\widetilde{\Pi}}$, we obtain

$$\begin{aligned} F_{\widetilde{\Pi}}(u,v,h) &= \sum_{i,j=1}^d\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\Delta_k u_i\,\partial_i v_j\,S_k h_j\,dx\,dt \\ &= -\sum_{i,j,k}\int\int \Delta_k u_i\,v_j\,S_k\partial_i h_j \\ &= -\int\int\widetilde{\Pi}(\nabla h,u)v\ . \end{aligned}$$

Since, for any α and β in $[2,\infty]$, $u \in L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha}$ and $v \in L^\beta \dot{H}^{2/\beta}$, $F_{\widetilde{\Pi}}$ will be continuous if, for some α and β,

$$\nabla h \in L^{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\alpha-\beta}} \widetilde{\mathbf{\Pi}}(\dot{H}^{2/\alpha}, \dot{H}^{-2/\beta}) = \begin{cases} L^1 L^\infty & \text{if } \alpha = \beta = \infty \\ L^{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\alpha-\beta}} \dot{B}^{-2/\beta-2/\alpha}_{\infty,\infty} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In other words, it suffices that

$$\begin{cases} h \in L^1 \,\mathrm{Lip} \\ \text{or} \quad h \in L^{\frac{2}{1-r}} \dot{B}^{-r}_{\infty,\infty} \quad \text{for some } r \text{ in (-1,1].} \end{cases}$$

and this last space contains $L^{\frac{2}{1-r}} X_r$.

Continuity of F_R

We now come to the last term

$$F_R(u,v,h) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} R(h,u) \nabla v \, dx \, dt \ .$$

As in the last two subsections, a sufficient condition for F_R to be continuous is that, for some α and β in $[-1,1]$

$$h \in L^{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\alpha-\beta}} \mathbf{R}(\dot{H}^{2/\alpha}, \dot{H}^{1-2/\beta}) \ .$$

Thanks to theorem 3.3.1, we can reformulate this criterion as

$$\begin{aligned} & h \in L^\infty \Lambda BMO \\ & \text{or, for some } r \in [-1,1),\ h \in L^{\frac{2}{1-r}} \dot{B}^{-r}_{\infty,\infty} \ , \end{aligned}$$

and the first space above contains $L^\infty X_1$, and the latter $L^{\frac{2}{1-r}} X_r$.

Making use of "div-curl" type lemmas

We have tried to exploit as far as possible the belonging of u and v to certain functional spaces in order to find optimal criteria on $\mathcal{P}$ that make F bounded. But we can try to make use of another piece of information about u and v : that both are divergence-free. Since, furthermore, their gradient has a vanishing curl, it seems natural to apply "div-curl" lemmas (see [8], [37]). These lemmas state that, if $E = (E_1 ... E_d)$ is divergence free and $B = (B_1 ... B_d)$ is curl free, and if furthermore $E \in \dot{H}^s$, $B \in \dot{H}^{-s}$, then their inner product $E \cdot B$ belongs to a space which is a predual of BMO^s (in the case $s = 0$, it is the Hardy space $\mathcal{H}^1$).
If one tries to apply these lemmas, the resulting conditions on $\mathcal{P}$ that make F bounded are not better than the ones we have already found. For example, consider

$$F(u,v,h) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v) \cdot h \, dx \ .$$

We notice that $u \in L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha}$ and is divergence free, and $\nabla v \in L^\beta \dot{H}^{2/\beta - 1}$ and is curl free. In order to apply a div-curl lemma, we must assume that

$$\frac{2}{\alpha} = 1 - \frac{2}{\beta} \ .$$

Then F is bounded if h belongs to $L^2BMO^{2/\alpha}$. Since this space is embedded in L^2BMO for $\alpha \geq 0$, this boundedness criterion was already established in the analysis of the splitting of F into three terms.

In which sense is the criterion (3.4.10) optimal ?

Conclusion 3.4.1 *Our aim in this section was to find conditions on the path space $\mathcal{P}$ so that F be continuous from $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{P}$ to $\mathbb{R}$. As a conclusion, Theorem A (which is equivalent to (3.4.10) except in the limit case $r = 1$ for technical reasons) is optimal provided :*

- *One does not decompose more finely the functional F than with the paraproduct we have used - but we do not see how to achieve a finer decomposition.*
- *One does not use simultaneously more knowledge about the functions u and v (the arguments of F) than the vanishing of their divergence and the belonging of u to $L^\alpha \dot{H}^{2/\alpha}$ and of v to $L^\beta \dot{H}^{2/\beta}$ for some α and β - but we do not see how to exploit genuinely the fact that $u, v \in L^\infty L^2 \cap L^2 \dot{H}^1$. Really taking advantage of the fact that u and v are solutions of the Navier-Stokes equations seems out of reach.*

3.4.3 Related results

We have been studying in this paper mainly two problems : the weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations, and the continuity of the trilinear term F. However, the method we have used, i.e. the use of paramultiplier and multiplier spaces, yields, almost without changes in the proof of Theorem A, the results that we are about to present.

Exterior force

We consider the Navier-Stokes system to which an exterior force f is added. It becomes

$$(NSF) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = \nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

We take the exterior force f in $L^2\dot{H}^{-1}$. Then Theorem 3.2.1 (global existence of Leray weak solutions) still holds, but the energy inequality (3.2.2) must be replaced by

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds - \int_0^t \langle f, u \rangle(s) \, ds \leq \ \|u_0\|_2^2 \ . \tag{3.4.12}$$

Strong solutions can also be constructed if an exterior force is added ; however, f must be taken in a certain space so that the fixed point argument which is used still works. We do not detail this space here.

The theorem of weak strong uniqueness which can be proved in this new setting is very similar to Theorem A.

Theorem 3.4.1 *Let u and v be two Leray weak solutions of (NSF) for a given $u_0 \in L^2_\sigma$, and $f \in L^2\dot{H}^{-1}$. Suppose furthermore that for some $T > 0$, $u \in \mathcal{P}$, where either*

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}([0,T], X_1^{(0)})$$

or

$$\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r) \qquad \textit{for some } r \in [-1,1) \ .$$

Then $u = v$ on $[0,T]$. Furthermore, u belongs to $\mathcal{C}([0,T], L^2)$ and the energy equality holds for $t \in [0,T]$:

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds - \int_0^t \langle f, u\rangle(s)\, ds = \|u_0\|_2^2 \ .$$

PROOF : The proof is very similar to the one of Theorem A. The only difference is that a term corresponding to the exterior force must be added in the energy inequality verified by u and v :

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 \, ds - \int_0^t \langle f, u\rangle(s)\, ds \leq \ \|u_0\|_2^2$$
$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^2 \, ds - \int_0^t \langle f, v\rangle(s)\, ds \leq \ \|v_0\|_2^2 \ ,$$

and in the formula proved in Lemma 3.4.2 :

$$\langle u(t), v(t)\rangle + 2\int_0^t \langle \nabla u(s), \nabla v(s)\rangle ds = \|u_0\|^2 + \int_0^t \langle w\cdot\nabla u, w\rangle(s)\, ds + \int_0^t \langle f, u+v\rangle(s)\, ds \ .$$

Therefore, when it comes to applying the Gronwall lemma (see the proof of Theorem A), the contributions from terms including f cancel, and the situation is the same as in the case where no exterior force is applied. ■

Stability of the solutions of (NS)

Weak-strong uniqueness is actually only a particular case of stability for the weak solutions of (NS). Proceeding as in [14], we will adapt our proof of weak-strong uniqueness in order to get a stability result for the solutions of (NS) with respect to the initial data.

Theorem 3.4.2 *Let u and v be two Leray weak solutions of (NS) respectively associated to the initial data u_0 and v_0. Assume moreover that u belongs to*

$$\mathcal{P} = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r) \ \textit{with } r \in [-1,1) \ .$$

Then, denoting $w = u - v$ and $w_0 = u_0 - v_0$, we have

$$\|w(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 \, ds \leq \|w_0\|_2^2 \exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}} \, ds\right)$$

for any $t \in [0,T]$, and for a constant C independent of u and v.

PROOF : Proceeding as in the proof of Lemma 3.4.2, we obtain the relation

$$\langle v, u\rangle(t) + 2\int_0^t \langle \nabla v, \nabla u\rangle = \begin{cases} \langle v_0, u_0\rangle + \displaystyle\int_0^t \langle w\cdot\nabla w, u\rangle(s)\, ds & \text{if } r \in (0,1] \\ \langle v_0, u_0\rangle - \displaystyle\int_0^t \langle w\cdot\nabla u, w\rangle(s)\, ds & \text{if } r \in [-1,0] \end{cases}$$

if $t \in [0,T]$. Combining it with the energy inequality (3.2.2) verified by u and v, and the estimates developed in the proof of Lemma 3.4.2, we obtain

$$\|w(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2\, ds \;\leq\; \|w_0\|_2^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{X_r} \|w(s)\|_{L^2}^{1-r} \|w(s)\|_{\dot{H}^1}^{r+1}\, ds$$

and an application of Young's inequality yields

$$\|w(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2\, ds \;\leq\; \|w_0\|_2^2 + C\int_0^t \|w(s)\|_2^2 \|u(s)\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}} ds\ .$$

It suffices now to use Gronwall's lemma to complete the proof of the theorem. ■

Remark 3.4.3 *The case $r = 1$ is left aside in the above theorem. The reason for this is clear if one looks at the proof of Theorem A : in order to prove that weak-strong uniqueness holds in this case, we most follow a quite different procedure than for other values of r.*

Infinite energy solutions of the Navier-Stokes equations in 2 dimensions

The trilinear functional F also plays a role in the study of the two-dimensional Navier-Stokes equations, see Chapter 4. We sum up below some of the ideas used in Chapter 4, and show how the path spaces $\mathcal{P}$ of Theorem A can be used in this framework.

In two dimensions, the energy space is a critical space, and one has the embedding

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$$

for $2 \leq p, q \leq \infty$. Gallagher and Planchon studied in [14] infinite energy solutions, i.e. solutions whose initial data belong to one of these Besov spaces strictly larger than L^2, and which are continuous in time with values in this Besov space. It is possible to construct local in time solutions, using a fixed point theorem, and then to extend them for any time, with the help of an argument of perturbation, due to the above embedding.
In order to control these infinite energy solutions, one can use an energy inequality, and the boundedness of F turns out to be crucial then.
For this reason, the decay to 0 as $t \to \infty$ of a solution u of (NS) can be proved if one can write $u = v + w$, where w belongs to some path space $\mathcal{P}$, which makes

$$F : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

continuous, and v is of finite energy, locally in time and away from zero, see Chapter 4. The present chapter therefore gives new classes of initial data whose associated solution goes to 0 as $t \to \infty$.

3.4.4 Proof of Lemma 3.4.2 in the case $d \geq 5$

In this section, we shall give a proof of Lemma 3.4.2 which is valid for any space dimension d. The idea of it is due to Lemarié, see [21], Chapter 21.
We need first to define space-time mollifiers and to study quickly their action on multiplier or paramultiplier spaces.

Let $\rho_n(x,t)$ be a family of mollifiers given by

$$\rho_n(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_n^{(x)}(x)\rho_n^{(t)}(t) = n^{d+1}\rho^{(x)}(nx)\rho^{(t)}(nt)\ , \tag{3.4.13}$$

where $\rho^{(x)}$ and $\rho^{(t)}$ are smooth even functions of integral 1, $\rho^{(t)}$ is supported in the unit ball, and $\widehat{\rho}^{(x)}$ (the Fourier transform of $\rho^{(x)}$) as well.

When applying these multipliers to functions in multiplier or paramultiplier spaces, the following proposition will prove to be very useful.

Proposition 3.4.2 *Let $s \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ and α be such that $s + \alpha \in (-\frac{d}{2}, s)$.*

- *If $\phi \in \dot{H}^s$ and $f \in \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, we have*

$$(\rho_n^{(x)} * f)\phi \to f\phi \qquad \text{in } \dot{H}^{s+\alpha}.$$

  Likewise, if $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$,

$$\Pi(\rho_n^{(x)} * f, \phi) \to \Pi(f, \phi) \qquad \text{in } \dot{H}^{s+\alpha}.$$

  Similar statements hold for the operators R and $\widetilde{\Pi}$.

- *Take now β, γ and μ three numbers in $[1, \infty]$ such that $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{1}{\mu}$. If $\phi \in L^\beta \dot{H}^s$ and $f \in L^\gamma \mathbf{M}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$, we have*

$$(\rho_n * f)\phi \to f\phi \qquad \text{in } L^\mu \dot{H}^{s+\alpha}.$$

  Likewise, if $f \in L^\gamma \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$,

$$\Pi(\rho_n * f, \phi) \to \Pi(f, \phi) \qquad \text{in } L^\mu \dot{H}^{s+\alpha}.$$

  Similar statements hold for the operators R and $\widetilde{\Pi}$.

PROOF : We do not give all the details. Since the mollifiers do essentially cut the high frequencies, we can replace them with the Littlewood-Paley operators S_n. We want to show that

$$\Pi(S_n f, \phi) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Pi(f, \phi) \qquad \text{in } \dot{H}^{s+\alpha}$$

if $\phi \in \dot{H}^s$ and $f \in \mathbf{\Pi}(\dot{H}^s, \dot{H}^{s+\alpha})$. Due to the frequency localisation of the Littlewood-Paley operators, we have

$$\Pi((\mathrm{Id} - S_n)f, \phi) \sim \sum_{j>n} \Pi(\Delta_j f, \phi) \sim (\mathrm{Id} - S_n)\Pi(f, \phi) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{in } \dot{H}^{s+\alpha}\ .$$

The same argument applies to R and $\widetilde{\Pi}$, and the case of a classical pointwise multiplier reduces to the study of the operators R, Π and $\widetilde{\Pi}$.

The second assertion of the proposition (when Lebesgue spaces in time are considered) can be deduced from the first by approximating ϕ by step functions in time. ■

With the help of the previous propositions, we can prove Lemma 3.4.2 in any space dimension.

NEW PROOF OF LEMMA 3.4.2 :
1. Recall first that (ρ_n) is the family of space-time mollifiers defined in (3.4.13).

We know that u and v verify (NS) ; we denote by p and q, respectively, the pressures associated to these velocity fields. The vector fields $\rho_n * u$ and $\rho_n * v$ are smooth, therefore we can write

$$\begin{aligned}\partial_t((\rho_n * u)\cdot(\rho_n * v)) &= (\rho_n * \partial_t u)\cdot(\rho_n * v) + (\rho_n * u)\cdot(\rho_n * \partial_t v)\\ &= (\rho_n * \Delta u)\cdot(\rho_n * v) + (\rho_n * \nabla(u\otimes u))\cdot(\rho_n * v) + (\rho_n * \nabla p)\cdot(\rho_n * v)\\ &\quad + (\rho_n * u)\cdot(\rho_n * \Delta v) + (\rho_n * u)\cdot(\rho_n * \nabla(v\otimes v)) + (\rho_n * u)\cdot(\rho_n * \nabla q)\ .\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

The idea is now to integrate this equation in x, perform the necessary integrations by parts, and then let n tend to infinity. But this program is not as easy a job as it may seem.

2. We begin with the terms in the above equation which behave nicely. Since u and v both belong to $L^\infty L^2$, we have for any $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\langle \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t(u_n v_n), \phi\rangle = -\langle \int_{\mathbb{R}^d} u_n v_n, \partial_t\phi\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\langle\langle u, v\rangle, \partial_t\phi\rangle\ .$$

In other words,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t(u_n v_n) = \partial_t\langle u, v\rangle \qquad \text{in } \mathcal{D}'(0,T)\ .$$

3. We now come to the right-hand side of (3.4.14). An integration by parts yields :

$$(\rho_n * \Delta u)\cdot(\rho_n * v) = \nabla\cdot((\rho_n * (\nabla\otimes u))\cdot(\rho_n * v)) - (\rho_n * (\nabla u))\cdot(\rho_n * (\nabla v))\ . \tag{3.4.15}$$

But since $v \in L^\infty L^2$ and $\nabla u \in L^2 L^2$, the space-time mollified functions $\rho_n * v$ and $\rho_n * (\nabla\otimes u)$ are continuous L^2-valued functions of t, and the first term of the right hand side of the above equation is, for any time t, the gradient of an L^1 function, hence of zero integral.
Since

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_n * \nabla u)\cdot(\rho_n * \nabla v) = \nabla u\cdot\nabla v \quad \text{ in } L^1L^1,$$

the convergence of the integral of the second term in the right-hand side of (3.4.15) if n goes to infinity is clear and we get :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * \Delta u)\cdot(\rho_n * v) = -\lim_{n\to\infty} \langle \rho_n * (\nabla u), \rho_n * (\nabla v)\rangle = -\langle \nabla u, \nabla v\rangle \qquad \text{in } L^1(0,T).$$

Symmetrically,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * u)\cdot(\rho_n * \Delta v) = -\langle \nabla u, \nabla v\rangle \qquad \text{in } L^1(0,T).$$

4. We now come to the terms of (3.4.14) involving the pressure. Performing again an integration by parts, we have

$$(\rho_n * \nabla p)\cdot(\rho_n * v) = \nabla\cdot((\rho_n * p)(\rho_n * v)) \tag{3.4.16}$$

due to the zero divergence of v. But the pressure is, modulo a constant, given by

$$p = \sum_{i,j} R_i R_j (u_i u_j)\ ,$$

where the R_i are the Riesz transforms defined by $R_i = \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$. Furthermore, $u \in \mathcal{L} \hookrightarrow L^4\dot{H}^{1/2} \hookrightarrow L^4 L^{\frac{2d}{d-1}}$ so by the above formula, $p \in L^1 L^{\frac{d}{d-1}}$ (locally in time). Finally, $\rho_n * v$ belongs to $L^\infty L^2 \cap L^\infty L^\infty \hookrightarrow L^\infty L^d$, so $(\rho_n * p)(\rho_n * v)$ belongs to $L^\infty L^1$ and the expression in (3.4.16) has a zero integral :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * \nabla p) \cdot (\rho_n * v) = 0 \ .$$

Symmetrically

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * u) \cdot (\rho_n * \nabla q) = 0 \ .$$

5. We deal now with the term $(\rho_n * \nabla(u \otimes u)) \cdot (\rho_n * v)$.
The estimates we need here have already been established in Lemma 3.4.1 : recall that $(u \cdot \nabla u)$ can be written as a sum of terms, each of them belonging to one space $L^{\frac{2}{2-\alpha}}\dot{H}^{-\alpha}$, with $\alpha \in [0,1]$.
On the other hand, $v \in L^{\frac{2}{\alpha}}\dot{H}^{\alpha}$, for all α in $[0,1]$. We get easily

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * (u \cdot \nabla u)) \cdot (\rho_n * v) = \langle u \cdot \nabla u, v \rangle \qquad \text{in } L^1(0,T).$$

6. Only one term remains, $(\rho_n * \nabla(v \otimes v)) \cdot (\rho_n * u)$.
With the same justification as above, we perform an integration by parts to get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * \nabla(v \otimes v)) \cdot (\rho_n * u) &= -\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * (v \otimes v)) \cdot (\rho_n * (\nabla u)) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \rho_n^{(t)}(s) \langle v(t-s) \cdot \nabla u_n(t), v(t-s) \rangle \, ds \ , \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

where $u_n = \rho_n^{(x)} * \rho_n^{(x)} * \rho_n^{(t)} * u$.
Case 1 : $r \in (0,1]$ Keeping in mind that $u \in L^{\frac{2}{1-r}}\mathbf{M}(\dot{H}^r, L^2)$ and that $v \in L^{2/r}\dot{H}^r \cap L^2\dot{H}^1$, and using Proposition 3.4.2, we see that the above equation gives as $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * \nabla(v \otimes v)) \cdot (\rho_n * u) &= \lim_{n\to\infty} -\int_{\mathbb{R}} \rho_n^{(t)}(s) \langle v(t-s) \cdot \nabla u_n(t), v(t-s) \rangle \, ds \\ &= -\langle v \cdot \nabla u, v \rangle \ , \end{aligned}$$

and the limit holds in $L^1(0,T)$.

Case 2 : $r \in [-1,0]$ The integrand of the right-hand side of (3.4.17) can be, using the paraproduct algorithm, split into three parts

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n * \nabla(v \otimes v)) \cdot (\rho_n * u) = -\int_{\mathbb{R}} \rho_n^{(t)}(s) \langle (\Pi + R + \tilde{\Pi})(\nabla u_n(t), v(t-s)), v(t-s) \rangle \, ds \ .$$

Using Lemma 3.4.2 and the same arguments as in Lemma 3.4.1, we see that

$$\lim_{n\to\infty} \int (\rho_n * (v \cdot \nabla v)) \cdot (\rho_n * u) = -\langle v \cdot \nabla u, v \rangle \qquad \text{in } L^1(0,T).$$

7. Putting together the results of **1. 2. 3. 4. 5. 6.**, we obtain the equality in $\mathcal{D}'(0,T)$

$$\partial_t \langle u, v \rangle = -2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle (u - v) \cdot \nabla u, v \rangle \ .$$

The right hand side of the above equality belongs to L^1, but to integrate this equation, we need Proposition 3.4.1 : it tells us that u is continuous with values in L^2. Since any weak solution of (NS) is weakly continuous with values in L^2, the function $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot v$ is continuous, therefore we can integrate the above equation and obtain

$$\langle u, v\rangle(t) = \|u_0\|_2^2 - 2\int_0^t \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_0^t \langle (u-v)\cdot\nabla u, v\rangle \ .$$

To complete the proof of the first assertion of the lemma, it suffices to show that

$$\langle w \cdot \nabla u, u\rangle(t) = 0$$

for any t ; this can be done using the same arguments as above.
The second assertion of the lemma (estimate on the trilinear term) has actually already been proved when we established that this term was well defined.
The lemma is proved. ■

3.5 The initial value problem

Theorem A gives path spaces $\mathcal{P}$ such that : if u is a solution of (NS) with the initial value u_0, and $u \in \mathcal{P}$, then weak-strong uniqueness holds. Recall that these path spaces $\mathcal{P}$ are $\mathcal{C}X_1^{(0)}$ or $L^{\frac{2}{1-r}}X_r$ with $r \in [-1, 1)$).
In this part, we would like to address the following question : to what initial value space $\mathcal{I}$ should u_0 belong to, so that the solution (or at least, one solution) u of (NS) is in $\mathcal{P}$?

3.5.1 The trend $e^{t\Delta}u_0$

A classical procedure to solve (NS) is to set up a fixed point argument for the integral equation (INS). Given an initial value space for u_0, the first step is to find a path space $\widetilde{\mathcal{P}}$ such that

$$u_0 \in \mathcal{I} \implies e^{t\Delta}u_0 \in \widetilde{\mathcal{P}} \ .$$

Then, one can solve (INS) in $\widetilde{\mathcal{P}}$ using Picard's theorem. We are going to apply this procedure backwards, ie for each one of the spaces $\mathcal{P} = \mathcal{C}X_1^{(0)}$ or $L^{\frac{2}{1-r}}X_r$, we will find $\mathcal{I}$ such that

$$u_0 \in \mathcal{I} \iff e^{t\Delta}u_0 \in \mathcal{P} \ .$$

Proposition 3.5.1 *Let $u_0 \in \mathcal{S}'$. Then*
(i) $e^{t\Delta}u_0 \in \mathcal{C}([0,\infty), X_1)^{(0)} \iff u_0 \in X_1^{(0)}$
(ii) If $r \in [0,1)$, $e^{t\Delta}u_0 \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty), X_r) \iff u_0 \in \dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}} = \dot{B}^{-1}_{BMO^r,\frac{2}{1-r}}$
(iii) If $r \in [-1,0]$, $e^{t\Delta}u_0 \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty), X_r) \iff u_0 \in \dot{B}^{-1}_{\infty,\frac{2}{1-r}}$

PROOF : (i) is obvious, by point (v) of proposition 2.3.4.

(ii) Suppose first $e^{t\Delta}u_0 \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty), X_r)$. The idea is then to write

$$\Delta_j u_0 = \Delta_j e^{-t\Delta} e^{t\Delta} u_0 \ .$$

The symbol of $\Delta_j e^{-t\Delta}$ reads $\psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{t|\xi|^2}$, therefore the convolution kernel of this operator is bounded in L^1 (independently of j) if $\frac{1}{2}4^{-j} < t < 2\cdot 4^{-j}$. Thus, if t lies in this interval, we have, since X_r is a shift-invariant Banach space,

$$\|\Delta_j f\|_{X_r} \leq C\|e^{t\Delta} f\|_{X_r} \ , \tag{3.5.1}$$

for a constant independent of j, and for any $f \in \mathcal{S}'$. Using this last inequality, we get

$$\left(2^{j(r-1)}\|\Delta_j u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}} = 2^{-2j}\|\Delta_j u_0\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}} \leq C\int_{\frac{1}{2}4^{-j}}^{2\cdot 4^{-j}} \|e^{t\Delta}u_0\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\, dt$$

and summing over j, we find

$$\|u_0\|_{\dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}}} = \left[\sum_j \left(2^{j(r-1)}\|\Delta_j u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}}\right]^{\frac{1-r}{2}} \leq C\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty),X_r)} \ .$$

This proves $\Rightarrow$ in (ii). In order to prove the converse implication, we will first show some inequalities related to the Littlewood-Paley operators. Take $\widetilde{\Delta}_j = \widetilde{\psi}(D)$ a Fourier multiplier supported in an annulus such that $\widetilde{\Delta}_j\Delta_j = \Delta_j$.
The symbol of $e^{t\Delta}\Delta$ (respectively $\Delta^{-1}\widetilde{\Delta}_j$) reads $e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2$ (respectively $|\xi|^{-2}\widetilde{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\xi)$), therefore the L^1 norm of its convolution kernel is proportional to $\frac{1}{t}$ (respectively 2^{-2j}). These two L^1 estimates enable us to write, since X_r is a shift-invariant Banach space,

$$\|e^{t\Delta}\Delta_j u_0\|_{X_r} = \|e^{t\Delta}\Delta\Delta^{-1}\widetilde{\Delta}_j\Delta_j u_0\|_{X_r} \leq C\frac{2^{-2j}}{t}\|\Delta_j u_0\|_{X_r} \ . \tag{3.5.2}$$

On the other hand, obviously,

$$\|e^{t\Delta}\Delta_j u_0\|_{X_r} \leq C\|u_0\|_{X_r} \ . \tag{3.5.3}$$

Take now $u_0 \in \dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}}$. Denoting $\epsilon_j = 2^{j(r-1)}\|\Delta_j u_0\|_{X_r}$, we have $\epsilon_j \in \ell^{\frac{2}{1-r}}$. We would like to estimate the integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+} \|e^{t\Delta}u_0\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\, dt \\
&\qquad \leq C\sum_j \int_{\frac{1}{2}4^{-j}}^{2\cdot 4^{-j}} \left[\left(\sum_{k<j}\|\Delta_k e^{t\Delta}u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}} + \left(\sum_{k\geq j}\|\Delta_k e^{t\Delta}u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}}\right] dt \\
&\qquad \leq C\sum_j \int_{\frac{1}{2}4^{-j}}^{2\cdot 4^{-j}} \left[\left(\sum_{k<j}\|\Delta_k u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}} + \left(\sum_{k\geq j}2^{2j-2k}\|\Delta_k u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}}\right] dt \ ,
\end{aligned}$$

where we have used (3.5.2) and (3.5.3). Now we can get rid of the integral sign :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+} \|e^{t\Delta}u_0\|_{X_r}^{\frac{2}{1-r}}\,dt \\
&\qquad \le C\sum_j \left[\left(\sum_{k<j} 2^{j(r-1)}\|\Delta_k u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}} + \left(\sum_{k\ge j} 2^{j(r-1)}2^{2j-2k}\|\Delta_k u_0\|_{X_r}\right)^{\frac{2}{1-r}}\right] \\
&\qquad \le C\sum_j \left[\left(\sum_{k<j} 2^{(j-k)(r-1)}\epsilon_k\right)^{\frac{2}{1-r}} + \left(\sum_{k\ge j} 2^{(j-k)(r+1)}\epsilon_k\right)^{\frac{2}{1-r}}\right] \\
&\qquad \le C\|\epsilon_k\|_{\ell^{\frac{2}{1-r}}}^{\frac{2}{1-r}}
\end{aligned}$$

because of Young's inequality. This proves (ii).

(iii) can be proved following the same lines as (ii). The only diffculty is that one has to use the duality between the Hardy space $\mathcal{H}^1$ and BMO in order to establish the analog of (3.5.1). Indeed, we write

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j f\|_\infty &\le C\|\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r\Lambda^{-r}e^{t\Delta}f\|_\infty \\
&\le \|\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r\|_{BMO\to L^\infty}\|\Lambda^{-r}e^{t\Delta}f\|_{BMO} \\
&\le \|\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r\|_{BMO\to L^\infty}\|e^{t\Delta}f\|_{X_r}\ ,
\end{aligned}$$

where $\|\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r\|_{BMO\to L^\infty}$ is the norm of the operator $\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r$ from BMO to L^∞. But this quantity is the $\mathcal{H}^1$ norm of the convolution kernel of $\Delta_j e^{-t\Delta}\Lambda^r$. Using the criterion in Stein [33], page 128, 5.2, we see that it is bounded by $C2^{jr}$ if $t \sim 4^{-j}$. Therefore, we get

$$\|\Delta_j f\|_\infty \le C2^{jr}\|e^{t\Delta}f\|_{X_r}$$

if $t \sim 4^{-j}$. This provides the equivalent of (3.5.1). ■

3.5.2 Construction of solutions and bicontinuity of B : the case $0 < r < 1$

In this section, we will construct local solutions of (NS) which belong to the path spaces arising in Theorem A, in the case $0 < r < 1$.
A simple application of Theorem 3.2.4 gives the following proposition.

Proposition 3.5.2 *Let $r \in (0,1)$ and $u_0 \in (\dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}})^{(0)}_\sigma$. Then there exists a time $T > 0$ and a solution u of (NS) such that $u \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,T],X_r)$.*

This proposition is not completely satisfactory : it applies only if u_0 is in the closure of the Schwartz class in $\dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}}$. To improve on this result, we need to examine the bicontinuity of the bilinear operator B defined in (3.2.1). Recall first the result of Fabes, Jones and Riviere [11].

Proposition 3.5.3 (Fabes, Jones and Riviere [11]) *If $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = 1$, with $q \in (d,\infty)$, and if $T > 0$,*

$$B\ :\ (L^p([0,T],L^q))^2 \to L^p([0,T],L^q)$$

is a bounded operator. Furthermore, its operator norm does not depend on T.

It is proved in Proposition 2.4.2 of Chapter 2 that $L^{d/s} \hookrightarrow X_s$; this embedding and the above result make the following proposition natural.

Proposition 3.5.4 *First, set $r \in (0,1)$ such that $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{-r}) = \Lambda^{2r} BMO^r$. Then for $T > 0$,*

$$B : (L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r))^2 \to L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r)$$

(B is defined in (3.2.1)) is a bounded operator. Furthermore, its operator norm does not depend on T.

Remark 3.5.1 *It is known that that $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{-r}) = \Lambda^{2r} BMO^r$ only in the cases $r = 1/2$ and $r = 1$, see Theorem 3.3.1. For the other $r > 0$, the problem is open.*

PROOF : Let $u, v \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r) = L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], \mathbf{M}(\dot{H}^r, L^2))$. Thanks to Proposition 2.3.4 of 2, we know that the pointwise product of two functions of $\mathbf{M}(\dot{H}^r, L^2))$ belongs to $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{-r}))$; consequently, we have

$$w = uv \in L^{\frac{1}{1-r}}([0,T], \mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{-r})) \ .$$

Since $\mathbf{M}(\dot{H}^r, \dot{H}^{-r}) = \Lambda^{2r} BMO^r$, we actually have

$$\widetilde{w} = \Lambda^{-r} w \in L^{\frac{1}{1-r}}([0,T], X_r) \ .$$

So it turns out that

$$B(u,v)(t) = \mathbb{P} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{(t-s)\Delta} \nabla \Lambda^r (\widetilde{w}(s)) dx ds \ ,$$

with $\widetilde{w} \in L^{\frac{1}{1-r}}([0,T], X_r)$.
Thanks to Theorem 2.3.3 of Chapter 2, we know that the Riesz transforms are bounded on X_r if $r \in (0, d/2)$, therefore we can forget from now on the operator $\mathbb{P}$. We now need the following classical lemma

Lemma 3.5.1 *If $r \in (0,1)$, the kernel K of the convolution operator $e^{\Delta} \nabla \Lambda^r$ belongs to L^1.*

PROOF OF THE LEMMA : We select a function θ in $\mathcal{D}$ equal to 1 in a neighborhood of 0. The symbol of $e^{\Delta} \nabla \Lambda^r$ reads

$$e^{-|\xi|^2} \xi |\xi|^r = \theta(\xi) e^{-|\xi|^2} \xi |\xi|^r + (1 - \theta(\xi)) e^{-|\xi|^2} \xi |\xi|^r \ .$$

The second term of the right-hand side of the above equation belongs to $\mathcal{S}$, hence its associated convolution kernel belongs to L^1. Turning to the first term, we remark that we only have to consider the case of a symbol of the type

$$\zeta(\xi) = \lambda(\xi) |\xi|^r \xi$$

with $\lambda \in \mathcal{D}$ equal to 1 in a neighbourhood of 0. We set $\widehat{g}(\xi) = \lambda(\xi)|\xi|^r$. A priori, g is only a tempered distribution. We intend to show that it belongs to L^1.
Since $\operatorname{Supp} \lambda$ is bounded, $g \in \mathcal{C}^\infty$. Furthermore,

$$\partial_1 \widehat{g}(\xi) = \partial_1 \lambda(\xi) |\xi|^r + r \lambda(\xi) \frac{\xi_1}{|\xi|^{2-r}} \ .$$

Once again, the first term above belongs to $\mathcal{S}$, so we are left with the second one. Let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform operator. We have

$$\mathcal{F}(\lambda(\xi)) = \widehat{\lambda}(x) \in \mathcal{S}$$
$$\mathcal{F}\left(\frac{\xi_1}{|\xi|^{2-r}}\right) = C\partial_1\left(\frac{1}{|x|^{d-2+r}}\right) = C\frac{x_1}{|x|^{d+r}} \cdot$$

This implies that

$$\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\lambda(\xi)\frac{\xi_1}{|\xi|^{2-r}}\right)\right| = \left|C\frac{x_1}{|x|^{d+r}} * \widehat{\lambda}(x)\right| \leq C\frac{|x_1|}{|x|^{d+r}}$$

for x large enough. We can infer from the above inequality a majoration of $g(x)$ for x tending to infinity :

$$|g(x)| = \left|\frac{C}{x_1}\mathcal{F}^{-1}(\partial_1\widehat{g}(\xi))\right| \leq C\frac{1}{|x|^{d+r}} \cdot$$

We now observe that

$$\zeta(\xi) = \widehat{g}(\xi)\beta(\xi)$$

with $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty$; therefore by the same argument as above

$$\mathcal{F}^{-1}(\zeta)(x) \overset{x\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{d+r}}\right) .$$

As a conclusion, $\mathcal{F}^{-1}(\zeta) \in L^1$, and the lemma is proved. ■

CONTINUATION OF THE PROOF OF PROPOSITION 3.5.4 : We notice that for $\tau > 0$, the kernel of $e^{\tau\Delta}\nabla\Lambda^r$ reads

$$\tau^{-\frac{1+r+d}{2}}K\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) ,$$

where according to Lemma 3.5.1, $K \in L^1$. We have then, using the fact that X_r is a shift invariant Banach space and that $\mathbb{P} \in \mathcal{L}(X_r)$,

$$\begin{aligned}\|B(u,v)(t)\|_{X_r} &\leq \int_0^t \left\|(t-s)^{-\frac{1+r+d}{2}}K\left(\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right)\right\|_1 \|\widetilde{w}(s))\|_{X_r}ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1+r}{2}}\|\widetilde{w}(s)\|_{X_r}ds \ .\end{aligned}$$

Since $\widetilde{w} \in L_T^{\frac{1}{1-r}}X_r$, it now suffices to apply the Hardy-Littlewood-Sobolev theorem to conclude the proof. ■

Now that the boundedness of B over $(L^{\frac{2}{1-r}}([0,T],X_r))^2$ is established, the study of the solutions of (NS) in that space is easy.

Theorem 3.5.1 *First, set $r \in (0,1)$ such that $\mathbf{M}(\dot{H}^r,\dot{H}^{-r}) = \Lambda^{2r}BMO^r$.*
Let $u_0 \in (\dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}})_\sigma$. Then there exists a solution u of (NS) with the initial data u_0, such that $u \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,T],X_r)$, for a time $T > 0$.
Conversely, suppose that, for a given initial data u_0, $u \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty),X_r)$ is a solution of (NS). Then $u_0 \in (\dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}})_\sigma$.

PROOF : Take $u_0 \in \dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}}$. Using Proposition 3.5.1 and Proposition 3.5.4, it is easy to solve (INS) in $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T],X_r)$, for $T>0$ small enough, with the help of a fixed point theorem (see the annex of Chapter 4).

Conversely, assume that $u \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty),X_r)$ is a solution of (NS) for some u_0. Then, according to Proposition 3.5.4, $B(u,u)$ also belongs to $L^{\frac{2}{1-r}}([0,\infty),X_r)$, and hence

$$e^{t\Delta}u_0 = u + B(u,u)$$

as well. By Proposition 3.5.1, this implies that $u \in \dot{B}^{r-1}_{X_r,\frac{2}{1-r}}$. ■

3.5.3 Construction of solutions and bicontinuity of B : the case $r=1$

Construction of solutions in $\mathcal{C}([0,T],X_1^{(0)})$

Proposition 3.5.5 *We consider the system (NS) for an initial value u_0. Then $u_0 \in X_1^{(0)}$ if and only if there exists a $T>0$ and a solution $u \in \mathcal{C}([0,T],X_1^{(0)})$.*

PROOF : The "if" part is obvious. To prove the "only if" part, we use Theorem 3.2.3. ■

This proposition answers the question of the initial value space corresponding to the path space $\mathcal{C}([0,T),X_1^{(0)})$.
However, it is still interesting to investigate the boundedness properties of B on $L^\infty X_1$ (for example to prove uniqueness of the solutions of (NS) in $L^\infty X_1$) ; we turn to this problem in the next two subsections.

Fully adapted spaces

Spaces fully adapted to the Navier-Stokes equations have been introduced by Meyer in [24]. As is proved in [24], B can be continuous over $\mathcal{C}([0,T],X)$ only if X is a fully adapted space.
Besides, fully adapted spaces have an interest of their own : their aim is to provide a functional analytic framework for the Navier-Stokes equations such that every term of the equations has the same regularity. Let us be more explicit : if the pressure is eliminated, the Navier-Stokes equations read

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u) = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

plus an initial condition. Supposing that u belongs to $L^\infty X$, and fixing t at a given value, the three terms of the first equation above will belong to the same functional space if the mapping

$$(f,g) \mapsto \Delta^{-1}\mathbb{P}\nabla\cdot(f\otimes g)$$

is bounded from $X\times X$ to X. This yields the following definition.

Definition 3.5.1 (Meyer [24]) *The Banach space X is said to be fully adapted to the Navier-Stokes equations if*

- *The Riesz transforms act boundedly on X.*
- *The following inequality holds : $\|\Lambda^{-1}(fg)\|_X \leq C\|f\|_X\|g\|_X$.*

Some examples of fully adapted spaces are given in [24] : L^3, $L^{3,\infty}$, $\Lambda^{1-d}PM$ (where PM is the set of pseudo-measures, i.e. of functions whose Fourier transform belongs to L^∞), and $\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty}$ for $p \in [1,d)$.
All these spaces are included in X_1 : for $\Lambda^{1-d}PM$, it can be easily established using product and convolution rules in Lorentz spaces ; for the other spaces, it is proved in Proposition 2.4.2 of Chapter 2.
Besides, we have the

Proposition 3.5.6 *X_1 is a fully adapted space.*

PROOF : **1.** Due to Theorem 2.3.3 of Chapter 2, Riesz transforms are continuous on X_1.

2. Recall now $X_1 = \mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2) = \Lambda BMO^1$.
Thanks to Proposition 2.3.4 of Chapter 2, we know that $\mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2) = \mathbf{M}(L^2, \dot{H}^{-1})$, and that pointwise multiplication maps $\mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2) \times \mathbf{M}(L^2, \dot{H}^{-1})$ in $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^{-1})$. Therefore,

$$\|fg\|_{\mathbf{M}(\dot{H}^1,\dot{H}^{-1})} \leq C\|f\|_{X_1}\|g\|_{X_1} \ .$$

Furthermore, we have, using Theorem 3.3.1, $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^{-1}) = \Lambda^2 BMO^1$. It follows easily that

$$\|\Lambda^{-1}(fg)\|_{X_1} \leq C\|f\|_{X_1}\|g\|_{X_1} \ ,$$

which completes the proof of the proposition. ■

As a conclusion, to our knowkledge, X_1 is the largest known fully adapted space.

Boundedness of B

Among the fully adapted spaces X which have been mentioned, B is a bounded operator on $\mathcal{C}([0,T], X)$ for $X = L^{3,\infty}, \Lambda^{1-d}PM$, see [24]. However, B does not have this property for $X = L^3$, see [27].

We have not been able to prove the boundedness of B over $L^\infty([0,T], X_1)$. One can however, using the same technique as in the case $X = L^{d,\infty}$, prove the

Proposition 3.5.7 *For $T > 0$, the operator*

$$B : (\mathcal{C}([0,T], X_1))^2 \to \mathcal{C}([0,T], \mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{B}^0_{2,\infty}))$$

is bounded.

Remark 3.5.2 *Unfortunately, $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{B}^0_{2,\infty}) = \mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2)$ does not hold ; in fact, as is easily verified, $\dot{B}^0_{d,\infty}$ is embedded in $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{B}^0_{2,\infty})$, but not in X_1, see Proposition 2.4.2 of Chapter 2.*

SKETCH OF THE PROOF : We split the integral defining B into two parts, $\int_0^{t-A}$ and $\int_{t-A}^t$, and verify that the $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^1)$-norm of the first one can be bounded by $CA^{-1/2}$,

while the $\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^{-1})$-norm of the second one is bounded by $CA^{1/2}$. Recall that the real interpolation space $[\dot{H}^1, \dot{H}^{-1}]_{1/2,\infty}$ equals $\dot{B}^0_{2,\infty}$, hence

$$[\mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^1)\,,\, \mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{H}^{-1})]_{1/2,\infty} = \mathbf{M}(\dot{H}^1, \dot{B}^0_{2,\infty})\ ,$$

and this yields the result. ■

As a conclusion, we do not know whether B is bounded on $\mathcal{C}([0,T], X_1)$; however, May [23] (see also [21]) has been able to prove the uniqueness of the solutions of (NS) in $\mathcal{C}([0,T], X_1^{(0)})$.

3.5.4 Proof of Theorem B

To prove Theorem B, it suffices to put together some of the results obtained above.
Suppose first $u_0 \in L^2_\sigma \cap \dot{B}^{r-1}_{X_r, \frac{2}{1-r}}{}^{(0)}$. Due to Proposition 3.5.2, there exists a solution u of (NS) belonging to the space $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r)$ for some $T > 0$.
Since this solution is built up using a fixed point method, in a space whose norm includes a term of the form $\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty$, we can apply Theorem 3.2.5. Therefore, u is actually a Leray solution, which furthermore belongs to the path space $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r)$.
It now suffices to apply Theorem A to obtain that u is the only Leray solution on $[0,T]$. This concludes the proof of the theorem in case $u_0 \in L^2_\sigma \cap \dot{B}^{r-1}_{X_r, \frac{2}{1-r}}{}^{(0)}$.

The case $u_0 \in L^2 \cap X_1^{(0)}$ is very similar. ■

3.5.5 A summarizing picture

Figure 3.3 illustrates for which initial data u_0 it is known that there exists a strong solution in one of the spaces $\mathcal{P}$ which yield weak-strong uniqueness, according to Theorem A. We say then that weak-strong uniqueness holds for u_0. For these initial data u_0, we have local uniqueness of the Leray weak solutions.
To describe the regularity of u_0 we use the classical scale of Besov critical spaces $\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q}$ for $p, q \in [1, \infty]$. The vertical axis represents d/p, and the horizontal one $2/q$.
The area for which $p, q \in [1, \infty]$ is divided into five different sets, which we will examine one by one :

- If (p,q) is (strictly) in the shaded region, then for $u_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q})_\sigma$, we have weak-strong uniqueness, see Gallagher and Planchon [14]. Observe that, due to the classical embedding
$$\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/\widetilde{p}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \text{ for } \widetilde{p} \geq p \text{ and } \widetilde{q} \geq q\ ,$$
if weak strong uniqueness holds for $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$, it holds as well for any (p,q) which, in the above picture, lies in the top right quarter of the plane whose bottom left corner is $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$. So the case of the shaded region is actually settled by the study of the points lying on the diagonal $\dfrac{d}{p} + \dfrac{2}{q} = 1$, which is the object of the next item.

- If (p,q) is on the diagonal, ie verifies $\dfrac{d}{p} + \dfrac{2}{q} = 1$, then we have weak-strong uniqueness for $u_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q})_\sigma$. We have even proved a better result : weak-strong uniqueness

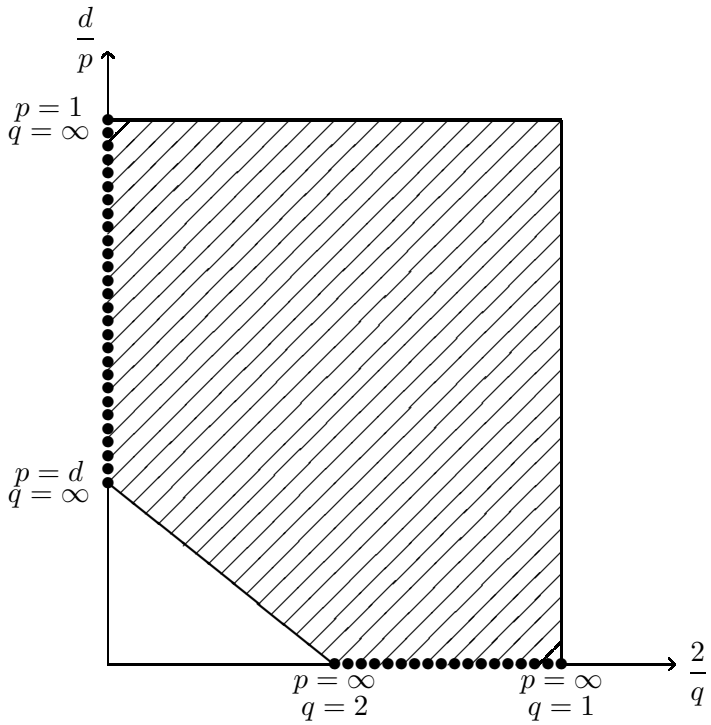

Figure 3.3: Initial value spaces $(\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q})_\sigma$ for which weak-strong uniqueness holds

holds for $u_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p\ (0)}_{X_{d/p},q})_\sigma = (\dot{B}^{-1\ (0)}_{BMO^{d/p},q})_\sigma$ (Theorem B) and we have

$$\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/p\ (0)}_{X_{d/p},q}$$

(see Lemma 3.5.2).

- The above embedding is optimal : we will prove in Lemma 3.5.2 below that, for $\widetilde{p} > p$ or $\widetilde{q} > q$, the embedding
$$\dot{B}^{-1+d/\widetilde{p}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/p}_{X_{d/p},q}$$
does not hold. For this reason, the results we have proved do not say anything about the white region, and we do not know whether Leray weak solutions are locally unique for $u_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q})_\sigma$, and (p,q) lying in that region.
- We have not been able to settle the case of initial data in $(\dot{B}^{-1}_{\infty,q})_\sigma$ for any $q \in [1,2]$ (on the picture, this is the horizontal dotted line). Indeed, according to Proposition 3.5.1, initial data in $(\dot{B}^{-1}_{\infty,\frac{2}{1-r}})_\sigma$ with $r \in [-1,0]$ correspond to a trend $e^{t\Delta}u_0$ in $L^{\frac{2}{1-r}}X_r$. Therefore, because of the general principle that the solution u belongs to the same functional space as the trend $e^{t\Delta}u_0$, there *should* exist a strong solution belonging to $L^{\frac{2}{1-r}}X_r$ for $u_0 \in (\dot{B}^{-1}_{\infty,\frac{2}{1-r}})_\sigma$. However, matters may be more complicated in this case, and we have not been able to prove anything.
- The last set of initial data we have to consider corresponds to the vertical dotted line $q = \infty$, $p \in [1,d]$. The following embedding is proved in Proposition 2.4.2 of Chapter 2
$$\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty} \hookrightarrow X_1 \text{ for } p < d \quad .$$

On the other hand, we have been able to prove weak-strong uniqueness for $u_0 \in X_1^{(0)}$ (Theorem B), and we can deduce that weak-strong uniqueness holds for $u_0 \in \dot{B}^{-1+d/p\ (0)}_{p,\infty}$ with $p \in [1,d)$.

As promised, we now prove that the embedding

$$\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/p}_{X_{d/p},q}$$

is optimal.

Lemma 3.5.2 *The embedding*

$$\dot{B}^{-1+d/\widetilde{p}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/p}_{X_{d/p},q} \tag{3.5.4}$$

holds only for $\widetilde{p} \leq p$ and $\widetilde{q} \leq q$.

PROOF OF THE LEMMA : **1.** That the embedding holds for $\widetilde{p} \leq p$ and $\widetilde{q} \leq q$ follows from the classical embedding between Besov spaces

$$\dot{B}^{-1+d/p}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{-1+d/\widetilde{p}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \text{ for } \widetilde{p} \geq p \text{ and } \widetilde{q} \geq q \ ,$$

and from the embedding proved in Proposition 2.4.2 of Chapter 2 $L^{d/s} \hookrightarrow X_s$.

2. To see that the embedding is not true for $\widetilde{q} > q$, take $\phi \in \mathcal{S}$ whose Fourier support is such that $\Delta_0\phi = \phi$, and consider the function

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \phi(2^j \cdot) \ ,$$

where (α_j) is a sequence of real numbers. One can check that, with this choice of f and ϕ, $f \in \dot{B}^{-1+d/p}_{X_{d/p},q}$ if and only if $(\alpha_j) \in \ell^q$, whereas $f \in \dot{B}^{-1+d/\widetilde{p}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}}$ if and only if $(\alpha_j) \in \ell^{\widetilde{q}}$. Thus we see that $\widetilde{q} \leq q$ is a necessary condition for (3.5.4) to hold.

3. Let us suppose for a moment that (3.5.4) holds for some $\widetilde{q}$, and with $\widetilde{p} > p$. Then we would have in particular for any tempered distribution f : $\|\Delta_0 f\|_{X_{d/p}} \leq C\|\Delta_0 f\|_{\widetilde{p}}$. This implies that for any distributions f and ϕ,

$$\|\Delta_0 f S_0\phi\|_2 \leq C\|\Delta_0 f\|_{\widetilde{p}}\|S_0\phi\|_{\dot{H}^{d/p}} \ . \tag{3.5.5}$$

We will show that this last inequality cannot be true by constructing f and ϕ such that $\Delta_0 f S_0\phi$ does not belong to L^2 whereas $\Delta_0 f \in L^{\widetilde{p}}$ and $S_0\phi \in \dot{H}^{d/p}$.

- Choose for ϕ a function whose Fourier transform reads $|\xi|^{-\alpha}\lambda(\xi)$ where α is a real number in $(0,d)$, and $\lambda \in \mathcal{D}$ is equal to one around 0, and such that $S_0\phi = \phi$. Then one can check easily that $\phi \in \dot{H}^{d/p}$ if and only if

$$\alpha < \frac{d}{2} + \frac{d}{p} \ . \tag{3.5.6}$$

- Choose for f a function whose Fourier transform reads $|\xi - \xi_0|^{-\beta}\gamma(\xi - \xi_0)$, where β is a real number in $(0,d)$, ξ_0 is a point of $\mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathcal{D}$ is equal to one in ξ_0, and such that $\Delta_0 f = f$. Then it appears that $f \in L^{\widetilde{p}}$ if and only if

$$\beta < d - \frac{d}{\widetilde{p}} \ . \tag{3.5.7}$$

- We find the following equivalences for x very large

$$\phi(x) = S_0\phi(x) \sim C|x|^{\alpha-d}$$
$$f(x) = \Delta_0 f(x) \sim Ce^{i\xi_0 x}|x|^{\beta-d} \ .$$

  Hence, $\Delta_0 f(x) S_0\phi(x) \sim Ce^{i\xi_0 x}|x|^{\alpha+\beta-2d}$. But this last equivalence shows that the product $\Delta_0 f S_0\phi$ belongs to L^2 if and only if

$$\alpha + \beta < \frac{3d}{2} \ .$$

Combining this last inequality with (3.5.6) and (3.5.7), we see that one can choose α and β such that (3.5.5) cannot hold for $\widetilde{p} > p$. ■

Bibliography

[1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space*, Journal de Mathématiques pures et appliquées **83**, 673-697 (2004)

[2] H. Beirão da Vega, *A new regularity class for the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^N$, Chinese annals of mathematics, Series B **16**, 407-412 (1995)

[3] L. Berselli, R. Manfrin, *On a theorem by Sohr for the Navier-Stokes equations*, Journal of evolution equations **4**, 193-211 (2004)

[4] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure **14**, 209-246 (1981)

[5] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits, et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris (1995)

[6] L. Caffarelli, R.-V. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Communications in Pure and Applied Mathematics **XXXV**, 771-831 (1982)

[7] J.-Y. Chemin, *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, Journal d'analyse mathématique, **77**, 22-50 (1999)

[8] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, Journal de mathématiques pures et appliquées **72**, 247-286 (1993)

[9] S. Dubois, *Thèse de doctorat. Equations de Navier-Stokes dans l'espace : espaces critiques et solutions d'énergie finie*, Université de Picardie Jules Verne (2002)

[10] S. Dubois, *Uniqueness for some Leray-Hopf solutions to the Navier-Stokes equations*, Journal of differential equations **189**, 99-147 (2003)

[11] E. B. Fabes, B. F. Jones, N. M. Riviere, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in* L^p, Archive for Rational and Mechanical Analysis **45**, 222-240 (1972)

[12] C. Foias, *Une remarque sur l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension n*, Bulletin de la Société Mathématique de France **89**, 1-8 (1961)

[13] H. Fujita, T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **16**, 260-315 (1964)

[14] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, 307-337 (2002)

[15] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Comportement asymptotique et stabilité des solutions globales des équations de Navier-Stokes*, Annales de l'Institut Fourier **53**, 1387-1424 (2003)

[16] L. Iskauriaza, G.A. Seregin, V. Šverák, *$L^{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Russian Math. Surveys **58**, 211-250 (2003)

[17] T. Kato, *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions*, Mathematische Zeitschrift **187**, 471-480 (1984)

[18] H. Koch, D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Advances in Mathematics **157**, 22-35 (2001)

[19] H. Kozono, Y. Taniuchi, *Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations*, Mathematische Zeitschrift **235**, 173-194 (2000)

[20] H. Kozono, H. Sohr, *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Analysis **16**, 255-271 (1996)

[21] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall (2003)

[22] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934)

[23] R. May, *Existence, unicité et régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes*, Thèse, Université d'Evry Val d'Essonne (2002)

[24] Y. Meyer, *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, Current developments in mathematics, Cambridge, MA (1999)

[25] H. Miura, *Remark on uniqueness of mild solutions to the Navier-Stokes equations*, Journal of functional analysis **218**, 110-129 (2005)

[26] S. Montgomery-Smith, *Conditions implying regularity of the three dimensional Navier-Stokes equations*, preprint

[27] F. Oru, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non-linéaire*, Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan (1998)

[28] G. Prodi, *Un teorema di unicitá per le equazioni di Navier-Stokes*, Annali di matematica pura et applicata **48**, 173-182 (1959)

[29] F. Ribaud, *A remark on the uniqueness problem for the weak solutions of Navier-Stokes equations*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, volume **XI**, 225-238 (2002)

[30] G. Seregin, V. Šverák, *On smoothness of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations*, preprint available at
`http://www.pdmi.ras.ru/~seregin/Recent%20Publications/recentpubl.htm`

[31] J. Serrin, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, in *Nonlinear problems*, University of Wisconsin Press (R. E. Langer editor), 69-98 (1963)

[32] H. Sohr, *A regularity class for the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces*, Journal of evolution equations **1**, 441-467 (2001)

[33] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University press (1993)

[34] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhaüser Verlag (1992)

[35] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig (1985)

[36] A. Youssfi, *Function spaces related to singular integral operators, in Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1993

[37] A. Youssfi, *Duality of type $\mathcal{H}^1$ - BMO and bilinear operators*, Journal of mathematical analysis and applications **190**, 780-794 (1995)

Chapitre 4

Solutions globales d'énergie infinie de l'équation de Navier-Stokes 2D

Résumé

Nous montrons tout d'abord dans cet article que les équations de Navier-Stokes en deux dimensions sont globalement bien posées si la donnée initiale u_0 appartient à l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO. Nous utilisons pour ce faire une méthode de perturbation de solutions d'énergie finie par des solutions d'énergie infinie qui avait déjà utilisée par Gallagher et Planchon [15] pour traiter le cas $u_0 \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, avec p et q finis. Nous nous tournons ensuite vers les solutions de Gallagher et Planchon et prouvons leur convergence en temps grand vers 0, sous certaines conditions, soit sur les conditions initiales, soit sur l'intégrabilité globale de ces solutions.

4.1 Introduction et énoncé des résultats

4.1.1 Les équations de Navier-Stokes

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux solutions du problème de Cauchy associé aux équations de Navier Stokes posées dans l'espace entier. Ces équations régissent le mouvement d'un fluide visqueux, décrit par les variables $u(x,t)$ et $p(x,t)$ qui donnent, en un point x de l'espace et au temps t, respectivement la vitesse et la pression du fluide. Nous considérons le cas d'un fluide incompressible (ce qui entraîne la condition $\operatorname{div} u = 0$), et de viscosité $\nu = 1$. Les équations de Navier-Stokes prennent alors la forme suivante :

$$(NS)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

Sauf mention contraire, nous nous placerons toujours **en deux dimensions d'espace**.

La formulation intégrale des équations de Navier-Stokes (NS) s'écrit :

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla \cdot (u(s) \otimes u(s))ds = e^{t\Delta}u_0 - B(u,u) \ , \tag{4.1.1}$$

où B est défini de manière évidente, et où l'on note $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Les solutions de (4.1.1) ne sont pas a priori des solutions du système (NS) présenté en tête de cet article, voir [22] pour une discussion à ce sujet. Par contre, pour ce qui est des solutions que nous considérerons, l'équation intégrale est équivalente à l'équation projetée :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

Cette équation sera considérée au sens des distributions.

4.1.2 Solutions de (NS)

Solutions globales d'énergie finie

La théorie des équations de Navier-Stokes a été initiée par Jean Leray [23] ; il s'est intéressé aux solutions d'énergie finie de (NS) issues de $u_0 \in L^2$.
L'espace L^2 est l'espace d'énergie pour les conditions initiales ; l'espace d'énergie associé aux solutions de l'équation de Navier-Stokes est défini par

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{déf}}{=} L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1) \ ,$$

où $\dot{H}^1$ est l'espace de Sobolev homogène, soit l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $\widehat{f} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \ < \ \infty \ .$$

La norme de $\mathcal{L}$ s'écrit :

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1)}.$$

Le célèbre résultat de Leray [23] affirme que, si $v_0 \in L^2_\sigma$ (on note, si B est un espace de Banach de distributions, B_σ pour le noyau de l'opérateur div dans B), il existe une unique solution globale $v \ \in \ \mathcal{L}$ de (NS) issue de v_0.

Espaces critiques et solutions locales d'énergie infinie

La définition des espaces critiques repose sur les propriétés d'invariance par dilatation et translation des solutions de (NS). Soyons plus explicites : soit u une solution de (NS) associée à la condition initiale u_0. Alors, si $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u(\lambda(x - x_0), \lambda^2 t)$ sera associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$. Un espace de Banach $X \hookrightarrow \mathcal{S}'$ sera dit critique (sous-entendu : pour les conditions initiales de (NS)) si sa norme vérifie :

$$\forall \lambda > 0 \, , \, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \ \|u\|_X = \lambda \|u(\lambda(\cdot - x_0))\|_X \ . \tag{4.1.2}$$

On voit facilement que, en dimension deux d'espace, L^2, les espaces de Besov $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ (définis dans le chapitre 6) et ∂BMO (défini dans la section 4.4) sont des espaces critiques.

Il est intéressant de noter ([10]) que tout espace critique X vérifie

$$X \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \, .$$

D'autre part ([10], [21]), on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{\widetilde{p}}-1}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} \hookrightarrow \partial BMO \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \tag{4.1.3}$$

où $2 \leq p \leq \widetilde{p} < \infty$ et $2 \leq q \leq \widetilde{q} \leq \infty$.

En dimension d'espace quelconque, des théorèmes garantissent l'existence d'une solution locale $u^\star$ pour (NS) si u_0 est de norme quelconque dans un espace critique X : voir [7] pour $(\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q})_\sigma$ avec $q < \infty$ et [10], [21] pour $\partial BMO^{(0)}_\sigma$ (on note $\partial BMO^{(0)}_\sigma$ pour l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO_σ).

Notons que $\partial BMO^{(0)}_\sigma$ est le plus gros espace critique X, dans la chaîne d'inclusions ci-dessus (qui se généralise à $\mathbb{R}^n$), qui vérifie la propriété précédente : existence de solutions locales pour des données initiales de norme quelconque. En fait, on peut formaliser cette observation, et donner un sens précis à l'idée que ∂BMO est optimal pour la résolution de (NS) : voir [1].

La question qui se pose maintenant de manière naturelle est : peut-on rendre globales les solutions locales d'énergie infinie que nous venons de mentionner ? Comme nous allons le voir, on sait que la réponse est oui si la donnée initiale est choisie dans une classe assez large d'espaces critiques. C'est une spécificité du cas $d = 2$; en dimension d'espace supérieure, on ignore la réponse, sauf si la donnée initiale est de norme petite.
L'argument qui va nous permettre d'étendre ces solutions locales à $\mathbb{R}^+$ est, bien sûr, une estimation a priori. En fait, nous disposons de deux voies possibles ; aucune des deux ne permet de retrouver tous les résultats donnés par l'autre. La première (que nous allons brièvement exposer en section 4.1.2) consiste à utiliser l'équation de la vorticité, alors que, dans la seconde (qui est l'objet de la section 4.1.2), on travaille sur le champ de vitesse.

Solutions d'énergie infinie rendues globales grâce au contrôle de la vorticité

La vorticité est définie par

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \ .$$

Elle satisfait l'équation suivante

$$(NSV) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \Delta \omega \\ \omega_{|t=0} = \omega_0 \ , \end{array} \right.$$

où on a naturellement posé $\omega_0 = \partial_1 (u_0)_2 - \partial_2 (u_0)_1$.

Le scaling propre à (NSV) est différent de celui de (NS) : en effet, la vorticité associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$ est $\lambda^2 \omega_0(\lambda(x - x_0))$. Nous dirons donc qu'un espace est critique pour la vorticité si sa norme vérifie

$$\forall \lambda > 0 \, , \, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \ \|\omega(x)\|_X = \lambda^2 \|\omega(\lambda(x - x_0))\|_X \ .$$

Comme pour la vitesse u, nous nous restreindrons dans notre étude de ω à des espaces critiques. On vérifie par exemple aisément que L^1 et $\mathcal{M}$ (l'espace des mesures de Radon de masse totale finie) sont critiques. Rappelons que $\mathcal{M}$ est défini par

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\phi \in \mathcal{C}^0, \|\phi\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi \, d\mu$$

($\mathcal{C}^0$ est l'ensemble des fonctions continues, et si $p \in [1, \infty]$, on note $\|\cdot\|_p$ pour la norme de l'espace de Lebesgue L^p).

Le fait que cette équation ne comporte pas de terme du type $\omega \cdot \nabla u$ est encore une spécificité de la dimension 2. De ce fait, (NSV) est une simple équation de transport-diffusion, aussi peut-on facilement contrôler ω grâce à elle ; ceci permet en retour de contrôler u, qui s'obtient par la loi de Biot et Savart

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y,t) dy \ ,$$

où l'on note $x^\perp = (x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$. On dispose alors d'une estimation a priori sur u.

En utilisant cette méthode, Cottet [9], puis, indépendamment, Giga, Miyakawa et Osada [20] ont obtenu un résultat d'existence globale pour une donnée initiale ω_0 dans $\mathcal{M}$. L'unicité pour une donnée initiale quelconque dans $\mathcal{M}$ a été obtenue par Gallagher et Gallay [12] : ils ont prouvé que si $\omega_0 \in \mathcal{M}$, il existe une unique solution

$$\omega \in \mathcal{C}(]0, \infty[, L^1 \cap L^\infty)$$

telle que $\|\omega(t,\cdot)\|_1 \leq \|\omega_0\|_{\mathcal{M}}$ pour tout $t > 0$.
Gallagher et Gallay [12] montrent aussi la dépendance continue par rapport aux conditions initiales de cette solution, concluant la preuve du caractère bien posé de (NS) pour u_0 dans $\mathcal{M}$.

Solutions d'énergie infinie rendues globales par la méthode de Calderón

En dimension 2 d'espace, nous avons vu que l'espace d'énergie L^2 est lui-même un espace critique. En utilisant cette propriété, I. Gallagher et F. Planchon [15], reprenant une idée de Calderón [3], ont pu montrer que, pour une donnée initiale grande dans $(\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q})_\sigma$, avec $1 < p, q < \infty$, la solution locale en temps $u^\star$ se prolonge à $\mathbb{R}^+$, et obtenir ainsi une solution unique, globale en temps.

Remarque 4.1.1 *Nous avons déjà énoncé, en section 4.1.2, un théorème d'existence globale de solutions de (NS), dû à Cottet, Giga, Miyakawa et Osada, valable dès que le rotationnel de u_0 appartient à $\mathcal{M}$. Quant au résultat que nous venons de citer, il s'applique pour des données initiales dans $(\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q})_\sigma$, avec $1 < p, q < \infty$. Quel est le rapport entre ces deux espaces de données initiales ? Ils ne sont en fait pas comparables. En effet, il est prouvé dans la proposition 4.4.1 que si* $\operatorname{rot} u_0$ *appartient à $\mathcal{M}$, alors u_0 appartient à $\dot{B}^1_{1,\infty}$, ce qui implique que u_0 est plus régulier qu'une fonction de $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ si $p > 1$. En revanche, si $q < \infty$, $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ ne contient pas de distributions homogènes de degré -1, alors que la masse de Dirac en zéro δ_0 est une mesure finie, et que le champ de vitesse associé à ce rotationnel (voir la section 4.1.3) est une distribution homogène de degré -1.*

Enoncé du théorème A

Nous nous proposons d'appliquer la méthode utilisée par Gallagher et Planchon à ∂BMO, afin d'établir que (NS) est bien posé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ (rappelons que l'on note

$\partial BMO^{(0)}$ pour l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO). Avant d'énoncer un résultat précis, il nous faut introduire les normes

$$\|u\|_{\mathcal{C},T} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0<R<\sqrt{T}} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |u(y,t)|^2 dy\, dt \right)^{1/2}$$

(où l'on note pour la moyenne de f sur la boule $B(x,R)$: $\displaystyle\fint_{B(x,R)} f = \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} f$)
et

$$\|u\|_{X_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{\mathcal{C},T} + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty \ . \tag{4.1.4}$$

L'expression définissant $\|u\|_{\mathcal{C},T}$ a pour origine le fait que la norme ∂BMO d'une fonction f est donnée par (voir l'annexe)

$$\sup_{R>0}\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dx dt \right)^{1/2} .$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème A *(NS) est globalement bien posé pour $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$. Plus précisément,*

- *Si $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$ est de divergence nulle, il existe une solution globale u de (NS) issue de u_0.*
- *Cette solution est unique dans $\mathcal{E}$ défini par*

$$u \in \mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (i)\ \ u \in \mathcal{C}([0,\infty[, \partial BMO) \\ (ii) \forall T>0\,, \quad \lim\limits_{\delta\to 0} \|u(T+\cdot)\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta}\ , \end{cases} \tag{4.1.5}$$

  où η est la constante strictement positive intervenant dans la proposition 4.2.1 (voir ci-après).

- *Le flot de (NS), c'est à dire l'application*

$$\begin{aligned} \phi \stackrel{\text{déf}}{:} (u_0,t) &\mapsto u(t) \\ \partial BMO^{(0)}_\sigma \times \mathbb{R} &\longrightarrow \partial BMO\ , \end{aligned}$$

  est localement lipschitzien par rapport à la première variable.

- *Enfin, u est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$, et, pour tout $\delta>0$ et pour une constante $C(\delta)$ dépendant de u_0 et de δ, on dispose de l'estimation suivante*

$$\forall t>0 \ \ \|u(t)\|_{\partial BMO} \le C(\delta)(1+t^\delta)\,.$$

Il est intéressant de comparer le théorème qui vient d'être énoncé avec des résultats déjà connus.

- La partie existence du théorème ci-dessus (premier point) peut être obtenue en combinant des résultats prouvés par Koch et Tataru [21], et Giga, Matsui et Sawada [19]. En effet, dans [19], les auteurs prouvent par des méthodes d'analyse harmonique l'existence, pour $u_0 \in L^\infty_\sigma(\mathbb{R}^2)$, d'une solution globale de (NS) dans $L^\infty_{\text{loc}}(]0,\infty[, L^\infty)$.

Or Koch et Tataru [21] démontrent (c'est le théorème 4.2.2 du présent article), pour une condition initiale dans $\partial BMO_\sigma^{(0)}$, l'existence locale d'une solution de (NS) de norme L^∞ finie dès que $t > 0$. Ces deux éléments permettent de déduire, pour $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$, l'existence d'une solution globale de (NS).
Grâce à la méthode que nous employons ici, nous sommes en mesure d'obtenir des informations supplémentaires sur cette solution : toutes les assertions du théorème sauf la première sont nouvelles. D'autre part, notre méthode permet d'étudier presque sans changement le cas où une force extérieure est appliquée au système : voir section 4.2.5.

- Même s'il est similaire, le critère d'unicité qui apparaît dans le théorème semble ne pas être impliqué par le résultat de Miura [25] : Miura montre en effet qu'en dimension d'espace quelconque, une solution de (NS) est unique dans la classe

$$\mathcal{C}([0,T], bmo^{-1}) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,T[, L^\infty) \ ,$$

où bmo^{-1} est la version non homogène de BMO^{-1}, voir [25]. A priori, pour $T = \infty$, cette classe d'unicité ne contient pas $\mathcal{E}$, puisqu'on ne demande pas à une fonction f de $\mathcal{E}$ d'appartenir à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,\infty[, L^\infty)$.

Notons en outre que la classe d'unicité $\mathcal{E}$ définie plus haut englobe les solutions construites dans [15] [19] [21]

- Notre classe d'unicité comprend les solutions de Koch et Tataru (théorèmes 4.2.1 et 4.2.2) : si u est l'une de ces solutions, elle vérifie la condition (i) définissant $\mathcal{E}$, voir [10]. Elle vérifie d'autre part (ii) en $\tau = 0$; en $\tau > 0$ aussi car u est bornée dans L^∞ sur $[\delta, T[$ pour tout $\delta > 0$, si l'on note T le temps d'existence de la solution.
- Elle comprend aussi, pour les mêmes raisons, les solutions $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^\infty)$ construites dans [20] par Giga, Matsui et Sawada.
- Elle comprend enfin les solutions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}})$, avec $q < \infty$, construites par Gallagher et Planchon [15].
[En effet, soit u une solution de Gallagher-Planchon. Il est clair que (i) est vérifié. D'autre part, l'hypothèse $q < \infty$ implique que u est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$. On se place maintenant au temps $\tau \geq 0$, puis on résoud l'équation par point fixe, pour T assez petit, dans l'intersection de $\widetilde{L}^r([0,T], \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}+\frac{2}{r}})$ (c'est l'espace utilisé par Gallagher et Planchon, voir [14]) et de $\widetilde{X}_T$ (c'est l'espace que nous utiliserons plus loin, il est défini en section 4.2.1). On conclut par unicité de la solution d'un problème de point fixe que $u(\tau + \cdot)$ appartient pour T assez petit à $\widetilde{X}_T$. Ceci implique que (ii) est vérifié.]

Pour finir, le théorème A est énoncé pour $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$, mais la preuve donnée dans la suite en dit un peu plus. Elle repose en effet sur un découpage de la condition initiale en une partie régulière et une partie dans ∂BMO de norme $< \epsilon$. On en déduit facilement qu'il existe ϵ tel que la même méthode s'applique pour $u_0 \in \partial BMO_\sigma$ tel que :

$$d(u_0, \mathcal{S}) = \inf_{f \in \mathcal{S}} \|f - u_0\|_{\partial BMO} < \epsilon \, .$$

Pour ϵ assez petit, les conclusions du théorème A restent donc inchangées, à ceci près que la solution construite n'est plus à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$.

4.1.3 Asymptotique en temps grand des solutions

Dans la section précédente, nous avons vu que l'existence globale d'une solution de (NS) est assurée à condition de choisir $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$, ou de vorticité appartenant à $\mathcal{M}$.
Se pose maintenant la question du comportement en temps grand de ces solutions globales. Commençons par quelques éléments heuristiques.

Heuristique

Supposons que w_0 soit autosimilaire, c'est à dire que

$$\lambda w_0(\lambda x) = w_0(x) \quad \forall \lambda > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Alors la solution w associée (nous supposons qu'elle existe et qu'elle est globale) sera aussi auto-similaire, au sens que

$$\lambda w(\lambda x, \lambda^2 t) = w(x,t) \quad \forall \lambda > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^d \, \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

En particulier, il existera un profil $\psi = w(\cdot, 1)$ tel que

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \psi \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \ ,$$

et cette égalité décrit complètement le comportement asymptotique de w. Supposons maintenant non plus que u_0 est auto-similaire, mais que u_0 est "asymptotiquement auto-similaire pour les basses fréquences", c'est à dire que

$$\lambda u_0(\lambda x) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} w_0(x) \ ,$$

avec w_0 une fonction auto-similaire ; nous ne précisons pas le sens à donner à la convergence dans l'équation ci-dessus. Il semble naturel de déduire de l'équation ci-dessus la convergence des solutions associées aux données initiales $\lambda u_0(\lambda x)$ et $w_0(x)$, soit

$$\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} w(x) \ .$$

Ceci implique que

$$u(x,t) \overset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} w \left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \psi \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \ ,$$

où le sens de $\sim$ est, là encore, à préciser. Au total, l'heuristique que nous venons de développer suggère l'équivalence entre les deux points suivants :

1. La donnée initiale u_0 est semblable pour les basses fréquences à une donnée auto-similaire w_0, c'est à dire
$$\lambda u_0(\lambda x) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} w_0(x) \ .$$
2. La solution u est asymptotiquement (en temps grand) semblable à une solution auto-similaire w, c'est à dire
$$u(t, \cdot) \overset{t \to +\infty}{\sim} w(t, \cdot) \ .$$

Bien sûr, si l'heuristique s'applique, w est la solution de $(NS2D)$ associée à w_0.

Résultats connus

Nous allons maintenant examiner si l'heuristique qui vient d'être développée permet effectivement de décrire l'asymptotique en temps grand des équations de Navier-Stokes.

- Pour une donnée initiale $u_0 \in L^2_\sigma$, et en dimension d'espace quelconque, Wiegner [29] a prouvé la décroissance en norme L^2 de toute solution d'énergie finie (c'est à dire appartenant à $\mathcal{L}$) de (NS). Ceci est cohérent avec l'heuristique car on a, si $u_0 \in L^2$,

$$\lambda u_0(\lambda \cdot) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

au sens de la convergence faible de L^2.

- Planchon [26] s'est intéressé au cas d'une donnée initiale petite dans $(\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty})_\sigma$, avec $p \in]d, \infty[$; autrement dit, u_0 est choisie petite, mais d'énergie infinie. Il a pu montrer que l'heuristique s'applique alors parfaitement : soit $u_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty})_\sigma$ de norme assez petite. Alors la solution u de (NS) issue de u_0 est asymptotiquement auto-similaire au sens qu'il existe une fonction $V \in L^p$ telle que

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}} \| u - \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) \|_p \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

si et seulement si il existe une distribution $v_0 \in (\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty})_\sigma$ homogène de degré -1 telle que

$$2^{j(\frac{d}{p}-1)} \| \Delta_j (u_0 - v_0) \|_p \overset{j \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

De plus, $v(x,t) = V(\frac{x}{\sqrt{t}})$ est dans ce cas la solution de (NS) associée à v_0.

On se reportera à la section 4.4.3 pour des exemples de fonctions autosimilaires appartenant à $\dot{B}^{-1+d/p}_{p,\infty}$.

- Gallay et Wayne [16] (voir aussi Gallagher et Gallay [12]) ont étudié le cas d'une donnée initiale u_0 dont la vorticité ω_0 est une mesure de Radon finie.

Il est montré en appendice, section 4.4.3, que la seule fonction homogène de degré -1 et de divergence nulle qui possède aussi cette propriété est $v^G(x) = \dfrac{x^\perp}{|x|^2}$, dont le rotationnel est égal à δ, la masse de Dirac en 0. On connaît explicitement la solution de (NSV) avec $c\delta$ (c est un réel quelconque) pour donnée initiale : il s'agit de

$$\frac{c}{t} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{avec} \quad G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-|\xi|^2/4} \ ;$$

on appelle G le tourbillon d'Oseen.

Revenons maintenant au cas d'une donnée initiale u_0 dont la vorticité ω_0 est une mesure de Radon finie. Soit u la solution de $(NS2D)$ associée à u_0, et soit ω la vorticité de u.

D'après l'heuristique établie ci-dessus, comme

$$\lambda^2 \omega_0(\lambda x) \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \delta \int \omega_0(x)\, dx$$

au sens de la convergence faible des mesures, on devrait avoir

$$\omega(x,t) \overset{t \to \infty}{\sim} \left(\int \omega_0(x)\, dx \right) \frac{1}{t} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \ .$$

Gallay et Wayne ont prouvé que c'était effectivement le cas : en notant ω la vorticité de u, on a pour tout $p \in [1,\infty]$

$$t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \omega(x,t) - \frac{\alpha}{t} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right\|_p \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \int \omega_0(x)\,dx \ .$$

Notons que ce résultat est le seul exemple d'équivalent asymptotique pour une classe de données initiales pouvant contenir des fonctions autosimilaires de taille quelconque.

- Enfin, Gallagher, Iftimie et Planchon [14] se sont intéressés au cas où, en dimension 3 d'espace, $u_0 \in (\dot{B}^{-1+3/p}_{p,q})_\sigma$, avec $p \in]3,\infty[$ et $q \in [1,\infty[$, et où une solution globale u existe (on ignore si c'est le cas en général). Gallagher, Iftimie et Planchon ont alors montré que

$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+3/p}_{p,q}} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Ce résultat a été étendu par Auscher, Dubois et Tchamitchian [1] au cas où $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$; c'est alors bien sûr la norme ∂BMO de la solution qui tend vers 0. Ces résultats sont là encore cohérents avec l'heuristique.

Des résultats décrivant plus finement qu'au premier ordre le comportement asymptotique des solutions de (NS), en dimension 2 ou supérieure, existent : on se reportera à [17] et à [22], Chapitre 26.

Enoncé du théorème B

Si l'on considère maintenant une donnée initiale u_0

1. de taille quelconque,
2. d'énergie infinie
3. et peu régulière (c'est à dire appartenant à l'un des espaces de Besov $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$, pour $p > 1$, de telle sorte qu'alors les fonctions de $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ dont le rotationnel est une mesure finie forment un sous-espace strict de cet espace, voir la proposition 4.4.1),

que sait-on du comportement asymptotique de la solution u associée ?
Il est prouvé dans l'article de Gallagher et Planchon [15] que la solution u correspondante vérifie : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq C(1+t^\delta) \ .$$

De même, nous avons vu que la solution u construite dans le théorème A pour une donnée initiale $u_0 \in \partial BMO^{(0)}$ vérifie : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$\|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(1+t^\delta) \ .$$

Or, si u_0 appartient à l'adhérence de la classe de Schwartz dans un espace de Banach fonctionnel X, on a

$$\lambda u_0(\lambda\cdot) \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

au sens de la convergence faible dans X. D'après l'heuristique, on devrait alors avoir

$$\|u(t)\|_X \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Le théorème suivant donne, quand il s'applique, la convergence ci-dessus.

Théorème B *Soit u_0 dans $(\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q})_\sigma$, avec $p,q \in [2,\infty[$, et u la solution de (NS) construite par Gallagher et Planchon [15] qui lui est associée. Alors*

$$\|u(t)\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée
(i) $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}>1$.
(ii) $u \in L^q(\mathbb{R}^+, \dot{B}^{-1+\frac{2}{p}+\frac{2}{q}}_{p,q})$ *avec* $p,q \in]2,\infty[$.

4.2 Preuve du théorème A

Nous aurons besoin dans la preuve du théorème A d'un résultat fondamental de Koch et Tataru, que nous allons énoncer, ainsi que de certains éléments qui y sont reliés. La section qui suit est donc consacrée à quelques rappels.

4.2.1 Le théorème de Koch et Tataru

H. Koch et D. Tataru ont, dans [21], obtenu l'existence de solutions globales de (NS), en toute dimension, pour une donnée initiale petite dans ∂BMO. Avant d'énoncer ce résultat plus précisément, il nous faut introduire l'espace $\widetilde{X}_T$, $0<T\le\infty$; $\widetilde{X}_T$ est l'ensemble des fonctions w pour lesquelles la norme suivante est bien définie et finie :

$$\|w\|_{\widetilde{X}_T} \overset{\text{déf}}{=} \|w\|_{X_T} + \sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty \ ,$$

où la norme X_T est définie en (4.1.4).

Théorème 4.2.1 (H. Koch, D. Tataru, [21]) *Soit $d\ge 2$. Il existe $\epsilon>0$ et $C>0$ tels que, si $w_0 \in \partial BMO_\sigma(\mathbb{R}^d)$ et $\|w_0\|_{\partial BMO}<\epsilon$, il existe w une solution globale de (NS) vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \le C\|w_0\|_{\partial BMO} \ . \tag{4.2.1}$$

De plus, si $w_0 \in \partial BMO^{(0)}$, alors

$$\|w\|_{\widetilde{X}_t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Idée de la preuve : On considère l'équation intégrale (4.1.1), à laquelle on applique le théorème de point fixe 4.4.2 énoncé dans l'appendice, en se plaçant dans l'espace $\widetilde{X}_\infty$ défini ci-dessus. On s'assure donc des points suivants :

- $\|e^{t\Delta}w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \le C\|w_0\|_{\partial BMO}$
- $B : \widetilde{X}_\infty \times \widetilde{X}_\infty \to \widetilde{X}_\infty$ est bicontinue. Ceci est garanti par la première assertion de la proposition qui suit. Les deux autres assertions nous seront utiles par la suite.

Proposition 4.2.1 ([10]) *Il existe $C>0$ tel que, $\forall T\in]0,+\infty]$,*

$$\|B(u,v)\|_{\widetilde{X}_T} \le C\|u\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{\widetilde{X}_T} \ . \tag{4.2.2}$$

Il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall T \in]0, \infty]$,

$$\|B(u,v)\|_{X_T} \leq \eta \|u\|_{X_T} \|v\|_{X_T} \ . \tag{4.2.3}$$

On dispose aussi de l'estimation, si $0 < t < T$, et pour une constante $C > 0$:

$$\|B(u,v)(t)\|_{\partial BMO} \leq C \|u\|_{\widetilde{X}_T} \|v\|_{\widetilde{X}_T} \ . \tag{4.2.4}$$

Cette proposition permet d'appliquer le théorème de point fixe 4.4.2 rappelé en annexe, et le théorème 4.2.1 en découle. ■

Le théorème précédent s'adapte facilement pour fournir l'existence de solutions locales à données grandes ; cependant on doit se restreindre à des données dans $\partial BMO^{(0)}$, pour pouvoir garantir que $\|e^{t\Delta} w_0\|_{\widetilde{X}_T} \underset{T \to 0}{\longrightarrow} 0$ et appliquer le théorème de point fixe 4.4.2. On obtient alors :

Théorème 4.2.2 *Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ de divergence nulle. Il existe $T^\star > 0$ et $u \in \widetilde{X}_{T^\star}$ une solution de (NS) sur $[0, T^\star]$ issue de u_0. De plus, $\|u\|_{\widetilde{X}_t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.*

Une question naturelle est maintenant celle de l'unicité des solutions de Koch et Tataru. Soit $\mathcal{E}_T$ l'espace

$$\mathcal{E}_T \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f \in L^\infty_{\text{loc}}(]0,T], L^\infty) \ , \ \lim_{\delta \to 0} \|f\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta} \right\} . \tag{4.2.5}$$

Proposition 4.2.2 ([10]) *Deux solutions de (NS) appartenant à l'espace $\mathcal{E}_T$ pour un $T > 0$ et issues d'un même $u_0 \in \partial BMO$ sont égales sur $[0, T]$.*

4.2.2 Construction de la solution

Cette section est consacrée à la construction de la solution qui fait l'objet du théorème A ; il s'agit donc de la preuve de la partie "existence" du théorème A.
La méthode de construction que nous employons va aussi nous permettre de montrer tous les résultats nouveaux : unicité, comportement asymptotique et dépendance continue par rapport aux conditions initiales apparaissant dans le théorème A.
Notons enfin que cette méthode s'applique aussi au cas où une force extérieure est appliquée au système. Nous supposons pour le moment cette force nulle pour simplifier l'exposition, et reviendrons sur ce point en section 4.2.5.

Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$. Nous procédons de la manière suivante :

1. u_0 s'écrit comme somme d'une partie grande et régulière v_0, et d'une partie petite et moins régulière w_0. Le théorème de Koch et Tataru donne l'existence d'une solution w de (NS) issue de w_0 ; on se ramène ainsi à une équation perturbée (faisant intervenir w) d'inconnue v, et de donnée initiale v_0.
2. L'utilisation d'un théorème de point fixe permet alors d'obtenir une solution locale v appartenant à $\widetilde{X}_T$ pour un $T > 0$.
3. Par un argument de propagation de régularité, on montre qu'il existe un intervalle de temps sur lequel $v \in L^2$.
4. Une estimation d'énergie a priori permet de rendre v globale en temps.

C'est la méthode utilisée par I. Gallagher et F. Planchon dans [15] pour des données initiales dans des espaces de Besov. Cette idée a été utilisée pour la première fois dans le cadre des équations de Navier-Stokes par Calderón [3].

Comme nous l'avons vu, la première étape de la démonstration consiste à découper la donnée initiale. Soit donc $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$ de divergence nulle. Par définition de cet espace, il existe v_0 et w_0 tels que :

- $u_0 = v_0 + w_0$
- $v_0 \in \mathcal{S}_\sigma$
- $w_0 \in \partial BMO_\sigma$, et $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$ (ϵ est pris assez petit pour que tous les théorèmes dont nous aurons besoin s'appliquent).

Par le théorème 4.2.1, il existe w une solution de (NS) issue de w_0 qui vérifie de plus l'estimation (4.2.1). Soit v la solution de

$$v(t) = e^{t\Delta}v_0 - B(v,w)(t) - B(w,v)(t) - B(v,v)(t) \tag{4.2.6}$$

de telle sorte que $u = v + w$ est solution de (4.1.1).
Nous avons maintenant besoin de la définition suivante : soit Y_T l'espace défini par

$$\|f\|_{Y_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|f\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla f(t)\|_{L^2} \ .$$

La proposition suivante va nous donner l'existence d'une solution locale dans $\widetilde{X}_T \cap Y_T$.

Proposition 4.2.3 *Il existe $T > 0$ tel que (4.2.6) admette une solution v sur $[0,T]$ appartenant à $\widetilde{X}_T \cap Y_T$.*

Preuve de la proposition : Nous commençons par construire une solution dans $\widetilde{X}_T$; nous montrerons ensuite que cette solution appartient aussi à Y_T. Il s'agit dans un premier temps de pouvoir appliquer le théorème de point fixe 4.4.2 à la résolution dans $\widetilde{X}_T$ de (4.2.6), c'est à dire de s'assurer qu'il existe un T tel que le théorème s'applique. Il nous faut vérifier les points suivants :

- $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$; c'est le cas car $v_0 \in \mathcal{S}$.
- $B : \widetilde{X}_T \times \widetilde{X}_T \to \widetilde{X}_T$ est bicontinue et de norme indépendante de T ; c'est vrai d'après (4.2.2).
- $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ et $\|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ sont finies et leur somme est strictement inférieure à 1 ; c'est le cas si $\|w\|_{\widetilde{X}_T}$ est assez petit, du fait de (4.2.2).

Nous obtenons ainsi $T > 0$ et v solution de (4.2.6) dans $\widetilde{X}_T$. Nous allons maintenant montrer que v appartient aussi à Y_T, en appliquant le lemme de propagation de régularité 4.4.1 énoncé dans l'annexe (avec, pour reprendre les notations du lemme, $X = \widetilde{X}_T$ et $Y = Y_T$) à l'équation (4.2.6). Il nous faut nous assurer des points suivants :

- $e^{t\Delta}v_0 \in Y_T$; ceci est vérifié dès que $v_0 \in \mathcal{S}$.
- $B : \widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$ et $B : Y_T \times \widetilde{X}_T \to Y_T$ sont bicontinues et de normes indépendantes de T ; c'est l'objet de la proposition suivante, dont nous renvoyons la démonstration à la fin de cette section.

Proposition 4.2.4 *L'application B est bicontinue de $\widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$.*

- $B(w,\cdot) : Y_T \to Y_T$ et $B(\cdot,w) : Y_T \to Y_T$ sont continues et la somme de leurs normes est strictement inférieure à 1. Ceci découle aussi de la proposition 4.2.4 : $B : \widetilde{X}_T \times Y_T \to Y_T$ est bicontinue, donc $B(w,\cdot)$ et $B(\cdot,w)$ sont dans $\mathcal{L}(Y_T)$, et $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} + \|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} < 1$ si $\|w\|_{\widetilde{X}_T}$ est assez petite.

Nous disposons maintenant de v solution de (NS) sur $[0,T]$, appartenant à $\widetilde{X}_T \cap Y_T$. ■

En particulier, il existe $t_0 > 0$ tel que $v(t_0) \in L^2$ (parler de $v(t_0)$ a un sens, en effet, nous verrons dans la suite que v est continue à valeurs dans ∂BMO). Il nous faut maintenant étendre à $\mathbb{R}^+$ notre solution définie pour l'instant localement. C'est l'objet de la proposition suivante, qui porte sur une estimation d'énergie a priori.

Proposition 4.2.5 *Soit $v_{t_0} \in L^2_\sigma$, et w comme ci-dessus. On considère v solution de*

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v\cdot\nabla v + w\cdot\nabla v + v\cdot\nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=t_0} = v_{t_0} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

On dispose alors de l'estimation a priori suivante sur la norme de v

$$\|v\|_{L^\infty([t_0,t],L^2)\,\cap\, L^2([t_0,t],\dot{H}^1)} \leq C' \left(\frac{t}{t_0}\right)^{C\epsilon} \|v_{t_0}\|_{L^2} \,. \tag{4.2.8}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION : Dans la première des trois équations de (4.2.7) on prend le produit scalaire (spatial) avec v puis on intègre (en temps) et on obtient formellement, en utilisant $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0$:

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds - \int_{t_0}^t \langle v\cdot\nabla v\,,\, w\rangle\, ds = \|v_{t_0}\|_2^2 \tag{4.2.9}$$

(pour justifier rigoureusement la formule ci-dessus, il suffit de régulariser l'équation). L'inégalité de Hölder et le fait que $\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \leq C\epsilon$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_0}^t \langle v\cdot\nabla v\,,\, w\rangle\, ds\right| &\leq \int_{t_0}^t \|v(s)\|_2 \|\nabla v(s)\|_2 \|w(s)\|_\infty ds \\ &\leq C\epsilon \left(\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds + \int_{t_0}^t \frac{\|v(s)\|_2^2}{s} ds\right) \end{aligned}$$

En reportant dans (4.2.9), on obtient :

$$\|v(t)\|_2^2 + (2 - C\epsilon)\int_{t_0}^t \|\nabla v(s)\|_2^2\, ds \quad\leq\quad \|v_{t_0}\|_2^2 + C\epsilon \int_{t_0}^t \frac{\|v(s)\|_2^2}{s} ds\,,$$

et le lemme de Gronwall permet d'obtenir le résultat souhaité. ■

On peut maintenant appliquer le schéma standard : régularisation de l'équation (NS) sur $[t_0, +\infty[$, puis passage à la limite faible en utilisant l'estimation précédente. On en déduit que v se prolonge à $\mathbb{R}^+$ en une solution de (NS) vérifiant (4.2.8). En posant

$u = v + w$, on obtient une solution globale de (NS) issue de u_0. Comme $L^2 \hookrightarrow \partial BMO$, et du fait des inégalités (4.2.1), (4.2.4) et (4.2.8), on dispose de plus de l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{\partial BMO} &\leq \|v(t)\|_{\partial BMO} + \|w(t)\|_{\partial BMO} \\ &\leq \|v(t)\|_{L^2} + \|e^{t\Delta}w_0\|_{\partial BMO} + \|B(w,w)\|_{\partial BMO} \\ &\leq C'(1+t^\delta)\ ,\end{aligned}$$

pour $\delta = C\epsilon$. En faisant varier ϵ, et en utilisant l'unicité des solutions, que nous allons prouver dans la prochaine sous-section, on peut obtenir cette inégalité pour tout $\delta > 0$.

Il nous reste à démontrer la proposition 4.2.4, que nous avons utilisée plus haut :

Preuve de la proposition 4.2.4: Pour commencer, on peut montrer (voir [22]) que le noyau de $\nabla^k e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ s'écrit :

$$t^{-\frac{3+k}{2}} G_k(\frac{|x|}{\sqrt{t}})$$

avec $G_k \in L^1 \cap L^\infty$. On notera pour plus de simplicité indifféremment G pour tous les G_k. De même, nous considérerons dans ce qui suit pour alléger les écritures que B opère sur des fonctions réelles. Ceci nous conduit aux notations suivantes [4] :

$$\begin{aligned}B(w,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds \\ \nabla B(w,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds\end{aligned}$$

Les inégalités de Young et Hölder permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\|B(w,v)(t)\|_2 &= \| \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds\|_2 \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \|G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\|_1 \|w(s)\|_\infty \|v(s)\|_2 ds \\ &\leq \|G\|_1 \left(\sup_{t>0} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{t>0}\|v(t)\|_2\right)\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|B(w,v)(t)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} &= \sup_{0<t<T}\|B(w,v)(t)\|_2 \\ &\leq \|G\|_1 \left(\sup_{0<t<T}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\right)\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\|v(t)\|_2\right) \\ &\leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T}\ ,\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à obtenir une estimation de la norme du gradient de B ; pour ce faire, nous décomposons cette fonctionnelle en une somme de deux termes :

$$\begin{aligned}B(w,v)(t) &= \int_0^{t/2} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds + \int_{t/2}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds \\ &= B_1(w,v)(t) + B_2(w,v)(t)\end{aligned}$$

Et nous écrivons $\nabla B(w,v) = \nabla B_1(w,v) + B_2(\nabla w, v) + B_2(w, \nabla v)$. Il vient alors, en utilisant les inégalités de Young et Hölder :

$$\begin{aligned}\|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 &= \| \int_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^2} G(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}) * (w(s)v(s)) ds\|_2 \\ &\leq C \int_0^{t/2} \frac{ds}{(t-s)\sqrt{s}} \left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \right) \left(\sup_{0<t<T} \|v(t)\|_2 \right)\end{aligned}$$

Soit :

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 \leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T} \ .$$

En utilisant encore une fois la même majoration, on montre enfin :

$$\begin{aligned}\sup_{0<t<T} \|B_2(\nabla w, v)(t)\|_2 &\leq C \sup_{0<t<T} \int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}} \left(\sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty \right) \left(\sup_{0<t<T} \|v(t)\|_2 \right) \\ &\leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T} \\ \sup_{0<t<T} \|B_2(w, \nabla v)(t)\|_2 &\leq C \sup_{0<t<T} \int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}} \left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \right) \left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla v(t)\|_2 \right) \\ &\leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T} \ .\end{aligned}$$

Il apparaît maintenant pourquoi nous avons dû décomposer B sous la forme $B = B_1 + B_2$. Les formules ci-dessus comprennent en effet des intégrales (comme $\int_{t/2}^t \frac{ds}{s\sqrt{t-s}}$) qui ne convergeraient pas si le domaine d'intégration était $[0,t]$. Au total,

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla B(w,v)(t)\|_2 \leq C\|w\|_{\widetilde{X}_T}\|v\|_{Y_T} \ ,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

4.2.3 Preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$

Cette section est consacrée à la preuve de la partie "unicité" du théorème A.

Montrons d'abord que deux solutions dans $\mathcal{E}$ de même condition initiale sont égales. Soient donc u, $\widetilde{u}$ deux solutions de (NS) issues de u_0 et appartenant à $\mathcal{E}$. Soit

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \, , \, u(t) \neq \widetilde{u}(t)\} \ .$$

Supposons par l'absurde $\tau < \infty$. Par continuité de u et $\widetilde{u}$ (hypothèse (i) définissant $\mathcal{E}$),

$$u(\tau) = \widetilde{u}(\tau) \quad \in \partial BMO \ .$$

On en déduit en utilisant la proposition 4.2.2 (grâce à la condition (ii) définissant $\mathcal{E}$) que $u = \widetilde{u}$ au voisinage de τ ; on contredit ainsi la définition de τ.

Il nous faut maintenant montrer que les solutions que nous construisons sont effectivement dans $\mathcal{E}$. Nous considérons $u = w + v$ une solution construite comme dans la section 4.2.2. Comme $w_0 \in \partial BMO^{(0)}$, w appartient à $\mathcal{C}([0,\infty[, \partial BMO)$, voir [10]. De même, $v \in \mathcal{C}([0,t_0[, \partial BMO)$. Enfin, $v \in \mathcal{C}([t_0,\infty[, L^2)$. Pour le voir, on écrit

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\nabla(v(s) \otimes v(s) + w(s) \otimes v(s) + v(s) \otimes w(s))\, ds \ .$$

Le terme $v(s) \otimes v(s)$ se traite facilement. En effet, il est classique que les solutions de $(NS2D)$ d'énergie finie sont continues à valeurs dans L^2 ; ceci peut se montrer à partir de l'équation intégrale grâce à la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 3.4.1. Quant au terme $w(s) \otimes v(s) + v(s) \otimes w(s)$, il appartient localement en temps à $L^\infty L^2$, et ne pose donc pas de problème.

Au total,

$$w + v = u \ \in \mathcal{C}([0, \infty[, \partial BMO) \ ,$$

ce qui est la condition (i) définissant $\mathcal{E}$.

Reste la condition (ii). Elle est clairement vérifiée par w, puisque sa norme dans X_∞ est majorée par $C\epsilon$, et on prend le paramètre ϵ assez petit. Pour montrer que v satisfait aussi cette condition, nous nous plaçons en $\tau \geq t_0$ (le cas $\tau < t_0$ est clair) et nous allons voir que pour un certain $\delta > 0$, $v(\tau + \cdot) \in \mathcal{E}_\delta$ (ce dernier espace est défini en (4.2.5)). Pour plus de simplicité dans les notations, nous supposerons dans la suite $\tau = 0$. L'équation suivante est satisfaite par v :

$$v = e^{t\Delta} v_0 - B(v, v) - B(w, v) - B(v, w) \ . \tag{4.2.10}$$

(noter que v est continue à valeurs dans L^2, donc $v(\tau) = v_0$ est bien définie).
Nous avons maintenant besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.1 *Pour $T > 0$ les applications suivantes sont continues :*

$$B : L^4([0,T], L^4) \times L^4([0,T], L^4) \longrightarrow L^4([0,T], L^4)$$
$$B : X_T \times L^4([0,T], L^4) \longrightarrow L^4([0,T], L^4) \ .$$

PREUVE : Il est bien connu (voir par exemple [11]) que B est bicontinu sur $L^p L^q$ dès que $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1$, ce qui est le cas ici. Il reste donc seulement à prouver la seconde assertion du lemme.

$$\begin{aligned} \|B(u,v)\|_4 &\leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|G\|_1 \|u\|_\infty \|v\|_4 \, ds \\ &\leq C \|u\|_{X_T} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} \|v\|_4 ds \ . \end{aligned}$$

Or si $t \mapsto \|v(t)\|_4 \in L^4$, les lois de produit et de convolution entre espaces de Lorentz (voir [22] pages 19 et 20) impliquent que

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \|v(s)\|_4 \in L^{4/3,4}$$

puis que $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} \|v\|_4 \, ds \ \in L^4$. Autrement dit,

$$\|B(u,v)\|_4 \leq C \|v\|_{L^4 L^4} \|u\|_{X_T} \ .$$

■

Grâce au lemme précédent, et comme $w \in X_T$, on peut résoudre (4.2.10) par point fixe dans $L^4([0,T], L^4)$, X_T, et $L^4([0,T], L^4) \cap X_T$, pour T assez petit. Les trois solutions

que nous obtenons dans chacun de ces trois espaces sont en fait égales, par unicité de la solution d'un problème de point fixe à norme petite. Qui plus est, pour cette même raison, elles sont égales à v pour T assez petit puisque

$$v \in L^\infty([0,T], L^2) \cap L^2([0,T], \dot{H}^1) \hookrightarrow L^4([0,T], L^4) \ .$$

On en déduit que

$$\|v\|_{X_T} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{X_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

ce qui conclut la preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$.

On peut maintenant montrer que pour $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$, la solution u (unique dans $\mathcal{E}$) de (NS) est à valeurs dans $\partial BMO^{(0)}$.
Pour ce faire, soient deux suites (w_0^δ) et (v_0^δ) telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_0^\delta\|_{\partial BMO} \leq \delta \\ v_0^\delta \in \mathcal{S} \\ w_0^\delta + v_0^\delta = u_0 \ . \end{array} \right. \tag{4.2.11}$$

Il suffit d'appliquer le schéma de construction de solutions du paragraphe précédent à la décomposition $u_0 = w_0^\delta + v_0^\delta$ pour obtenir

$$u = w^\delta + v^\delta$$

où v est localement bornée dans L^2 et $\|w\|_{\partial BMO} \leq C\delta$. On conclut en laissant δ tendre vers 0.

4.2.4 Dépendance continue par rapport aux données initiales

Nous allons dans cette section nous attacher à prouver la partie "dépendance continue par rapport aux données initiales" du théorème A.
Rappelons que l'on désigne par ϕ le flot de (NS), c'est à dire l'application

$$\begin{array}{rl} \phi & \overset{\text{déf}}{:} (u_0, t) \mapsto u(t) \\ & \partial BMO_\sigma^{(0)} \times \mathbb{R} \longrightarrow \partial BMO \ , \end{array}$$

où u est la solution de (NS) associée à u_0, construite dans la section 4.2.2 et unique d'après la section 4.2.3.
Nous allons prouver la proposition suivante

Proposition 4.2.6 *Le flot ϕ de (NS) est localement lipschitzien.*
Plus précisément, donnons-nous $t > 0$, $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$ et $\delta w_0 \in \partial BMO_\sigma$, qui correspondra à une petite perturbation de u_0. Alors il existe une constante C et $\epsilon > 0$ tels que

$$\|\phi(t, u_0) - \phi(t, u_0 + \delta w_0)\|_{\partial BMO} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}$$

pour $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$. De plus, C et ϵ peuvent être choisis uniformément sur un voisinage de (u_0, t).

Remarque 4.2.1 • *Le théorème d'existence et d'unicité dont nous disposons est valable pour des données initiales appartenant à $\partial BMO_\sigma^{(0)} + \epsilon\, \partial BMO_\sigma$, pour un $\epsilon > 0$, et pas seulement à ∂BMO_σ. C'est la raison pour laquelle on peut choisir δw_0 (assez petit) dans ∂BMO_σ et pas seulement dans $\partial BMO_\sigma^{(0)}$.*

- *De même, le flot est en fait défini sur* $(\partial BMO_\sigma^{(0)} + \epsilon\, \partial BMO_\sigma) \times \mathbb{R}$*, et pas seulement sur* $\partial BMO_\sigma^{(0)} \times \mathbb{R}$.

Preuve de la proposition : Donnons-nous $u_0 \in \partial BMO_\sigma^{(0)}$, $\delta w_0 \in \partial BMO_\sigma$ et t comme dans l'énoncé du théorème. Nous allons reprendre chacune des étapes de la construction de la solution u (voir la section 4.2.2) pour nous assurer que la dépendance de $u(t)$ par rapport à u_0 est bien lipschitzienne.

1. Procédant comme dans la section 4.2.2, nous écrivons $u_0 = v_0 + w_0$, avec $v_0 \in L^2_\sigma$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$. On prend aussi δw_0 de norme inférieure à ϵ ; ϵ est une constante que l'on prend assez petite pour que tous les arguments dont nous aurons besoin dans la suite fonctionnent.
En particulier, comme ϵ est assez petit, on peut appliquer le théorème de Koch et Tataru (théorème 4.2.1) à w_0 et $w_0 + \delta w_0$, et l'on note (respectivement) w et $w + \delta w$ les solutions globales de (NS) associées à ces deux conditions initiales.
On a alors l'inégalité suivante, pour une constante C :

$$\|\delta w(t)\|_{\partial BMO} \leq C \|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ . \tag{4.2.12}$$

En effet, $\delta w(t)$ est donné par la formule

$$\delta w = e^{t\Delta}\delta w_0 - B(\delta w, \delta w) - B(w, \delta w) - B(\delta w, w) \tag{4.2.13}$$

et l'on dispose des estimations

$$\left\{ \begin{array}{l} \|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\partial BMO} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \\ \|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \\ \|e^{t\Delta}\delta w_0\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \\ \|B(v,w)(t)\|_{\partial BMO} \leq C\|v\|_{\widetilde{X}_\infty}\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \end{array} \right. \tag{4.2.14}$$

(la première est une simple conséquence de ce que ∂BMO est un espace de Banach invariant par translation, la seconde résulte de la construction de δw par point fixe, la troisième de la définition même de ∂BMO et de la norme de $\widetilde{X}_\infty$, et la quatrième est prouvée dans [10], et rappelée dans la proposition 4.2.1). En prenant la norme $\|\cdot\|_{\partial BMO}$ de (4.2.13) et en utilisant les quatre estimations précédentes, on obtient

$$\|\delta w(t)\|_{\partial BMO} \leq C\left(\|\delta w_0\|_{\partial BMO} + \|\delta w\|^2_{\widetilde{X}_\infty} + 2\epsilon\|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty}\right) \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

2. Ainsi, en reprenant la méthode de construction que nous avons exposée dans la section 4.2.2, nous avons montré que la première étape de cette méthode est stable par perturbation ; nous allons voir qu'il en est de même pour la seconde. Pour ce faire, il nous faut tout d'abord nous assurer que certaines quantités décisives (par exemple, le temps d'existence de la solution construite par point fixe) peuvent être choisies uniformes dans un voisinage de w_0. On note v la solution de

$$v = e^{t\Delta}v_0 - B(v,v) - B(w,v) - B(v,w)$$

construite par point fixe dans $\widetilde{X}_\tau$ pour un certain $\tau > 0$. Soit $\tau = \tau(v_0, w)$ le temps maximal sur lequel l'argument de point fixe est valable, c'est à dire le temps maximal sur

lequel on peut construire une solution à l'aide du théorème 4.4.2. Ce temps $\tau(v_0, w)$ dépend de la décroissance quand T tend vers 0 de $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T}$, $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ et $\|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}$ (voir théorème 4.4.2). Or $\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_T}$ ne dépend pas de w_0, et d'autre part

$$\max(\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}, \|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_T)}) \leq C\|w\|_{\widetilde{X}_\infty} \leq C\|w_0\|_{\partial BMO} \ .$$

Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si w_0 et δw_0 sont de norme ∂BMO inférieure à ϵ, $\tau(v_0, w+\delta w)$ admet un minorant strictement positif, $\tau^\star$. En d'autres termes, la solution $\widetilde{v}$ de

$$\widetilde{v} = e^{t\Delta}v_0 - B(\widetilde{v},\widetilde{v}) - B(w+\delta w,\widetilde{v}) - B(\widetilde{v}, w+\delta w) \ , \tag{4.2.15}$$

peut être construite par point fixe dans $\widetilde{X}_{\tau^\star}$ dès que $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$. De plus, étant donné $\zeta > 0$ (qui sera fixé par la suite), on choisit $\tau^\star$ assez petit pour que, si $\|\delta w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$ et $\|w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$, on ait $\|\widetilde{v}\|_{\widetilde{X}_\tau} < \zeta$. C'est possible car, pour une constante C uniforme tant que w_0 et δw_0 restent petits,

$$\|\widetilde{v}\|_{\widetilde{X}_\tau} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{\widetilde{X}_\tau} \ ,$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand τ tend vers 0.

3. Dans ce qui suit, $\tau^\star$ est fixé ; de plus, on garde les notations v et $\widetilde{v}$ pour les solutions des équations ci-dessus. Comme dans la section 4.2.2, on montre par propagation de régularité que $v \in Y_{\tau^\star}$.
Puisque nous cherchons un résultat de stabilité, il est naturel d'introduire

$$V = \widetilde{v} - v \ .$$

En combinant les équations dont v et $\widetilde{v}$ sont solutions, on obtient une équation en V

$$V = -B(V,V) - B(v,V) - B(V,v) - B(w,V) - B(V,w) - B(\delta w,\widetilde{v}) - B(\widetilde{v},\delta w) \tag{4.2.16}$$

valable sur $[0,\tau^\star]$. On peut prendre la norme $\|\cdot\|_{Y_{\tau^\star}}$ de chacun des membres de l'équation ci-dessus ; par continuité de B de $\widetilde{X}_{\tau^\star} \times Y_{\tau^\star}$ dans $Y_{\tau^\star}$ (proposition 4.2.4), on obtient

$$\begin{aligned}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} &\leq C\left(\|V\|_{Y_{\tau^\star}}\|V\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}} + \|v\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + \|w\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + \|\delta w\|_{\widetilde{X}_{\tau^\star}}\|\widetilde{v}\|_{Y_{\tau^\star}}\right) \\ &\leq C(\zeta+\epsilon)\|V\|_{Y_{\tau^\star}} + C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\|v_0\|_{L^2} \ ,\end{aligned}$$

où l'on utilise dans la dernière inégalité le lemme 4.4.1 :

$$\|\widetilde{v}\|_{Y_{\tau^*}} \leq C\|e^{t\Delta}v_0\|_{Y_{\tau^*}} \leq C\|v_0\|_{L^2} \ .$$

Si ϵ et ζ sont assez petits pour que $C(\zeta+\epsilon) < 1$, on trouve

$$\|V\|_{Y_{\tau^\star}} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ .$$

En particulier, si $t \in [0,\tau^\star]$,

$$\|V(t)\|_{L^2} \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \ . \tag{4.2.17}$$

Comme $\phi(u_0+\delta w_0, t) - \phi(u_0,t) = \delta w + V$, cette dernière inégalité conjuguée à (4.2.12) prouve le théorème dans le cas $t \leq \tau^\star$.

4. Dans le cas $t > \tau^\star$, la conclusion sera donnée, comme nous allons le voir, par une estimation d'énergie. Suivant notre schéma de construction de la solution, on prolonge v et $\widetilde{v}$ pour $t > \tau^\star$ en des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}^+$, d'énergie finie localement en temps. L'équation intégrale (4.2.16) dont V était solution peut maintenant s'écrire sous forme différentielle, pour tout $t > \tau^\star$

$$\partial_t V - \Delta V + \mathbb{P}(V \cdot \nabla V + v \cdot \nabla V + V \cdot \nabla v + w \cdot \nabla V + V \cdot \nabla w + \delta w \cdot \nabla \widetilde{v} + \widetilde{v} \cdot \nabla \delta w) = 0$$

En prenant le produit scalaire spatial par V on obtient, en utilisant $\operatorname{div} V = \operatorname{div} w = \operatorname{div} v = 0$,

$$\frac{1}{2}\partial_t \|V\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \langle V \cdot \nabla v, V\rangle + \langle V \cdot \nabla w, V\rangle + \langle \widetilde{v} \cdot \nabla \delta w + \delta w \cdot \nabla \widetilde{v}, V\rangle = 0 \ . \quad (4.2.18)$$

Pour pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, il nous faut estimer les trois derniers termes. Ainsi

$$\begin{aligned} |\langle V \cdot \nabla v, V\rangle| &\le C\|V\|_{\dot{H}^{1/2}} \|v\|_{\dot{H}^1} \|V\|_{\dot{H}^{1/2}} \le C\|v\|_{\dot{H}^1} \|V\|_{L^2} \|V\|_{\dot{H}^1} \\ &\le \frac{1}{4}\|V\|_{\dot{H}^1}^2 + C\|v\|_{\dot{H}^1}^2 \|V\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

du fait des lois de produit (voir chapitre 6) et des inégalités d'interpolation classiques entre espaces de Sobolev. D'autre part,

$$|\langle V \cdot \nabla w, V\rangle| = |\langle V \cdot \nabla V, w\rangle| \le \frac{\|w\|_{\widetilde{X}_\infty}}{\sqrt{t}} \|V\|_2 \|V\|_{\dot{H}^1} \le \frac{1}{4}\|V\|_{\dot{H}^1}^2 + \frac{C}{t}\|V\|_2^2 \quad (4.2.20)$$

car $\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \le \|w\|_{\widetilde{X}_\infty}$ pour tout $t > 0$. Pour le dernier terme de (4.2.18), nous faisons appel à l'estimation dérivée dans la proposition 4.2.5 :

$$\|v(t)\|_{L^\infty([\tau^\star,t],L^2) \,\cap\, L^2([\tau^\star,t],\dot{H}^1)} \le C\left(\frac{t}{\tau^\star}\right)^{C\epsilon} \|v(\tau^\star)\|_{L^2} \quad ; \quad (4.2.21)$$

cette estimation est aussi valable pour $\widetilde{v}$, et par conséquent aussi pour V. En l'utilisant, on obtient

$$|\langle \widetilde{v} \cdot \nabla \delta w, V\rangle| \le \frac{\|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty}}{t} \|\widetilde{v}\|_{L^2} \|V\|_{L^2} \le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} t^{C\epsilon - 1} \quad (4.2.22)$$

puisque $t\|\nabla \delta w(t)\|_\infty \le \|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty}$. De même, on a

$$|\langle \delta w \cdot \nabla \widetilde{v}, V\rangle| \le \frac{\|\delta w\|_{\widetilde{X}_\infty}}{\sqrt{t}} \|V\|_{L^2} \|\widetilde{v}\|_{\dot{H}^1} \le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}(t^{C\epsilon-1} + \|\widetilde{v}\|_{\dot{H}^1}^2) \ . \quad (4.2.23)$$

A l'aide des estimations (4.2.19) (4.2.20) (4.2.22) (4.2.23), (4.2.18) se réécrit

$$\partial_t \|V\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 \le C\|V\|_2^2 \left(\frac{1}{t} + \|v\|_{\dot{H}^1}^2\right) + C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}(t^{C\epsilon-1} + \|\widetilde{v}\|_{\dot{H}^1}^2) \ .$$

En intégrant cette inégalité, on trouve, si $t > \tau^\star$,

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_2^2 + \int_{\tau^\star}^t \|\nabla V\|_2^2 \ &\le \|V(\tau^\star)\|_2^2 + C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \int_{\tau^\star}^t [s^{C\epsilon-1} + \|\widetilde{v}(s)\|_{\dot{H}^1}^2]\, ds \\ &\quad + C\int_{\tau^\star}^t \left(\frac{1}{s} + \|v(s)\|_{\dot{H}^1}^2\right) \|V(s)\|_2^2 \, ds \\ &\le C\|\delta w_0\|_{\partial BMO}\left[1 + t^{C\epsilon}\right] + C\int_{\tau^\star}^t \left(\frac{1}{s} + \|v(s)\|_{\dot{H}^1}^2\right) \|V(s)\|_2^2 \, ds \end{aligned}$$

(en utilisant (4.2.17) et (4.2.21)) et le lemme de Gronwall donne

$$\|V(t)\|_2^2 + \int_{\tau^\star}^t \|\nabla V\|_2^2 \leq C\|\delta w_0\|_{\partial BMO} \left[1 + t^{C\epsilon}\right] t^C \exp\left(Ct^{C\epsilon}\right) \ .$$

Cette denière estimation jointe à (4.2.12) et au fait que $\phi(u_0 + \delta w_0, t) - \phi(u_0, t) = \delta w + V$ achève la preuve du théorème. ■

4.2.5 Ajout d'une force extérieure

Nous nous intéressons maintenant au système (NSF), qui correspond au cas où une force extérieure f est appliquée.

$$(NSF) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

Ce système admet lui aussi une formulation intégrale, sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\nabla(u(s) \otimes u(s)) ds + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} f(s)\, ds \ .$$

Il est bien connu que, si $u_0 \in L^2_\sigma$, ce système admet une solution globale, d'énergie finie, à condition que $f \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1})$. Le schéma de la preuve du théorème A s'adapte sans difficulté si l'on suppose $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$: il suffit de résoudre d'abord (NS) avec une donnée initiale petite dans ∂BMO_σ, puis de considérer le problème perturbé par la force extérieure f et l'ajout d'une quantité d'énergie finie à la donnée initiale. On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 4.2.3 *Soit $u_0 \in \partial BMO^{(0)}_\sigma$, et $f \in L^2([0, \infty[, \dot{H}^{-1})$. Il existe une solution globale u de (NSF). De plus, pout tout δ strictement positif, il existe une constante $C(\delta)$, dépendant de u_0, V et δ, telle que*

$$\forall t > 0 \quad \|v(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^\delta) \, .$$

Remarquons qu'en procédant de la même manière que Cannone et Planchon [5], il est possible de prouver l'existence d'une solution de (NSF) pour une force extérieure f appartenant à un espace moins régulier que $L^2\dot{H}^{-1}$: on peut en effet déterminer un espace pour f adapté à ∂BMO.

4.3 Preuve du théorème B

L'idée de la preuve que nous allons donner est de jouer sur la différence d'homogénéité entre un espace dans lequel on réalise une estimation d'énergie, et un espace au scaling de l'équation (NS).
C'est cette idée, introduite par Gallagher, Iftimie et Planchon [13] [14] qui, en dimension d'espace égale à 3, a permis de démontrer la convergence vers 0 à l'infini des solutions globales de (NS) pour la norme d'un espace critique X auquel appartient la donnée initiale. Gallagher, Iftimie et Planchon ont traité les cas $X = \dot{H}^{1/2}_\sigma$ (dans [13]) et $X =$

$(\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q})_\sigma$ avec $1 < p, q < \infty$ (dans [14]), puis Auscher, Dubois et Tchamitchian [1] le cas $X = \partial BMO^{(0)}_\sigma$.
Pour expliquer cette idée de manière concrète, nous allons l'employer dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $X = \dot{H}^{1/2}_\sigma$, en exposant le schéma de la preuve de Gallagher, Iftimie et Planchon [13].

4.3.1 Le cas $d = 3$, $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$

Plaçons-nous pour la durée de ce paragraphe en dimension 3 d'espace, et donnons-nous $u_0 \in \dot{H}^{1/2}_\sigma$ ainsi que $u \in \mathcal{C}([0,\infty[, \dot{H}^{1/2})$ une solution de (NS) pour cette donnée initiale. Comme nous l'avons fait dans la section 4.2.2, nous scindons u_0 en deux parties,

$$u_0 = v_0 + w_0 \ ,$$

où w_0 est petit en norme dans $\dot{H}^{1/2}_\sigma$, et $v_0 \in H^1_\sigma$, l'espace de Sobolev inhomogène. On associe à w_0, grâce à un résultat classique, une solution w dans $\mathcal{C}([0,\infty[, \dot{H}^{1/2})$ de (NS). On note v la solution (globale) de (NS) perturbé par w

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{array} \right.$$

On s'assure alors que $v \in \mathcal{C}([0,\infty[, L^2)$. Ceci permet d'estimer l'énergie de v comme dans le lemme 4.2.5, pour obtenir

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|v(s)\|^2_{\dot{H}^1} \, ds &\leq \|v_0\|_2^2 + 2\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx \, ds \right| \\ &\leq \|v_0\|_2^2 + C\|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \int_0^t \|v(s)\|^2_{\dot{H}^1} \, ds \ , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte d'une loi de produit classique entre espaces de Sobolev. L'estimation ci-dessus permet, si $\|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$ est assez petit, de déduire que l'énergie de v, c'est à dire

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|v(s)\|^2_{\dot{H}^1} \, ds \ ,$$

est uniformément bornée par rapport à t. Ceci implique, par interpolation, que la norme de $v(t)$ dans $\dot{H}^{1/2}$ peut être rendue aussi petite que l'on souhaite, pour un certain t. La norme de w dans $\dot{H}^{1/2}$ reste petite pour tout temps. Il n'est dès lors pas difficile de conclure, par la théorie à données petites, que

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Si l'on examine pourquoi la preuve que nous avons ébauchée fonctionne, il apparaît qu'un élément crucial est que l'espace d'énergie et les espaces critiques n'ont pas le même scaling. En particulier, c'est $L^4\dot{H}^{1/2}$ qui est au scaling de l'énergie, et $L^\infty\dot{H}^{1/2}$ qui est un espace critique.

4.3.2 Preuve du théorème B

En dimension 2 d'espace, l'espace d'énergie $\mathcal{L}$ a la même homogénéité que les espaces critiques. Il nous faudra donc créer un décalage artificiel de scaling en faisant une estimation d'énergie dans $\dot{H}^{-\delta}$ au lieu de L^2.

Notons d'autre part que le point (ii) du théorème B peut aussi être montré grâce à une méthode perturbative en partant du schéma de la preuve du théorème de Wiegner [29] qui établit la convergence vers 0 (en norme L^2) des solutions de Leray de (NS) issues de $u_0 \in L^2$.

1. Nous commençons comme dans la preuve du théorème A. On se donne donc $u_0 \in (\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q})_\sigma$, que l'on décompose en une somme $u_0 = v_0 + w_0$, où $v_0 \in L^2_\sigma \cap \dot{H}^{-\delta}$ et $\|w_0\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq \epsilon$, où ϵ est pris assez petit pour que tous les arguments dont nous aurons besoin par la suite s'appliquent. On note w la solution de (NS) pour la donnée initiale w_0, et v la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \ . \end{array} \right. \tag{4.3.1}$$

La seule estimation sur w dont nous aurons besoin est que

$$\|w(t)\|_\infty \leq C \frac{\epsilon}{\sqrt{t}} \cdot \tag{4.3.2}$$

Toute la difficulté est maintenant de contrôler v. Donnons-nous $\delta \in]0,1[$. Rappelons la définition du produit scalaire dans l'espace de Sobolev $\dot{H}^{-\delta}$:

$$\langle f, g \rangle_{\dot{H}^{-\delta}} = \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) |\xi|^{-2\delta} \, d\xi = \langle f, \Lambda^{-2\delta} g \rangle \ ,$$

où Λ est l'opérateur de Calderón $\Lambda = |D|$. En appliquant $\langle \cdot, v \rangle_{\dot{H}^{-\delta}}$ à l'équation (4.3.1) vérifiée par v, on obtient formellement

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} + \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + \langle v \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle + \langle w \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle + \langle v \cdot \nabla w, \Lambda^{-2\delta} v \rangle = 0 \tag{4.3.3}$$

(l'opérateur de Leray $\mathbb{P}$ a disparu puisqu'il commute avec $\Lambda^{-2\delta}$ et que v est de divergence nulle). Pour montrer rigoureusement (4.3.3), on peut appliquer le schéma classique de régularisation des solutions puis de passage à la limite. Il nous faut maintenant estimer les 3 derniers termes de (4.3.3) afin d'obtenir un contrôle de $\|v\|_{\dot{H}^{-\delta}}$. Les deux derniers termes sont les plus faciles :

$$\begin{aligned} \Big| \langle v \cdot \nabla w, \Lambda^{-2\delta} v \rangle \Big| = \Big| \langle v \cdot \nabla \Lambda^{-2\delta} v, w \rangle \Big| &\leq \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-2\delta}} \|v\|_2 \\ &\leq C \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}} \leq \frac{1}{4} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + C \|w\|^2_\infty \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \ , \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

où l'on a utilisé une inégalité d'interpolation classique entre espaces de Sobolev ; on montre de même

$$\Big| \langle w \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle \Big| \leq C \|w\|_\infty \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}} \leq \frac{1}{4} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + C \|w\|^2_\infty \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \ . \tag{4.3.5}$$

Reste à estimer $\langle v \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle$. La démarche à suivre est alors différente suivant que l'on se trouve dans le cas (i) ou (ii) du théorème.

2. Supposons tout d'abord que nous sommes dans le cas (i), c'est à dire que $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} > 1$. On peut écrire, d'après les lois de produit classiques dans les espaces de Sobolev,

$$\begin{aligned} \left| \langle v \cdot \nabla v, \Lambda^{-2\delta} v \rangle \right| &\leq \|v \cdot \nabla v\|_{\dot{H}^{-2\delta}} \|\Lambda^{-2\delta} v\|_{\dot{H}^{2\delta}} \\ &\leq C \|v\|_{\dot{H}^{1-2\delta}} \|v\|_{\dot{H}^1} \|v\|_2 \\ &\leq C \|v\|_{\dot{H}^1} \|v\|_{\dot{H}^{-\delta}} \|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} + C \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \|v\|^2_{\dot{H}^1} \ . \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Nous pouvons maintenant rassembler les estimations (4.3.4), (4.3.5) et (4.3.6) et les insérer dans (4.3.3) pour obtenir

$$\partial_t \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} + \|v\|^2_{\dot{H}^{1-\delta}} \leq C \|v\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \left(\|w\|^2_\infty + \|v\|^2_{\dot{H}^1} \right) \ .$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient alors que, pour $T > \tau > 0$,

$$\|v(t)\|^2_{L^\infty([\tau,T],\dot{H}^{-\delta}) \cap L^2([\tau,T],\dot{H}^{1-\delta})} \leq C \|v(\tau)\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \exp\left(\int_\tau^T (\|w(s)\|^2_\infty + \|v(s)\|^2_{\dot{H}^1}) \, ds \right) \ . \tag{4.3.7}$$

Il nous faut ici utiliser un résultat tiré de [15] (pages 13 et 14) : du fait de l'hypothèse (i), on a

$$\int_0^\infty \|v(s)\|^2_{\dot{H}^1} \, ds \ < \ \infty \ ;$$

en combinant cette dernière estimation avec (4.3.2), on voit que (4.3.7) implique que

$$\|v(t)\|^2_{L^\infty([\tau,T],\dot{H}^{-\delta}) \cap L^2([\tau,T],\dot{H}^{1-\delta})} \leq C \|v(\tau)\|^2_{\dot{H}^{-\delta}} \left(\frac{T}{\tau} \right)^{C\epsilon} \ .$$

3. En interpolant entre $L^\infty([\tau,T],\dot{H}^{-\delta})$ et $L^2([\tau,T],\dot{H}^{1-\delta})$, on trouve que

$$\|v\|_{L^{2/\delta}([\tau,T],L^2)} \leq C \left(\frac{T}{\tau} \right)^{C\epsilon} \ ,$$

ce qui implique que

$$\left(\inf_{s \in [\tau,T]} \|v(s)\|_2 \right) (T-\tau)^{\delta/2} \leq C \left(\frac{T}{\tau} \right)^{C\epsilon} \ .$$

Si ϵ est choisi assez petit, ceci implique que pour tout $\eta > 0$, il existe un T_η tel que $\|v(T_\eta)\|_2 \leq \eta$. D'autre part, comme la norme de w dans $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ est bornée par $C\epsilon$ on a $\|u(T_{C\epsilon})\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq 2C\epsilon$, pour la même constante C. Si ϵ est assez petit, ceci implique que $\|u(s)\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}}$ reste majorée par $C\epsilon$ (pour une nouvelle constante C) pour $s > T_{C\epsilon}$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on obtient le résultat souhaité dans le cas (i).

4. Supposons maintenant que l'on se trouve dans le cas (ii). Nous allons montrer qu'on a alors

$$\left|\langle v\cdot\nabla v,\Lambda^{-2\delta}v\rangle\right|\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta-2/q}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta}} \tag{4.3.8}$$

dès lors que $\delta<\dfrac12-\dfrac1q$. Pour prouver cette estimation, on utilise l'algorithme du paraproduit (voir par exemple [15]) qui permet d'écrire (dans les lignes qui suivent, on oublie le caractère vectoriel de v et on le traite comme un scalaire, pour ne pas alourdir les notations)

$$\begin{aligned}\langle v\nabla v,\Lambda^{-2\delta}v\rangle&=\int_{\mathbb{R}^2}v\nabla v\Lambda^{-2\delta}v\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{|j-j'|\leq1}\Delta_jv\Delta_{j'}\nabla vS_{j+5}\Lambda^{-2\delta}v+\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{|j-j'|\leq5}\Delta_jvS_{j-1}\nabla v\Delta_{j'}\Lambda^{-2\delta}v\\&\qquad+\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{|j-j'|\leq5}S_{j-1}v\Delta_j\nabla v\Delta_{j'}\Lambda^{-2\delta}v\ .\end{aligned}$$

A partir de maintenant, pour rendre les calculs plus clairs, nous oublions les décalages d'indice dans les sommations ci-dessus. L'idée que nous allons mettre en oeuvre est d'estimer séparément chacun des trois termes ci-dessus ; nous nous bornerons à écrire les calculs qui correspondent au premier de ces trois termes ; les deux autres s'estiment de manière très similaire.

$$\begin{aligned}\left|\int\sum_j\Delta_jv\Delta_j\nabla vS_j\Lambda^{-2\delta}v\right|&\leq\sum_j\|S_j\Lambda^{-2\delta}v\Delta_j\nabla v\|_2\|\Delta_jv\|_2\\&\leq\sum_j\sum_{k<j}2^{-2k\delta}\|\Delta_kv\|_\infty2^j\|\Delta_jv\|_2^2\\&\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\sum_j2^j\|\Delta_jv\|_2^2\sum_{k<j}2^{k(1-2\delta-2/q)}\ ,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme de Bernstein. Comme de plus $\delta<\dfrac12-\dfrac1q$, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\int\sum_j\Delta_jv\Delta_j\nabla vS_j\Lambda^{-2\delta}v\right|&\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\sum_j2^{j(2-2\delta-2/q)}\|\Delta_jv\|_2^2\\&\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta-2/q}}\ .\end{aligned}$$

5. En interpolant entre espaces de Sobolev, puis en appliquant l'inégalité de Young, on voit facilement que (4.3.8) implique

$$\begin{aligned}\left|\langle v\cdot\nabla v,\Lambda^{-2\delta}v\rangle\right|&\leq C\|v\|_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\|v\|_{\dot H^{1-\delta}}^{2-2/q}\|v\|_{\dot H^{-\delta}}^{2/q}\\&\leq C\|v\|^q_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}+\frac12\|v\|^2_{\dot H^{1-\delta}}\ .\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

Il suffit maintenant de rassembler (4.3.4), (4.3.5) et (4.3.9), et d'insérer ces estimations dans (4.3.3) pour obtenir

$$\partial_t\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}+\|v\|^2_{\dot H^{1-\delta}}\leq C\|v\|^2_{\dot H^{-\delta}}\left(\|v\|^q_{\dot B^{-1+2/p+2/q}_{p,q}}+\|w\|_\infty\right)\ .$$

Or, puisque nous sommes dans le cas (ii), v appartient à $L^q\dot{B}^{-1+2/p+2/q}_{p,q}$, et on peut procéder comme dans **2.** en appliquant le lemme de Gronwall puis conclure comme dans **3.** Ceci conclut la preuve du théorème. ■

4.4 Annexe

4.4.1 L'espace ∂BMO et son sous-espace $\partial BMO^{(0)}$

Cette section est consacrée à une présentation des espaces ∂BMO et $\partial BMO^{(0)}$, qui apparaissent fréquemment dans ce chapitre. Nos deux références sont les livres de Stein [27] et de Lemarié [22].
Nous disons que $f \in \mathcal{S}'$ appartient à BMO si

$$\sup_{R>0,x\in\mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |\nabla e^{t\Delta} f(x)|^2 dxdt < \infty.$$

(où l'on note $\fint_{B(x,R)} = \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)}$). Une définition plus classique consiste à demander que

$$\sup_{R>0,x\in\mathbb{R}^2} \fint_{B(x,R)} \left| f(y) - \fint_{B(x,R)} f \right| dy \, < \, +\infty.$$

On peut maintenant définir ∂BMO, l'espace des fonctions dérivées de fonctions de BMO. Plus précisément, on dira que $f \in \partial BMO(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe des fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$ $f_1, \ldots, f_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \, .$$

Au vu de la première définition que nous avons donnée de l'espace BMO, il n'est pas surprenant que f appartienne à ∂BMO si et seulement si

$$\sup_{R>0,x\in\mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dxdt < \infty \, . \tag{4.4.1}$$

Cette dernière formule définit une norme sur ∂BMO ; nous la noterons $\|\cdot\|_{\partial BMO}$. Muni de cette norme, ∂BMO est un espace complet.

Venons-en maintenant à $\partial BMO^{(0)} = (\partial BMO)^{(0)}$.
On note $CMO = BMO^{(0)}$, l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans BMO. On peut montrer (voir [2]) que

$$f \in CMO \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in BMO \\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d, R<\rho} \fint_{B(x,R)} \left| f(y) - \fint_{B(x,R)} f \right| dy \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d, R>\rho} \fint_{B(x,R)} \left| f(y) - \fint_{B(x,R)} f \right| dy \underset{\rho\to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{limsup}_{a\to\infty} \fint_{B+a} \left| f(y) - \fint_{B+a} f \right| dy = 0 \quad \text{pour toute boule } B. \end{array} \right. \tag{4.4.2}$$

Il est clair que

$$\partial(CMO) = \partial(BMO^{(0)}) \subset (\partial BMO)^{(0)} \ .$$

Par contre, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, au moins en dimension 1. Plaçons-nous en effet en dimension 1 et soit f une fonction appartenant à $\mathcal{S}$ et donc aussi à ∂BMO. Notons g une quelconque de ses primitives,

$$g(x) = A + \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \ ,$$

où A est un réel. On observe que, si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f \neq 0$, g n'a pas la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Ceci implique que g n'appartient pas à CMO puisque le troisième point de (4.4.2) n'est alors pas vérifié.

4.4.2 Relation entre vitesse et vorticité

Si $u \in \mathcal{S}'$, on note $\operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$.

Théorème 4.4.1 *Soient $p \in [1, \infty[$ et $q \in [1, \infty]$.*

- *Si $u \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ et si $\omega = \operatorname{rot} u$, on a*

$$\|\omega\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \leq C \|u\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \ .$$

- *Inversement, si $\omega \in \dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$, il existe un unique $u \in \dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} u = 0 \\ \omega = \operatorname{rot} u \ ; \end{array} \right. \tag{4.4.3}$$

de plus, u vérifie

$$\|u\|_{\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}} \leq C \|\omega\|_{\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}} \ .$$

PREUVE : Le premier point du théorème est trivial.

Montrons maintenant le second, en commençant par l'unicité. Supposons que u et $\widetilde{u}$ appartiennent à $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$ et sont solution de (4.4.3) pour un ω dans $\dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$ donné. Alors leur différence, v, est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \\ \operatorname{rot} v = 0 \ . \end{array} \right.$$

Ceci implique que $\Delta v = 0$, puis que $v = 0$ puisque 0 est le seul polynôme harmonique contenu dans $\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q}$.

Pour ce qui est de l'existence, si $\omega \in \dot{B}^{-2+2/p}_{p,q}$, il suffit de poser

$$u = \nabla^{\perp} \Delta^{-1} \omega = \sum_j \nabla^{\perp} \Delta^{-1} \omega \ .$$

■

On montre de même le résultat suivant.

Proposition 4.4.1 *Si $\omega \in \mathcal{M}$, il existe un unique $u \in \dot{B}^1_{1,\infty}$ tel que $\omega = \operatorname{rot} u$. De plus, on a*

$$\|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{1,\infty}} \leq C \|\omega\|_{\mathcal{M}} \ .$$

4.4.3 Fonctions homogènes de degré -1

Nous nous plaçons en dimension 2, et utiliserons les coordonnées cartésiennes (en notant alors le repère local $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) ainsi que les coordonnées polaires (en notant alors le repère local $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$.
Soit f une fonction autosimilaire de degré -1, c'est à dire que pour tout réel λ strictement positif et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \ ;$$

on suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. Il est naturel d'écrire f en coordonnées polaires

$$f(r,\theta) = \frac{1}{r}\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{r}(\widetilde{f_\theta}(\theta)\mathbf{e}_\theta + \widetilde{f_r}(\theta)\mathbf{e}_r) \ .$$

Condition de divergence nulle

Comme f est localement intégrable et bornée à l'infini, c'est une distribution tempérée. Pour donner un sens à la divergence de f, on considèrera cette notion au sens de $\mathcal{S}'$.

Proposition 4.4.2 *f est à divergence nulle au sens de $\mathcal{S}'$ si est seulement si*

- *$\widetilde{f_\theta}$ est une constante et*
- *$\int \widetilde{f_r}(\theta)\, d\theta = 0$.*

PREUVE : f est de divergence nulle si et seulement si, pour toute $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \operatorname{div} f, \phi \rangle = 0 \ .$$

En dehors de 0, la divergence de f vaut

$$\operatorname{div} f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \widetilde{f_\theta}}{\partial \theta} \ .$$

Pour que la divergence de f s'annule en dehors de 0, il suffit donc que $\widetilde{f_\theta}$ soit une constante.

Examinons maintenant la situation en 0. Fixons une fonction-test ϕ, non nulle en 0. Soit d'autre part χ une fonction de $\mathcal{D}$ dépendant seulement de r, égale à 1 dans un voisinage de 0. Comme la divergence de f est nulle partout sauf en 0, on peut se restreindre à n'importe quelle boule centrée en 0 de rayon R, autrement dit le crochet de dualité entre ϕ et $\operatorname{div} f$ est égal à

$$\langle \operatorname{div} f, \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\phi \rangle = 0 \ ,$$

où R est un réel positif. En intégrant par parties, on obtient

$$\langle \operatorname{div} f, \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\phi \rangle = -\langle f, \begin{pmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{pmatrix}\phi\, \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\rangle - \langle f, \phi \begin{pmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{pmatrix}\left[\chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right]\rangle \ .$$

Puisque f appartient à L^1_{loc} et $\binom{\partial_1}{\partial_2}\phi$ est une fonction de $\mathcal{S}$, le premier terme du membre de droite de l'équation ci-dessus a une limite nulle si $R \to 0$. Après un changement de variables, le second terme s'écrit

$$\langle f, \phi(R\cdot)\begin{pmatrix}\partial_1 \\ \partial_2\end{pmatrix}\chi \rangle \ .$$

La limite de cette expression si $R \to 0$ est

$$\phi(0)\langle f, \begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix}\chi\rangle = \phi(0)\langle \frac{1}{r}\widetilde{f}_r, \frac{\partial}{\partial r}(\chi)\rangle = -\phi(0)\int_0^{2\pi} \widetilde{f}_r(\theta)\, d\theta \ ,$$

et on aboutit donc à la condition $\displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{f}_r(\theta)\, d\theta = 0$. Rassemblant les étapes du raisonnement ci-dessus, on a

$$\langle \operatorname{div} f, \phi\rangle = \lim_{R\to 0}\langle \operatorname{div} f, \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\phi\rangle = 0$$

si et seulement si les conditions énoncées dans la proposition sont vérifiées. ■

Rotationnel mesure finie

On voudrait que f soit de divergence nulle et que son rotationnel soit une mesure de Radon μ finie, c'est-à-dire telle que

$$\sup_{\phi\in\mathcal{C}_0^\infty, \|\phi\|_\infty\le 1}\int \phi\, d\mu < \infty \ .$$

Le rotationnel de f est donné en dehors de 0 par

$$\operatorname{rot} f = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial\theta} \ .$$

En particulier, $\operatorname{rot} f$ est une fonction homogène de degré -2. Une telle fonction ne peut être une mesure finie que si elle est nulle en dehors de 0. Il faut donc que $\widetilde{f}_r$ soit une constante.

Récapitulons : f est de divergence nulle et de rotationnel égal à une mesure finie si

- $\widetilde{f}_\theta$ est une constante,
- $\int \widetilde{f}_r(\theta)\, d\theta = 0$, et
- $\widetilde{f}_r$ est une constante.

Il faut donc que

$$f(r,\theta) = \frac{\alpha}{r}\mathbf{e}_\theta$$

pour un réel α, ce qui s'écrit aussi

$$f(x) = \frac{\alpha}{|x|^2}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix} \ .$$

Inversement, on vérifie qu'un tel champ de vecteurs a un rotationnel égal à une mesure finie.

Espaces de Besov

Proposition 4.4.3 *Si f est une fonction homogène de degré -1, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, elle appartient à tous les $\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}$ pour $p > 2$.*

Preuve : Soit $p > 2$. Les troncatures dyadiques en fréquence de f s'écrivent

$$\begin{aligned}\Delta_j f(x) &= \left[f * (2^{jd}\psi(2^j\cdot))\right](x)\\ &= 2^{jd}\int \widetilde{f}\left(\frac{y}{|y|}\right)\frac{1}{|y|}\psi(2^j x - 2^j y)\,dy\\ &= 2^j \int \frac{1}{|y|}\widetilde{f}\left(\frac{y}{|y|}\right)\psi(2^j x - y)\,dy\\ &= 2^j F(2^j x)\ ,\end{aligned}$$

où F est défini par $F = f * \psi$. Comme $f \in L^{2,\infty}$ et $\psi \in L^1 \cap L^\infty$, leur produit de convolution F appartient à L^p. On conclut alors facilement. ■

4.4.4 Résultats de type point fixe

Nous utilisons dans ce chapitre un théorème de point fixe et un lemme de propagation de régularité. Ils sont rappelés ici (on pourra se reporter à [14]) :

Théorème 4.4.2 (Existence et unicité) *Soit X un espace de Banach, L un opérateur linéaire sur X de norme $\lambda < 1$, et B un opérateur bilinéaire tel que :*

$$\|B(x,y)\|_X \leq \gamma \|x\|_X \|y\|_X$$

Alors pour tout $y \in X$ tel que

$$4\gamma\|y\|_X < (1-\lambda)^2$$

la suite définie par :

$$\begin{cases} X_0 = 0\\ X_{n+1} = y + LX_n + B(X_n, X_n)\end{cases}$$

converge dans X vers l'unique solution de

$$x = y + Lx + B(x,x)$$

telle que

$$2\gamma\|x\|_X < (1-\lambda)$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|x\|_X \leq C\|y\|_X$$

Lemme 4.4.1 (Propagation de régularité) *Soient x, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et γ comme dans le théorème précédent. On suppose de plus que y est dans un espace de Banach Y, que L est un opérateur linéaire sur Y de norme μ et que*

$$\begin{aligned}\|B(f,g)\|_Y &< \kappa\|f\|_X\|g\|_Y\\ \|B(g,f)\|_Y &< \kappa\|f\|_X\|g\|_Y.\end{aligned}$$

On suppose enfin que $\mu < 1$ et que $\kappa(1-\lambda) < (1-\mu)\gamma$. Alors X_n converge vers x dans Y et

$$\|x\|_Y \leq C\|y\|_Y$$

Bibliographie

[1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space*, Journal de mathématiques pures et appliquées **83**, 673-697 (2004)

[2] G. Bourdaud, *Remarques sur certains sous-espaces de $BMO(\mathbb{R}^n)$ et de $bmo(\mathbb{R}^n)$*, Annales de l'Institut Fourier **52**, 1187-1218 (2002)

[3] C. Calderón, *Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p*, Transactions of the American Mathematical Society **318**, 179-200 (1990)

[4] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduit et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris (1995)

[5] M. Cannone, F. Planchon, *On the non-stationnary Navier-Stokes equations with an external force*, Revista Matematica Iberoamericana **16**, No.1, 1-16 (2000)

[6] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, Oxford lecture series in mathematics and its applications **14**, Oxford science publications, Oxford (1998)

[7] J.-Y. Chemin, *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, Journal d'analyse mathématique **77**, 27-50 (1999)

[8] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, *Basics of mathematical geophysics*, à paraître

[9] G.-H. Cottet, *Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris série I Mathématiques **303**, 105-108 (1986)

[10] S. Dubois, *Equations de Navier-Stokes dans l'espace : Espaces critiques et solutions d'énergie finie*, Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne (2002)

[11] E. Fabes, B. Jones, N. Riviere, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **45**, 222-240 (1972)

[12] I. Gallagher, T. Gallay, *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes flow with a measure as initial vorticity*, Mathematische Annalen, à paraître

[13] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Non-explosion en temps grand et stabilité de solutions globales des équations de Navier-Stokes* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, Mathématiques, **334** 289-292 (2002)

[14] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations*, Annales de l'Institut Fourier **53**, 1387-1424 (2003)

[15] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, No.4, 307-337 (2002)

[16] T. Gallay, E. Wayne, *Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on* $\mathbb{R}^3$, Recent developments in the mathematical theory of water waves (Oberwolfach, 2001), The Royal Society of London. Philosophical transactions. Series A. Mathematics, Physics and Engineering Sciences **360**, no. 1799, 2155-2188 (2002)

[17] T. Gallay, E. Wayne, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity equations on* $\mathbb{R}^2$, Archive for Rational and Mechanical Analysis **163**, 209-258 (2002)

[18] P. Germain, *Multipliers, paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations*, en préparation

[19] Y. Giga, T. Miyakawa, H. Osada, *Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity*, Archives of Rational and Mechanical Analysis **104**, 223-250 (1988)

[20] Y. Giga, S. Matsui, O. Sawada, *Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity*, Journal of mathematical fluid mechanics **3**, 302-315 (2001)

[21] H. Koch, D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Advances in Mathematics **157**, 22-35 (2001)

[22] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall, (2003)

[23] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934)

[24] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Hermann, Paris (1990)

[25] H. Miura, *Remark on uniqueness of mild solutions to the Navier-Stokes equations*, Journal of functional analysis **218**, 110-129 (2005)

[26] F. Planchon, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Revista Matematica Iberoamericana **14**, 71-93 (1998)

[27] E. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University press (1993)

[28] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhaüser Verlag (1992)

[29] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on* $\mathbb{R}^N$, Journal of the London Mathematical Society **2**, 303-313 (1987)

Chapitre 5

Solutions globales d'énergie infinie de l'équation des ondes semilinéaire critique

Résumé
Nous considérons dans ce chapitre l'équation des ondes semilinéaire critique

$$(NLW)_{2^*-1} \quad \begin{cases} \Box u + |u|^{2^*-2}u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1 \ , \end{cases}$$

posée dans tout l'espace $\mathbb{R}^d$, avec $2^* = \frac{2d}{d-2}\cdot$ Shatah et Struwe [27] ont prouvé que si les données initiales sont d'énergie finie, c'est à dire si $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, alors il existe une solution globale. Planchon [19] a montré que c'est aussi le cas pour certaines données initiales d'énergie infinie : il suffit que les données initiales soient de norme petite dans $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$. Nous construisons dans ce chapitre des solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales d'énergie infinie arbitrairement grandes, en utilisant deux méthodes qui reviennent à interpoler entre solutions d'énergie finie et solutions d'énergie infinie : la méthode de Bourgain et la méthode de Calderón. Ces deux méthodes donnent des résultats complémentaires.

5.1 Introduction

5.1.1 Equations d'onde semilinéaires

Ce chapitre est consacré à des équations d'onde semilinéaires, du type

$$(NLW)_F \quad \begin{cases} \Box u = F(u) \\ u_{|t=0} = u_0 \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1 \ , \end{cases}$$

où u est une fonction à valeurs réelles de $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, où l'on note $\Box = \partial_t^2 - \Delta$, et où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le comportement de $(NLW)_F$ est régi par l'allure de F près de 0 et de l'infini ; en fait, il est pertinent de prendre $F(u) = -|u|^{p-1}u$. Pourquoi un tel choix ? Tout d'abord, prendre une non-linéarité de type polynômial s'avère adapté à l'étude de $(NLW)_F$: en faisant varier p, on peut observer les différents "régimes" de

l'équation, qui devient de plus en plus instable à mesure que p s'accroît. D'autre part, une telle non-linéarité confère, comme nous le verrons, à l'équation une invariance par changement d'échelle. Enfin, le signe de F permet, nous le verrons aussi, de définir une énergie conservée par l'équation, et qui est une quantité définie positive. Heuristiquement au moins, cette propriété est de nature à prévenir l'apparition de singularités locales, et donc l'explosion en temps fini des solutions ; on parle d'équation défocalisante. Des non-linéarités plus générales sont considérées dans les monographies [27] [28] [29], mais dans la suite, nous nous restreindrons à des systèmes du type

$$(NLW)_p \quad \begin{cases} \Box u + |u|^{p-1}u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1 \ , \end{cases}$$

où u est une fonction à valeurs réelles de $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et où p est un nombre réel plus grand que 1. Notons que la résolution de ce problème de Cauchy revient (au moins formellement) à la recherche d'un point critique de la fonctionnelle d'action

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} \left(-\frac{1}{2}|\partial_t u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1} \right) dx\, dt$$

sous la contrainte $u_{|t=0} = u_0$ et $\partial_t u_{|t=0} = u_1$.

5.1.2 Solutions d'énergie finie et solutions d'énergie infinie de $(NLW)_{2^*-1}$

Un élément fondamental dans l'étude de $(NLW)_p$ est l'énergie. Si u est une fonction réelle de $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, son énergie d'indice p au temps t est donnée par

$$E(u,t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{p+1}\|u(t,\cdot)\|_{p+1}^{p+1} \ ,$$

où l'on note $\|\cdot\|_p$ pour la norme de Lebesgue d'indice p en espace. L'énergie d'indice p est une quantité conservée par le flot de $(NLW)_p$ pour des solutions régulières (solutions fortes) ; dans le cas de solutions faibles, on sait que cette quantité est une fonction décroissante de t, mais on ignore si elle est constante ou non.
Une donnée initiale est dite d'énergie finie si $E(u_0,0) < \infty$; une solution u est d'énergie finie si $E(u,t) < \infty$ pour tout temps.

Avant d'y revenir de manière plus détaillée dans la partie 5.2, disons quelques mots de la théorie des solutions de $(NLW)_p$.
Si l'on note $2^* = \dfrac{2d}{d-2}$ l'exposant associé à l'injection de Sobolev $\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{2^*}$, l'étude de $(NLW)_p$ fait apparaître la valeur critique 2^*-1 pour p. En effet, si l'on considère des données initiales (u_0,u_1) d'énergie finie, c'est à dire appartenant à $(\dot{H}^1 \cap L^{p+1}) \times L^2$, l'existence de solutions fortes globales (d'énergie finie) de $(NLW)_p$ n'est connue que pour $p \leq 2^*-1$. Ce résultat est beaucoup plus difficile si $p = 2^*-1$, il a été établi par Shatah et Struwe [27]. Si $p > 2^*-1$, on ignore s'il existe dans le cas général des solutions fortes globales d'énergie finie de $(NLW)_p$.

Nous allons nous concentrer dans le reste de cette partie introductive sur $(NLW)_{2^*-1}$, puisque c'est sur cette équation que nous apportons des résultats nouveaux.
Le résultat de Shatah et Struwe déjà cité [27] donne l'existence d'une solution globale de $(NLW)_{2^*-1}$ pour (u_0,u_1) d'énergie finie, c'est à dire tels que

$$(u_0,u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2 \ . \tag{5.1.1}$$

L'existence de solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$ est aussi connue pour certaines données initiales d'énergie infinie. D'après le résultat de Planchon [19], sur lequel nous reviendrons, il suffit en effet que

$$\|u_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|u_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq \epsilon \ , \tag{5.1.2}$$

pour un certain $\epsilon > 0$; on se reportera au chapitre 6 pour une définition des espaces de Besov.

5.1.3 Interpolation entre solutions d'énergie finie et solutions d'énergie infinie

Comme nous venons de le voir, il existe des solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$ à condition que (5.1.1) ou (5.1.2) soit vérifié.
Notre but dans cet article est d'améliorer ces résultats en prouvant qu'une solution globale existe pour des données initiales d'énergie infinie et de norme grande.
Pour parvenir à ce résultat, nous nous proposons d'interpoler entre les deux types de solutions globales qui viennent d'être évoquées : celles correspondant à des données initiales grandes et d'énergie finie (cas (5.1.1)) et celles correspondant à des données initiales petites et d'énergie infinie (cas (5.1.2)).
Pour réaliser ce programme, deux stratégies sont envisageables. Leur point de départ est identique : on écrit les données initiales (u_0, u_1) sous la forme

$$(u_0, u_1) = (v_0, v_1) + (w_0, w_1) \ ,$$

avec $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ et $\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} < \epsilon$, où ϵ est une petite constante. On peut alors procéder de deux façons.

- La méthode de Bourgain a été utilisée par cet auteur dans l'étude de l'équation de Schrödinger [4] non linéaire, puis appliquée, voir ci-dessous les théorèmes 5.2.7 et 5.2.11, par Kenig, Ponce et Vega à l'étude de l'équation des ondes. Elle consiste dans le cas qui nous intéresse à considérer d'abord v solution de $(NLW)_{2^*-1}$ pour les données initiales (v_0, v_1), puis à résoudre l'équation perturbée

$$\begin{cases} \Box w + (v+w)|v+w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2} = 0 \\ w_{|t=0} = w_0 \\ \partial_t w_{|t=0} = w_1 \ . \end{cases} \tag{5.1.3}$$

  Pour montrer que le problème de Cauchy ci-dessus admet une solution globale w, nous aurons recours de manière répétitive à une construction de type point fixe.
  Cette méthode aboutit au théorème A, énoncé et prouvé dans la partie 5.3.
- La méthode de Calderón est en quelque sorte duale de la précédente. Elle a été introduite par Calderón pour étudier l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle [5] ; elle a ensuite été utilisée par Gallagher et Planchon pour obtenir des solutions globales de l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle [6] ainsi que de l'équation des ondes cubique en dimension trois [7]. Dans le cas présent, cette méthode consiste à construire d'abord une solution globale w de $(NLW)_{2^*-1}$, puis à montrer qu'il existe une solution, locale dans un premier temps, puis globale de

$$\begin{cases} \Box v + (v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2} = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \\ \partial_t v_{|t=0} = v_1 \ . \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Pour prouver qu'il existe une solution globale v du problème de Cauchy ci-dessus, le point-clé est l'utilisation de méthodes d'énergie.

Cette manière de procéder aboutit au théorème B, énoncé et prouvé dans la partie 5.4.

Comme nous le constaterons, les résultats prouvés par les méthodes de Bourgain et de Calderón, c'est à dire les théorèmes A et B, sont complémentaires.

5.1.4 Plan du chapitre

Dans la partie 5.2, nous nous efforçons de résumer les résultats principaux ayant trait à l'existence, l'unicité et au comportement asymptotique des solutions de $(NLW)_p$. Nous en profitons pour rappeler les résultats classiques que nous utiliserons par la suite.

Dans les parties 5.3 et 5.4, nous démontrons l'existence de solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales grandes et d'énergie infinie.

Nous utilisons dans la partie 5.3 la méthode de Bourgain, et aboutissons au théorème A.

Dans la partie 5.4, nous développons le point de vue de la méthode de Calderón, et ceci nous permet de montrer le théorème B.

5.2 Principaux résultats connus sur $(NLW)_p$

5.2.1 Solutions faibles

Existence

Commençons par rappeler la définition de l'énergie de u : on pose

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{p+1}\|u(t,\cdot)\|_{p+1}^{p+1} \ . \tag{5.2.1}$$

En multipliant $(NLW)_p$ par $\partial_t u$ puis en intégrant en espace, on obtient facilement qu'une solution $\mathcal{C}^\infty$ de $(NLW)_p$ décroissant rapidement pour $|x| \to \infty$ vérifie

$$E(u,t) = E(u,0) \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Cette propriété de conservation de l'énergie permet d'utiliser un argument de compacité (notons que ce ne serait pas le cas si on choisissait une non-linéarité de signe opposé, c'est à dire $-|u|^{p-1}u$ au lieu de $|u|^{p-1}u$) et de prouver le théorème suivant.

Théorème 5.2.1 (Segal [24], voir aussi Shatah et Struwe [27]) *Soit $p > 1$. Pour des données initiales $(u_0, u_1) \in (\dot{H}^1 \cap L^{p+1}) \times L^2$, $(NLW)_p$ admet une solution u au sens des distributions telle que $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \dot{H}^1 \cap L^{p+1})$, $\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$ et*

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad E(u,t) \leq \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1} \ .$$

Unicité

Ces solutions sont-elles uniques ? La réponse à cette question repose sur des méthodes d'unicité fort-faible, donc sur la théorie des solutions fortes, qui va être développée dans

la suite. Mais nous donnons sans attendre jusque là quelques résultats connus en matière d'unicité des solutions faibles.

Il est usuel dans l'étude de $(NLW)_p$, de distinguer les cas sous-critique, critique et sur-critique, suivant que p est inférieur, égal ou supérieur à

$$2^* - 1 = \frac{d+2}{d-2} \cdot$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette valeur de p joue un rôle particulier du fait de l'injection de Sobolev

$$\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{2^*} \qquad \text{avec} \qquad 2^* = \frac{2d}{d-2} \cdot$$

Supposons par exemple p plus petit que 2^* ; si l'on passe aux espaces de Sobolev inhomogènes, on a l'injection de Sobolev

$$H^1 \hookrightarrow L^p \ ,$$

qui est même compacte sur un domaine borné si $p < 2^*$. Ainsi, dans l'énergie E définie en (5.2.1), le terme en $|\nabla u|^2$ contrôle localement le terme en $|u|^p$. Cette propriété joue un rôle très important.

Mais revenons aux solutions faibles ; que peut-on dire de leur unicité ?

- Pour $p < 2^* - 1$, elle a été prouvée par Ginibre et Velo [9].
- Dans le cas critique, l'unicité pour $d = 4, 5, 6$ dans la classe $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1)$ est due à Planchon [20]. Toujours dans le cas critique, et pour $d = 3$, Struwe [32] a montré qu'une solution faible est unique si elle est issue de données initiales $(u_0, u_1) \in \dot{H}^2 \times \dot{H}^1$.
- On ne sait pas si les solutions faibles sont uniques dans le cas sur-critique $p > 2^* - 1$.

5.2.2 Inégalité de Strichartz

Les estimations de Strichartz, découvertes dans les années 1970, jouent aujourd'hui un rôle capital dans l'étude des équations dispersives.
Elles apparaissent dans les preuves de la plupart des résultats énoncés dans les sections qui suivent ; nous les utiliserons à notre tour pour prouver les théorèmes A et B.

Les estimations de Strichartz consistent en des estimations sur la solution U d'une équation des ondes linéaire non-homogène :

$$\begin{cases} \Box U = F \\ U_{|t=0} = U_0 \\ \partial_t U_{|t=0} = U_1 \ . \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Si l'on note

$$W(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin(t|D|)}{|D|} \tag{5.2.3}$$

(c'est à dire de manière plus explicite $\mathcal{F}(W(t)f)(\xi) = \dfrac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi)$, où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier), la formule de Duhamel permet de réécrire sous forme intégrale l'équation ci-dessus :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad U(t) = \dot{W}(t)U_0 + W(t)U_1 + \int_0^t W(t-s)F(s)\,ds \ . \tag{5.2.4}$$

Strichartz [30] a le premier remarqué que si l'on prend U_1 dans L^2, $W(t)U_1$ appartient à un espace de Lebesgue relativement à la variable (t,x) de temps-espace. A partir de cette observation, toute une série d'estimations ont pu être prouvées. Nous les regroupons dans le théorème qui suit où nous utilisons la notation L^qL^r pour $L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^d))$, c'est à dire

$$\|u(t,x)\|_{L^qL^r}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)|^r\,dx\right)^{q/r}\,dt\right)^{1/q}\ .$$

Théorème 5.2.2 (Ginibre et Velo [8], Keel et Tao [13]) *Supposons $d\geq 3$, et donnons-nous $j\in\mathbb{Z}$.*
Si $U_0(x)$ et $U_1(x)$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dont les transformées de Fourier sont supportées dans la couronne $\{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j+2}\}$, alors la solution U de

$$\left\{\begin{array}{l}\Box U=0\\ U_{|t=0}=U_0\\ \partial_tU_{|t=0}=U_1\end{array}\right. \tag{5.2.5}$$

vérifie

$$\|U\|_{L^qL^r}+2^{-j}\|\partial_tU\|_{L^qL^r}\leq C2^{j\left(-\frac{1}{q}-\frac{d}{r}+\frac{d}{2}\right)}\left(\|U_0\|_2+2^{-j}\|U_1\|_2\right)\ ,$$

si

$$q\geq 2\ \ ,\ \ (q,r,d)\neq(2,\infty,3)\ \ \textit{et}\ \ \frac{1}{q}+\frac{d-1}{2r}\leq\frac{d-1}{4}\ . \tag{5.2.6}$$

Si d'autre part $F(t,x)$ est une fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ dont le support de la transformée de Fourier (en x) est inclus dans $\{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j+2}\}$, et si U est la solution de

$$\left\{\begin{array}{l}\Box U=F\\ U_{|t=0}=0\\ \partial_tU_{|t=0}=0\ ,\end{array}\right.$$

alors on a

$$\|U\|_{L^qL^r}+2^{-j}\|\partial_tU\|_{L^qL^r}\leq C2^{j\left(-\frac{d}{r}-\frac{d}{\widetilde{r}}-\frac{1}{q}-\frac{1}{\widetilde{q}}+d-1\right)}\|F\|_{L^{\widetilde{q}'}L^{\widetilde{r}'}}$$

dès que les couples (q,r) et $(\widetilde{q},\widetilde{r})$ vérifient (5.2.6), en notant $(\widetilde{q}',\widetilde{r}')$ pour les exposants conjugués de $(\widetilde{q},\widetilde{r})$.

Du fait des hypothèses faites sur les supports des transformées de Fourier de F, U_0 et U_1, le théorème ci-dessus n'est pas utilisable tel quel dans les applications, mais il est très facile d'en tirer des estimations pour des normes d'espaces fonctionnels usuels (par exemple à l'aide de la théorie de Littlewood-Paley). Nous en déduirons ainsi dans la suite une estimation de u pour des normes de Besov ; nous nous bornons ici à donner un exemple plus simple.

Corollaire 5.2.1 *Soit U la solution de (5.2.5) ; on ne fait plus d'hypothèse de type localisation en fréquence. On dispose alors de l'estimation suivante*

$$\|U\|_{L^qL^r}\leq C\left(\|U_0\|_{\dot{H}^\gamma}+\|U_1\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}\right)\ ,$$

si q et r vérifient (5.2.6) et si

$$\gamma=\frac{d}{2}-\frac{d}{r}-\frac{1}{q}\ .$$

5.2.3 Solutions fortes d'énergie finie

Nous avons défini en (5.2.1) l'énergie d'une solution de $(NLW)_p$. Comme nous l'avons dit, c'est une quantité conservée par l'équation au cours du temps, aussi est-il naturel de tirer parti de cette estimation a priori pour obtenir des résultats d'existence globale de solutions fortes.

Le cas sous-critique $p < 2^* - 1$

C'est Jörgens [11] qui, en 1961, initia l'étude de $(NLW)_p$, en prouvant, dans le cas $d = 3$, $p < 3$, et pour des données initiales de classe $\mathcal{C}^3$, l'existence d'une solution globale de $(NLW)_p$. Jörgens n'utilise pas d'estimations de Strichartz (elles étaient inconnues alors), mais tire parti de la forme particulière de la solution fondamentale de l'équation des ondes en dimension 3. Ce dernier outil permet en fait de montrer aussi l'existence globale de solutions pour des données initiales régulières, $p < 5 = 2^* - 1$, et toujours $d = 3$, voir Shatah et Struwe [27], section 6.3.

Grâce aux estimations de Strichartz, Ginibre et Velo [9] ont pu traiter le cas de données initiales d'énergie finie quelconque.

Théorème 5.2.3 (Ginibre et Velo [9]) *Soit $d \geq 3$, $p < 2^* - 1$, et considérons des données initiales $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Alors il existe une solution u de $(NLW)_p$, telle que*

$$(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1 \times L^2) \ .$$

Cette solution est unique dans l'ensemble des solutions telles que $(u, \partial_t u) \in L^\infty(\mathbb{R}, \dot{H}^1 \times L^2)$.

Le cas critique $p = 2^* - 1$

En utilisant des techniques similaires à celles de Jörgens, Rauch a pu établir un résultat d'existence globale pour $(NLW)_{2^*-1}$, mais avec la restriction toutefois que $d = 3$, et que l'énergie des données initiales soit petite.
Le cas $p = 2^* - 1$ est particulièrement délicat puisque contrairement au cas sous-critique l'énergie pourrait a priori se concentrer en un point de l'espace-temps, et rendre impossible la prolongation d'une solution. L'hypothèse d'énergie petite de Rauch exploite le fait que la concentration d'une quantité assez petite d'énergie ne pose en fait pas de problème.
Cependant, si l'énergie des données initiales est grande, un nouvel argument est nécessaire pour assurer qu'il n'y a pas concentration d'énergie. Cet argument est fourni par des estimations de Morawetz ; c'est Struwe [31] qui les emploie pour la première fois dans ce contexte, afin de prouver l'existence globale de solutions de $(NLW)_{2^*-1}$, dans le cas radial et pour $d = 3$.
Grillakis [10] a été le premier à prouver l'existence de solutions de l'équation critique $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales d'énergie quelconque. Sa preuve a été simplifiée et généralisée par Shatah et Struwe [25] [26] [27]. Nous aboutissons finalement au théorème suivant.

Théorème 5.2.4 ([27]) *Soit $d \geq 3$, considérons des données initiales $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Alors le problème de Cauchy $(NLW)_{2^*-1}$ admet une unique solution u telle que*

$$(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1 \times L^2) \cap L^\mu_{\rm loc}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1/2}_{\mu,2} \times \dot{B}^{-1/2}_{\mu,2}) \ ,$$

où $\mu = \frac{2(d+1)}{d-1}$.

Le théorème précédent repose sur le fait que l'énergie ne se concentre pas en un point, c'est à dire que si $T \in \mathbb{R}^+$,

$$\sup_{y\,,0<t<T} \int_{B(y,r)} \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\partial_t u(x,t)|^2 + \frac{1}{p}|u(x,t)|^p \right) dx\,dt \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On peut être plus précis : le degré de concentration de l'énergie pour $(NLW)_{2^*-1}$ est mesuré par les normes de Strichartz (c'est à dire des normes espace-temps issues des estimations de Strichartz que nous avons vues plus haut). Que ces normes de Strichartz soient elles-même contrôlées par l'énergie initiale a été prouvé tout d'abord par Bahouri et Gérard [1], sans majoration explicite, puis par Nakanishi [17], qui donne une formule explicite.

Théorème 5.2.5 (Nakanishi [17]) *Considérons des données initiales $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, et notons*

$$E = \|u_0\|_{\dot{H}^1} + \|u_1\|_{L^2} \ .$$

Soit u la solution de $(NLW)_{2^*-1}$ fournie par le théorème 5.2.4. Il existe alors des constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que

$$\|u\|_{L^{q_0}(\mathbb{R},\dot{B}^{s_0}_{r_0,2})} \leq C \exp E^\kappa \ ,$$

en posant

$$q_0 = \frac{2(d^2+2)}{(d+1)(d-2)} \qquad r_0 = 2^* \qquad s_0 = \frac{1}{q_0} \ .$$

Le cas sur-critique $p > 2^* - 1$

Dans le cas sur-critique $p > 2^* - 1$, on connaît, pour des données initiales d'énergie finie, l'existence d'une solution forte locale en temps, voir Shatah et Struwe [27], section 6.3, mais on ne sait pas si elle se prolonge en une solution globale ou non.

5.2.4 Solutions fortes d'énergie infinie

Le moment est venu de nous intéresser à l'homogénéité de $(NLW)_p$. On vérifie facilement que, si u est solution de $(NLW)_p$ avec les données initiales (u_0, u_1), alors, si λ est un réel strictement positif,

$$\lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda t) \tag{5.2.7}$$

est solution de $(NLW)_p$ avec les données initiales

$$(\lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x), \lambda^{\frac{2}{p-1}+1} u_1(\lambda x)) \ . \tag{5.2.8}$$

L'espace de Sobolev invariant par cette transformation (pour les données initiales) est $\dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}} \times \dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}-1}$:

$$\|(\lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda\cdot), \lambda^{\frac{2}{p-1}+1} u_1(\lambda\cdot))\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}} \times \dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}-1}} = \|(u_0, u_1)\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}} \times \dot{H}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}-1}} \ .$$

C'est un phénomène courant dans l'étude des équations aux dérivées partielles que le scaling d'une équation détermine les espaces de données initiales pour lesquels une solution

locale existe. Si ce principe s'applique à $(NLW)_p$, une solution locale devrait exister si (u_0, u_1) appartient à $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ avec

$$s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} \cdot$$

Nous allons voir que cette condition s'applique pour certaines valeurs de p seulement ; d'autres effets que le scaling doivent être pris en compte dans le cas général.

L'outil principal pour montrer des résultats d'existence locale est fourni par des estimations de type Strichartz.
Deux exposants critiques apparaissent lors de l'étude de ce problème.

$$p_0 \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 3 & \text{si } d = 2 \\ \dfrac{(d+1)^2}{(d-1)^2+4} & \text{si } d > 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad p_* \overset{\text{déf}}{=} \frac{d+3}{d-1} \cdot$$

Lindblad et Sogge [16] ont obtenu des résulats définitifs, que nous énonçons ci-après, pour $p \geq p_0$. Le cas $p < p_0$ n'est pas totalement résolu, voir notamment [33].

Théorème 5.2.6 (Lindblad et Sogge [16]) *Soit $d \geq 2$, et $p \geq p_0$. Supposons que les données initiales (u_0, u_1) appartiennent à $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$. Alors*

1. *Si*

$$s \geq s(p) \overset{déf}{=} \begin{cases} \dfrac{d+1}{4} - \dfrac{1}{p-1} & si\ p_0 \leq p \leq p_* \\ \dfrac{d}{2} - \dfrac{2}{p-1} & si\ p \geq p_* \end{cases},$$

il existe un $T > 0$ et une unique solution u de $(NLW)_p$ telle que

$$(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}) \text{ et } u \in L^r([0,T], L^q) ,$$

où $q = \frac{(p-1)(d+1)}{2}$ et $r = q$ si $p \geq p_*$, alors que $r = \frac{4q}{(d-1)(q-2)}$ si $p_0 < p \leq p_*$.

2. *Si $s < s(p)$, $(NLW)_p$ n'admet pas en général de solution locale (c'est à dire définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, avec $T > 0$) pour des données initiales (u_0, u_1) dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$*
3. *Si $s = s(p)$, $p \geq p^*$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si*

$$\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s-1}} < \epsilon ,$$

on peut prendre $T = \infty$ dans 1.

5.2.5 Interpolation entre solutions d'énergie finie et infinie

Nous venons de voir que, si $p_0 < p < 2^* - 1$, des solutions fortes globales d'énergie finie de $(NLW)_p$ existent à condition que (u_0, u_1) appartienne à $\dot{H}^1 \times L^2$, alors que des solutions fortes globales d'énergie infinie existent à condition que (u_0, u_1) soit de norme assez petite dans $\dot{H}^{s(p)} \times \dot{H}^{s(p)-1}$.
Pour étendre ces résultats d'existence globale Kenig, Ponce et Vega [14], puis Gallagher et Planchon [7] ont employé des techniques d'interpolation non-linéaire entre les deux types de solutions qui viennent d'être mentionnés. Ces techniques ont été exposées dans la section 5.1.3, dans le cadre de $(NLW)_{2^*-1}$, et dans le chapitre 1 de manière plus générale : la méthode de Bourgain a permis à Kenig, Ponce et Vega de montrer le théorème qui suit ; Gallagher et Planchon ont pu prouver le même résultat, pour $p = 3$, à l'aide de la méthode de Calderón.

Théorème 5.2.7 (Kenig, Ponce et Vega [14]) *Supposons $d = 3$. Le système $(NLW)_p$ admet une solution globale si $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, avec*

$$s \geq \widetilde{s}(p) \overset{déf}{=} \frac{5p-9}{4p-4} \qquad si\ 2 \leq p \leq 3$$

et

$$s \geq \widetilde{s}(p) \overset{déf}{=} \frac{26p-3p^2-39}{16p-2p^2-14} \qquad si\ 3 \leq p \leq 5.$$

5.2.6 Solutions auto-similaires

Nous avons vu dans la section 5.2.4 que la transformation (5.2.7) laisse invariante les solutions de $(NLW)_p$ à condition que les données initiales subissent la transformation (5.2.8). Que se passe-t-il si les données initiales sont invariantes par la transformation (5.2.8) ? Fixons pour plus de simplicité $u_1 = 0$; on est alors amené à examiner le cas où

$$u_0(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x)\ . \tag{5.2.9}$$

La théorie que nous avons décrite jusqu'ici ne nous permet pas de traiter ce cas, puisque si u_0 vérifie la relation (5.2.9), il n'appartient à aucun espace de Sobolev, à moins d'être nul.
Par contre, si u_0 est quelque peu régulier en dehors de 0 et satisfait (5.2.9), il appartient à l'espace de Besov $\dot{B}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}}_{2,\infty}$ (voir le chapitre 6 pour une définition des espaces de Besov). L'exemple le plus évident d'une telle fonction est

$$u_0(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{2}{p-1}}}\ .$$

L'existence de solutions de $(NLW)_p$ avec des données initiales dans des espaces de Besov de troisième indice infini a été étudiée par Planchon [19].

Théorème 5.2.8 (Planchon [20]) *Soit $p > p_*$, et considérons des données initiales*

$$(u_0, u_1) \in \dot{B}^s_{2,\infty} \times \dot{B}^{s-1}_{2,\infty}$$

avec

$$s = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}\ .$$

Alors

- *Si les données initiales (u_0, u_1) sont dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans $\dot{B}^s_{2,\infty} \times \dot{B}^{s-1}_{2,\infty}$, il existe $T > 0$ et une solution u de $(NLW)_p$ sur $[0, T]$ telle que*

$$(u, \partial_t u) \in L^\infty([0,T], \dot{B}^s_{2,\infty} \times \dot{B}^{s-1}_{2,\infty})\ .$$

- *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si l'on suppose*

$$\|u_0\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}} + \|u_1\|_{\dot{B}^{s-1}_{2,\infty}} \leq \epsilon\ ,$$

il existe une solution u de $(NLW)_p$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(u, \partial_t u) \in L^\infty(\mathbb{R}, \dot{B}^s_{2,\infty} \times \dot{B}^{s-1}_{2,\infty})\ .$$

Ce théorème s'applique en particulier à des données initiales autosimilaires régulières en dehors de 0, mais permet de traiter des situations bien plus générales.
Les solutions auto-similaires ont aussi été étudiées par Ribaud et Youssfi [22] [23], ainsi que par Pecher [18].

5.2.7 Récapitulation

Le tableau ci-dessous reprend la plupart des résultats énoncés ci-dessus. Il recense les résultats d'existence (locale ou globale) et d'unicité des solutions. Il se rapporte au système $(NLW)_p$ avec des données initiales (u_0, u_1) appartenant à $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$.

Valeur de p	$p_0 < p < p_*$	$p_* \leq p < 2^* - 1$	$p = 2^* - 1$	$p > 2^* - 1$
Existence d'une solution faible $(s \geq 1)$	oui	oui	oui	oui
Unicité de la solution faible	oui	oui	oui si $s \geq 2$	?
Solution forte locale	oui ssi $s \geq \frac{d+1}{4} - \frac{1}{p-1}$	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$
Solution forte globale à données petites	?	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$	oui ssi $s \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$
Solution forte globale à données grandes	(d=3) oui si $s \geq \frac{5p-9}{4p-4}$	(d=3) oui si $s \geq \frac{26p-3p^2-39}{16p-2p^2-14}$	oui si $s = 1$	?

Figure 5.1: Un résumé des résultats énoncés ci-dessus

5.2.8 Scattering et comportement asymptotique

Nous avons vu jusqu'ici quatre types de solutions globales de $(NLW)_p$: les solutions d'énergie finie en section 5.2.3, les solutions d'énergie infinie en section 5.2.4, les solutions "interpolées" en section 5.2.5, et enfin les solutions "auto-similaires" en section 5.2.6.

La présente section est consacrée au comportement asymptotique de ces solutions globales. Nous allons voir que des phénomènes très différents peuvent se produire.

Scattering

On parle de scattering (ou de diffusion) pour une solution de $(NLW)_p$ si elle se comporte à l'infini (en temps) comme une solution de l'équation des ondes linéaires. Le scattering est dû au caractère dispersif de l'équation des ondes, on peut l'expliquer heuristiquement de la manière suivante : en temps très grand ($|t| \to \infty$), la masse d'une solution u de $(NLW)_p$ tend à se disperser dans l'espace tout entier, les interactions non-linéaires deviennent alors négligeables, si bien que u ressemble à une solution de l'équation des ondes linéaire.

Venons-en à une formulation plus mathématique : on considère dans la suite une solution globale u de $(NLW)_p$ avec des données initiales (u_0, u_1) dans un espace de Banach X.

On dit qu'il y a scattering s'il existe des opérateurs bijectifs $W_+ : X \to X$ et $W_- : X \to X$ tels que

$$\begin{array}{l} \|u(t) - W(t)W_+(u_0,u_1)\|_X \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \|u(t) - W(t)W_-(u_0,u_1)\|_X \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \ , \end{array} \tag{5.2.10}$$

où W est défini en (5.2.3). On peut alors définir l'opérateur de scattering

$$S = W_+ W_-^{-1} \ .$$

Cet opérateur mesure en quelque sorte la force de l'interaction non linéaire (en l'absence de non-linéarité, il est égal à l'identité).

Quand y a-t-il scattering ? Commençons par le cas des solutions d'énergie finie.

Théorème 5.2.9 *Si $p \leq 2^* - 1$, il y a scattering pour les solutions d'énergie finie de $(NLW)_p$: les opérateurs W_+ et W_- sont bien définis et bijectifs de $\dot{H}^1 \times L^2$ dans $\dot{H}^1 \times L^2$. L'opérateur S est lui aussi bien défini de $\dot{H}^1 \times L^2$ dans $\dot{H}^1 \times L^2$.*

Le fait qu'il y ait scattering dans le cas critique $p = 2^* - 1$ découle de l'article de Bahouri et Shatah [2], voir aussi Bahouri et Gérard [1].
Nous avons laissé de côté le cas sur-critique dans le théorème ci-dessus. On ne sait en effet pas si des solutions globales existent à données grandes.
Cependant, il y a alors scattering pour des données petites, si l'on se place dans le cadre des solutions d'énergie infinie.

Théorème 5.2.10 (Lindblad et Sogge [16]) *Supposons $p \geq p^*$, et soit*

$$s = s(p) = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$$

Il y a scattering à données petites dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ pour $(NLW)_p$: les opérateurs W_+, W_- sont bien définis et bijectifs d'un voisinage de 0 dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ dans un voisinage de 0 dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$.
De même, l'opérateur S est bien défini d'un voisinage de 0 dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ dans un voisinage de 0 dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$.

Explosion en temps grand

Intéressons-nous maintenant aux solutions "interpolées" données par le théorème 5.2.7.

Théorème 5.2.11 (Kenig, Ponce et Vega [14]) *On suppose $d = 3$, $p \in [2,5[$ et on prend $s = \widetilde{s}(p)$ tel que défini dans le théorème 5.2.7. Alors, si les données initiales (u_0, u_1) sont prises dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, il existe par le théorème 5.2.7 une solution globale u. Cette solution s'écrit*

$$u(t) = \dot{W}(t)u_0 + W(t)u_1 + z(t) \ ,$$

avec

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{\dot{H}^1} \leq C T^{\frac{1-s}{1-s-\beta}}$$

et

$$\beta = \begin{cases} p(1-s) - 1 + \frac{(1-s)(p-1)^2}{5-p} & si\ 2 \leq p \leq 3 \\ \frac{p-3}{2} + p(1-s) + \frac{2(1-s)(p-1)}{5-p} & si\ 3 \leq p < 5 \ . \end{cases}$$

En d'autres termes, u s'écrit comme la somme d'une partie linéaire d'énergie infinie, $\dot{W}(t)u_0 + W(t)u_1$, et d'une partie non-linéaire, $z(t)$, d'énergie finie pour tout temps, mais explosant - éventuellement - si $t \to \infty$.
Notons cependant qu'en l'absence (à notre connaissance) d'une preuve du contraire, nous ne pouvons exclure qu'il y ait scattering pour $(NLW)_p$ pour des données initiales grandes dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, où $s = \widetilde{s}(p)$ est défini dans le théorème 5.2.7.

Profil non-linéaire

L'étude du comportement asymptotique de solutions de $(NLW)_p$ dans le cas des données initiales auto-similaires est très intéressante.

Soient u_0 et u_1 des fonctions auto-similaires au scaling de $(NLW)_p$, c'est à dire telles que

$$u_0(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x) \quad \text{et} \quad u_1(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}+1} u_1(\lambda x) \quad \forall \lambda > 0 \ ;$$

si l'on suppose de plus que (u_0, u_1) est petit en norme dans $\dot{B}^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}}_{2,\infty} \times \dot{B}^{\frac{d}{2}-\frac{d}{p-1}-1}_{2,\infty}$, on obtient par le théorème 5.2.8 une solution globale u de $(NLW)_p$. Du fait de l'homogénéité de $(NLW)_p$ (voir section 5.2.4), on a

$$u(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda t) \qquad \forall \lambda > 0 \ .$$

Ceci implique l'existence d'un profil ψ tel que

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{2}{p-1}}} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \ .$$

Cette dernière formule exprime le comportement asymptotique de u. Le profil ψ est non-linéaire : il satisfait une équation aux dérivées partielles non-linéaire, voir Kavian et Weissler [12].
En particulier, il est exclu qu'on ait alors scattering.

5.3 Solutions globales de l'équation critique pour des données initiales d'énergie infinie : méthode de Bourgain

Nous utilisons dans cette partie la méthode de Bourgain afin de prouver un résultat d'existence globale de solutions de $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales grandes et d'énergie infinie.

5.3.1 Enoncé du théorème

Nous allons montrer que $(NLW)_{2^*-1}$ admet une solution globale à condition que les données initiales (u_0, u_1) soient choisies dans un voisinage de $\dot{H}^1 \times L^2$ dans $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$. Plus précisément, nous allons montrer le

Théorème A *Soit $d = 3, 4$ ou 6. Il existe des constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que, si des données initiales (u_0, u_1) peuvent s'écrire*

$$(u_0, u_1) = (v_0 + w_0, v_1 + w_1) \ .$$

avec

$$E = \|v_0\|_{\dot{H}^1} + \|v_1\|_{L^2} < \infty \ .$$

et

$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C \exp(-\exp(E^\kappa)) \ ,$$

alors $(NLW)_{2^*-1}$ *admet une solution globale (définie pour* $t \in \mathbb{R}$*).*

De plus, si l'on note

$$\mu = \frac{2(d+1)}{d-1} \quad , \quad \nu = \frac{2(d+1)}{d+3} \quad , \quad \alpha = \frac{\mu}{\nu(2^*-1)} \quad et \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\mu} + \frac{1-\alpha}{2} \ , \qquad (5.3.1)$$

alors

$$w \in X \stackrel{déf}{=} \widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})$$

(voir le chapitre 6 pour une définition des espaces $\widetilde{L}^q(\mathbb{R}, \dot{B}^s_{r,k})$*). Enfin, u est unique dans l'ensemble*

$$\mathcal{E} \stackrel{déf}{=} \{u \, , \, d_X(u, \mathcal{S}) < \epsilon_1\} \qquad (5.3.2)$$

où $\epsilon_1 > 0$ *est une constante universelle et*

$$d_X(u, \mathcal{S}) = \inf\{\|f - u\|_X \, , \, f \in \mathcal{S}\} \ .$$

Remarque 5.3.1 *Nous nous restreignons à* $d = 3, 4$ *ou* 6 *car ceci correspond à* 2^* *entier. Pour des valeurs non entières de* 2^* *(en particulier* $d = 5$*), nous n'avons pas été en mesure de prouver le lemme de produit 5.3.4, qui est crucial dans la preuve du théorème. Il nous semble cependant que le théorème doit être valable pour* $d \geq 3$*, c'est à dire que la restriction* $d = 3, 4$ *ou* 6 *est uniquement due à un obstacle technique dans la preuve.*

Le corollaire suivant donne un espace $\mathcal{F}$ tel que : si les données initiales de $(NLW)_{2^*-1}$ appartiennent à $\mathcal{F}$, alors il existe une solution globale par le théorème A. Cet espace $\mathcal{F}$ n'est en aucune manière optimal, mais il donne un exemple de croissance des normes de $\|\Delta_j u_0\|_2$ et $\|\Delta_j u_1\|_2$ (voir le chapitre 6 pour une définition des Δ_j) compatible avec les hypothèses du théorème A.

Corollaire 5.3.1 *Soit* $d = 3, 4$ *ou* 6*. On dit que* (u_0, u_1) *appartient à* $\mathcal{F}$ *si* $(S_0 u_0, S_0 u_1)$ *appartient à* $\dot{H}^1 \times L^2$*, et si pour une constante C*

$$\forall j \in \mathbb{N} \ , \quad 2^j \|\Delta_j u_0\|_2 + \|\Delta_j u_1\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{j \ \ln j \ \ln\ln j \ \ln\ln\ln j}} \ .$$

Alors pour toutes données initiales (u_0, u_1) *appartenant à* $\mathcal{F}$ *il existe une solution globale de* $(NLW)_{2^*-1}$*.*

PREUVE : Il suffit, grâce au théorème A, de s'assurer que si $(u_0, u_1) \in \mathcal{F}$, il existe une décomposition de la forme

$$(u_0, u_1) = (v_0, v_1) + (w_1, w_2)$$

telle que

$$\|(w_0, w_1)\|_{\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C \exp(-\exp(\|(v_0, v_1)\|^\kappa_{\dot{H}^1 \times L^2})) \ .$$

On montre facilement que pour obtenir une telle décomposition il suffit de prendre $v_0 = S_N u_0$ et $w_0 = (Id - S_N) v_0$, et N assez grand. ■

5.3.2 Preuve du théorème A

1. Donnons-nous v_0 comme dans le théorème, et soit v la solution de $(NLW)_{2^*-1}$ associée. Pour prouver le théorème, il suffit de prouver qu'une solution globale de

$$\begin{cases} \Box w + (v+w)|v+w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2} = 0 \\ w_{|t=0} = w_0 \\ \partial_t w_{|t=0} = w_1 \end{cases} \tag{5.3.3}$$

existe, puisqu'alors $v+w$ est solution de $(NLW)_{2^*-1}$ avec pour données initiales $(v_0 + w_0, v_1 + w_1)$.

2. L'idée de la preuve est maintenant la suivante : nous partageons la demi-droite réelle en N intervalles $[T_n, T_{n+1}]$, avec $T_0 = 0$ et $T_N = +\infty$.
Puis nous résolvons l'équation perturbée (5.3.3) ci-dessus successivement sur les intervalles $[T_n, T_{n+1}]$, à l'aide d'un théorème de point fixe, dans

$$X_{[T_n,T_{n+1}]} \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_n, T_{n+1}], \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}) \ ,$$

où μ, α et ρ ont été définis en (5.3.1).
L'utilisation de ce théorème de point fixe est rendue possible par la petitesse de v dans l'espace $X_{[T_n,T_{n+1}]}$, pour T_n assez proche de T_{n+1}.
Il nous faudra bien sûr contrôler la norme de $w(T_n)$ pour chaque n, afin qu'elle reste suffisamment petite. Enfin, le point crucial est que N est bien fini. Ceci est garanti par le théorème 5.2.5, qui nous donnera une majoration de la norme de v dans $X_{[0,\infty[}$.
Au total, nous obtiendrons ainsi une solution de (5.3.3) pour $t \in [0, +\infty[$; comme le cas $t \in]-\infty, 0]$ est identique, nous obtiendrons en fait une solution de (5.3.3) définie sur $\mathbb{R}$, et le théorème sera prouvé.

3. Nous allons appliquer le programme défini ci-dessus. Par le théorème 5.2.5, on a

$$\|v\|_{L^{q_0}\dot{B}^{s_0}_{r_0,2}} \leq C \exp E^\kappa \ . \tag{5.3.4}$$

avec

$$q_0 = \frac{2(d^2+2)}{(d+1)(d-2)} \qquad r_0 = 2^* \qquad s_0 = \frac{1}{q_0} \ .$$

D'autre part, le théorème 5.2.2 implique que la solution U de (5.2.2) vérifie (on note comme dans l'énoncé du théorème $X = X_{]-\infty,\infty[}$)

$$\|U\|_X \leq \|U\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R},\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} \leq C\left(\|U_0\|_{\dot{H}^1} + \|U_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^{q_1}(\mathbb{R},\dot{B}^{s_1}_{r_1,2})}\right)$$

avec

$$q_1 = \frac{2(d^2+2)}{(d+1)(d+2)} \qquad r_1 = \frac{2(d^2+2)}{d^2+2d-2} \qquad s_1 = \frac{1}{q_0} \ .$$

Si l'on applique cette inégalité à v solution de $(NLW)_{2^*-1}$ avec les données initiales (v_0, v_1), on obtient

$$\begin{aligned} \|v\|_X &\leq \|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R},\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} \\ &\leq C\left(\|v_0\|_{\dot{H}^1} + \|v_1\|_{L^2} + \||v|^{2^*-2}\|_{L^{q_1}\dot{B}^{s_1}_{r_1,2}}\right) \\ &\leq C\left(\|v_0\|_{\dot{H}^1} + \|v_1\|_{L^2} + \|v\|^{2^*-1}_{L^{q_0}\dot{B}^{s_0}_{r_0,2}}\right) \ , \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

où la dernière inégalité est prouvée dans l'article de Nakanishi [17], page 34.
En combinant (5.3.4) et (5.3.5), on obtient, pour de nouvelles constantes strictement positives κ et C,

$$\|v\|_X \leq C \exp(E^\kappa) \ . \tag{5.3.6}$$

Donnons-nous $\epsilon > 0$, auquel nous assignerons par la suite une valeur précise. Nous construisons

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1} < \cdots < T_N = \infty$$

grâce au lemme suivant, dont la preuve sera donnée après celle du théorème.

Lemme 5.3.1 *Soit v comme ci-dessus et $\epsilon > 0$. Il existe un entier N et $N+1$ réels $T_0, \ldots, T_N$ tels que*

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1} < \cdots < T_N = \infty$$

et

$$\|v\|_{X_{[T_n, T_{n+1}]}} \leq \epsilon \ .$$

De plus, on dispose de l'estimation

$$N^{\alpha/\mu} \epsilon \leq C \exp(E^\kappa) \ . \tag{5.3.7}$$

4. Le lemme suivant précise sous quelles conditions (5.3.3) admet une solution sur $[0, T_1]$, et permet de majorer la norme en T_1 de cette solution.

Lemme 5.3.2 *Soit $T > 0$. Il existe des constantes c_0 et C_0 telles que si*

$$\begin{cases} \|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq c_0 \\ \|v\|_{X_{[0,T]}} \leq c_0 \end{cases}$$

alors le problème de Cauchy (5.3.3) admet une solution $w \in X_{[0,T]}$ telle que

$$\|w\|_{X_{[0,T]}} \leq C_0 \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right)$$

et

$$\|w(T)\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|\partial_t w(T)\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C_0 \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \ .$$

Nous ne prouvons pas tout de suite ce lemme, et montrons d'abord comment il permet d'achever la preuve du théorème. On applique tout d'abord le lemme 5.3.1 avec $\epsilon = c_0$. On obtient $T_0 \ldots T_N$. Si $\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq c_0$, on peut utiliser le lemme 5.3.2, qui nous donne une solution $w \in X_{[0,T_1]}$ telle que

$$\|w(T_1)\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|\partial_t w(T_1)\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C_0 \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \ .$$

On applique alors à nouveau le lemme 5.3.2 au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \Box w + (v+w)|v+w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2} = 0 \\ w_{|t=T_1} = w(T_1) \\ \partial_t w_{|t=T_1} = w(T_1) \ , \end{cases} \tag{5.3.8}$$

afin d'obtenir une solution sur $[T_1, T_2]$.
A condition que $C_0 \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \leq c_0$, le lemme donne une solution $w \in X_{[T_1,T_2]}$ telle que

$$\|w(T_2)\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|\partial_t w(T_2)\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C_0^2 \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) .$$

En itérant ce processus, on obtient une solution w sur $[0, \infty[$ à condition que

$$C_0^N \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \leq c_0 .$$

Il découle de cette inégalité et de (5.3.7) qu'une condition suffisante pour obtenir une solution w globale est que

$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \leq C \exp\left(-\exp\left(E^\kappa\right)\right) ,$$

pour des constantes C et κ indépendantes de ϵ et E ; ceci prouve la partie "existence" du théorème.

5. Reste la partie "unicité". Observons d'abord que la solution $u = v + w$ qui vient d'être construite appartient effectivement à l'ensemble $\mathcal{E}$ défini en (5.3.2). En effet, on sait par (5.3.5) que $v \in \widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})$. Ceci implique

$$d_X(v, \mathcal{S}) = 0 . \tag{5.3.9}$$

D'autre part, nous allons majorer $\|w\|_{X_{[0,\infty[}}$ (une majoration de $\|w\|_X$ s'obtient de manière identique) ; nous utiliserons pour ce faire les temps $T_0, T_1 \ldots T_N$ définis plus haut. Soit

$$a_{n,j} \overset{\text{déf}}{=} 2^{j(1-\alpha/2)} \|\Delta_j w\|_{L^{\mu/\alpha}([T_{n-1},T_n],L^\rho)} .$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|w\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,\infty[,\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n=1}^N a_{n,j}^{\mu/\alpha} \right)^{\alpha/\mu} \leq \sup_j \sum_{n=1}^N a_{n,j} \\ &\leq \sum_{n=1}^N \sup_j a_{n,j} = \sum_{n=1}^N \|w\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_{n-1},T_n],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} . \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

D'autre part, on déduit du lemme 5.3.2 et du point **4**. précédent que

$$\sum_{n=1}^N \|w\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_{n-1},T_n],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} \leq \left(C_0 + C_0^2 + \cdots + C_0^N\right) \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \leq C c_0 \tag{5.3.11}$$

et cette dernière quantité est plus petite que ϵ_1 (qui sera fixé plus loin) à condition que c_0 soit choisi assez petit, ce que nous pouvons supposer.
En rassemblant (5.3.9), (5.3.10) et (5.3.11), on trouve

$$d_X(u, \mathcal{S}) \leq d_X(v, \mathcal{S}) + d_X(w, \mathcal{S}) \leq \|w\|_X \leq \epsilon_1 ,$$

et donc $u \in \mathcal{E}$.

6. Montrons maintenant qu'il y a bien unicité dans $\mathcal{E}$. Donnons-nous ainsi deux solutions u et $\widetilde{u}$ issues de la même donnée initiale, en supposant bien sûr que cette donnée initiale

satisfait les conditions du théorème A. Supposons par l'absurde que ces deux solutions ne sont pas égales pour tout temps ; on peut alors supposer que 0 est le temps maximal jusqu'auquel ces solutions sont égales.
Le lemme suivant, qui est démontré dans la section 5.3.3, va nous permettre de conclure

Lemme 5.3.3 *Il existe $\epsilon > 0$ et $\zeta > 0$ tels que, si (u_0, u_1) sont des données initiales vérifiant*

$$d_{\dot{B}^1_{2,\infty}\times\dot{B}^0_{2,\infty}}((u_0,u_1),\mathcal{S}) \stackrel{déf}{=} \inf\{\|(u_0,u_1)-f\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}\times\dot{B}^0_{2,\infty}}\ ,\ f\in\mathcal{S}\} \leq \epsilon\ ,$$

alors il existe $T > 0$ et u tels que

- *u est solution de $(NLW)_{2^*-1}$ sur $[0,T]$ pour les données initiales (u_0,u_1),*
- *et pour tout $t \leq T$, u est unique sur $[0,t]$ si l'on ajoute la condition*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,t],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} < \zeta\ .$$

On observe alors que, si $u \in \mathcal{E}$,

$$\limsup_{t\to 0} \|u\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,t],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} < \epsilon_1\ .$$

En particulier, si $\epsilon_1 < \zeta$ (on fixe ϵ_1 de la sorte), et pour t assez petit, on peut appliquer le critère d'unicité du lemme ci-dessus à u et $\widetilde{u}$. On obtient que $u = \widetilde{u}$ sur $[0,t]$, ce qui est absurde. Ainsi s'achève la preuve du théorème. ■

5.3.3 Preuves des lemmes auxiliaires

Cette section est consacrée à la preuve des lemmes 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3, que nous avons utilisés dans la preuve du théorème A.

PREUVE DU LEMME 5.3.1 : Considérons tout d'abord la fonction

$$f\ :\ t \mapsto \|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,t],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})}\ .$$

Comme $v \in \widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,\infty[,\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})$, la fonction f est continue. Il est en outre clair qu'elle s'annule en 0, et a pour limite $\|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,\infty[,\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})}$ en $+\infty$. Si ϵ est plus petit que cette dernière quantité, on peut donc trouver T_1 tel que $f(T_1) = \|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,T_1],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} = \epsilon$. En itérant ce procédé, on définit T_2 tel que $\|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_1,T_2],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} = \epsilon$, puis T_3, et ainsi de suite. Le fait que cette construction s'arrête après un certain nombre d'itérations, ainsi que l'estimation (5.3.7) contenue dans le lemme 5.3.1, vient de l'inégalité que nous allons maintenant prouver. Supposons avoir construit $T_1 < T_2 < \cdots < T_N$ comme nous venons de l'expliquer.

On définit comme plus haut la suite $(a_{n,j})$ indexée par $n \in \{1\dots N\}$ et $j \in \mathbb{Z}$ par

$$a_{n,j} \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{j(1-\alpha/2)}\|\Delta_j v\|_{L^{\mu/\alpha}([T_{n-1},T_n],L^\rho)}\ .$$

On a alors

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n,j}^2\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{N}\|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_{n-1},T_n],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} \geq N\epsilon\ . \tag{5.3.12}$$

Nous allons estimer le premier terme de l'équation ci-dessus en utilisant de manière répétée l'inégalité de concavité

$$\sum_{n=1}^{M} b_n^\beta \leq M^{1-\beta} \left(\sum_{n=1}^{M} b_n \right)^\beta$$

valable si $M \in \mathbb{N}$, $b_1 \dots b_M$ sont des nombres positifs, et $\beta \in [0,1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n,j}^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{N} \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n,j}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{N} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} N^{1-2\alpha/\mu} \left[\sum_{n=1}^{N} a_{n,j}^{\mu/\alpha} \right]^{2\alpha/\mu} \right)^{1/2} \\ &\leq N^{1-\alpha/\mu} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{n=1}^{N} a_{n,j}^{\mu/\alpha} \right]^{2\alpha/\mu} \right)^{1/2} , \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

où nous avons utilisé dans la deuxième inégalité le fait que $0 < 2\alpha/\mu < 1$. Or

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{n=1}^{N} a_{n,j}^{\mu/\alpha} \right]^{2\alpha/\mu} \right)^{1/2} = \|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_0,T_N],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} . \tag{5.3.14}$$

Il découle de (5.3.12), (5.3.13) et (5.3.14) que

$$N\epsilon \leq N^{1-\alpha/\mu} \|v\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([T_0,T_N],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} ,$$

et, joint à l'estimation (5.3.6), ceci conclut la preuve du lemme. ■

PREUVE DU LEMME 5.3.2 : Résoudre (5.3.3) sur $[0,T]$ revient à résoudre sur le même intervalle l'équation intégrale

$$\begin{aligned} w(t) &= \dot{W}(t)w_0 + W(t)w_1 + \int_0^t W(t-s) \left[(v+w)|v+w|^{2^*-2}(s) - v|v|^{2^*-2}(s) \right] ds \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} G(w)(t) , \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

voir la section 5.2.2. Pour $\eta > 0$, notons

$$Y = \{ w \in X_{[0,T]} , \|w\|_{X_{[0,T]}} < \eta \} ;$$

et cherchons quels sont les $\eta > 0$ tels que G stabilise Y. Nous aurons pour ce faire besoin du lemme de produit 5.3.4, qui est prouvé plus bas et qui assure notamment que l'application

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (u_1, \dots, u_{2^*-1}) & \mapsto & u_1|u_2| \dots |u_{2^*-1}| \\ \left(X_{[0,T]}\right)^{2^*-1} & \to & \widetilde{L}^\nu([0,T], \dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty}) \end{array} \right. \tag{5.3.16}$$

est continue.

Nous allons utiliser ce fait en conjonction avec le théorème 5.2.2, qui implique que la solution U de (5.2.2) vérifie

$$\|U\|_{X_{[0,T[}} \leq C \left(\|U_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|U_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} + \|F\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \right) . \tag{5.3.17}$$

En notant

$$\begin{cases} \delta = \|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \\ \epsilon = \|v\|_{X_{[0,T]}} , \end{cases}$$

l'inégalité (5.3.17) jointe à (5.3.16) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|G(w)\|_{X_{[0,T]}} &\leq C \left(\delta + \|(v+w)|v+w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2}\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \right) \\ &\leq C \left(\delta + \left\| (2^*-1)w \int_0^1 |v+\tau w|^{2^*-2} d\tau \right\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \right) \\ &\leq C \left(\delta + (2^*-1)\|w\|_{X_{[0,T]}} \int_0^1 \|v+\tau w\|^{2^*-2}_{X_{[0,T]}} d\tau \right) \\ &\leq C(\delta + \eta(\eta+\epsilon)^{2^*-2}) . \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

On voit facilement que cette dernière quantité est plus petite que η (c'est à dire que G stabilise Y) si

$$\delta \leq c_1\eta \quad , \quad \eta \leq c_2 \quad \text{et} \quad \epsilon \leq c_2 \tag{5.3.19}$$

(c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives). Demandons-nous maintenant à quelle condition G est contractante sur Y. Si w et w' appartiennent à Y, on peut écrire, grâce à (5.3.17) et au lemme 5.3.4,

$$\begin{aligned} &\|G(w)-G(w')\|_{X_{[0,T]}} \\ &\quad = \left\| \int_0^t W(t-s) \left[(v+w)|v+w|^{2^*-2}(s) - (v+w')|v+w'|^{2^*-2}(s) \right] ds \right\|_{X_{[0,T]}} \\ &\quad \leq C\|(v+w)|v+w|^{2^*-2} - (v+w)|v+w|^{2^*-2}\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \\ &\quad \leq C \left\| (2^*-1)(w-w') \int_0^1 |v+w+\tau(w'-w)|^{2^*-2} d\tau \right\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \\ &\quad \leq C(\eta+\epsilon)^{2^*-2}\|w-w'\|_{X_{[0,T]}} . \end{aligned}$$

Ainsi, G est contractante si

$$\eta \leq c_3 \quad \text{et} \quad \epsilon \leq c_3 . \tag{5.3.20}$$

Fixons $\eta = \frac{\delta}{c_1}$. Alors (5.3.19) et (5.3.20) reviennent à

$$\delta \leq c_0 \quad \text{et} \quad \epsilon \leq c_0 .$$

Si cette dernière condition est vérifiée, G est contractante sur Y, et le théorème de point fixe de Picard entraîne alors l'existence d'une solution de (5.3.3) appartenant à Y, et vérifiant donc

$$\|w\|_{X_{(0,T]}} \leq \eta = \frac{\delta}{c_1} .$$

Il nous reste à estimer sa norme en T. Une nouvelle utilisation du théorème 5.2.2 nous donne l'inégalité

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^\infty([0,T],\dot B^1_{2,\infty})} &+ \|\partial_t w\|_{L^\infty([0,T],\dot B^0_{2,\infty})}\\ &\le C\left(\|w_0\|_{\dot B^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot B^0_{2,\infty}} + \|(v+w)|v+w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2}\|_{\widetilde L^\nu([0,T],\dot B^{1/2}_{\nu,\infty})}\right)\\ &\le C_1\delta\ .\end{aligned}$$

La dernière majoration est justifiée par (5.3.18) et par le choix de $\eta = \frac{\delta}{c_1}$ que nous avons fait. Le lemme est prouvé. ■

Nous allons maintenant prouver un lemme de produit qui nous a déjà servi dans la preuve du lemme 5.3.2 et que nous utiliserons à nouveau dans la partie 5.4.
Rappelons que nous avons posé

$$\mu = \frac{2(d+1)}{d-1} \quad , \quad \nu = \frac{2(d+1)}{d+3} \quad , \quad \alpha = \frac{\mu}{\nu(2^*-1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\mu} + \frac{1-\alpha}{2}\ . \tag{5.3.21}$$

Lemme 5.3.4 *Soit d égal à 3, 4 ou 6, et $T \le T'$ deux réels.*

1. *L'application*

$$\begin{cases} (u_1,u_2,\dots,u_{2^*-1}) & \mapsto & u_1|u_2|\dots|u_{2^*-1}| \\ \left(\widetilde L^{\mu/\alpha}([T,T'],\dot B^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})\right)^{2^*-1} & \to & \widetilde L^\nu([T,T'],\dot B^{1/2}_{\nu,\infty}) \end{cases}$$

   est continue.

2. *L'application*

$$\begin{cases} (u_1,u_2,\dots,u_{2^*-1}) & \mapsto & u_1|u_2|\dots|u_{2^*-1}| \\ \widetilde L^{\mu/\alpha}([T,T'],\dot B^{1-\alpha/2}_{\rho,2}) \times \left(\widetilde L^{\mu/\alpha}([T,T'],\dot B^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})\right)^{2^*-2} & \to & \widetilde L^\nu([T,T'],\dot B^{1/2}_{\nu,2}) \end{cases}$$

   est continue.

PREUVE DU LEMME 5.3.4 : Nous nous limitons à montrer le point 1., le point 2. étant très similaire.

Pour simplifier les notations, nous allons prendre $z_1 \dots z_{2^*-1}$ dans $\dot B^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}$ et montrer que leur produit appartient à $\dot B^{1/2}_{\nu,\infty}$. Ceci correspond à l'énoncé du lemme, aux espaces de Lebesgue en temps et aux valeurs absolues près. Que le lemme soit vrai une fois les espaces de Lebesgue en temps ajoutés résulte simplement de l'inégalité de Hölder ; qu'il soit vrai avec de plus les valeurs absolues résulte de la continuité de l'application $f \mapsto |f|$ de $\dot B^s_{p,q}$ dans $\dot B^s_{p,q}$ si $s < 1$, voir l'appendice.
Afin d'utiliser l'algorithme du paraproduit de Bony (voir [3]), nous écrivons le produit $z_1 \dots z_{2^*-1}$ comme une somme télescopique

$$z_1 \dots z_{2^*-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[\prod_{i=1}^{2^*-1} S_{j+1} z_i - \prod_{i=1}^{2^*-1} S_j z_i\right] \overset{\text{déf}}{=} \sum_j A_j\ .$$

Il est clair que, pour tout j, A_j est localisé en fréquence dans une boule de rayon proportionnel à 2^j. On voudrait montrer que $\sum_j A_j$ appartient à $\dot B^{1/2}_{\nu,\infty}$, et comme ce dernier

espace a un indice de régularité strictement positif, il suffit, par un résultat classique (voir l'appendice), de montrer que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}}\|A_j\|_\nu < \infty \ .$$

Si l'on examine de plus près les A_j, il apparaît que chacun d'entre eux est une combinaison linéaire de produits $a_1...a_{2^*-1}$, où chacun des a_i est égal à $\Delta_j z_i$ ou $S_j z_i$, mais avec au moins un des a_i égal à $\Delta_j z_i$. Or nous disposons des deux estimations suivantes

- Par définition de $\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}$, on a $\|\Delta_j z_i\|_\rho \leq C2^{(1-\alpha/2)j}\|z_i\|_{\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}}$.
- D'autre part, l'injection de Sobolev classique (voir le chapitre 6)

$$\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{1-\frac{\alpha}{2}+d\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)}_{R,\infty} \qquad \text{si } R>\rho$$

  donne

$$\|\Delta_j z_i\|_R \leq C2^{-j\left[1-\frac{\alpha}{2}+d\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)\right]}\|z_i\|_{\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}}$$

  et

$$\|S_j z_i\|_R \leq C2^{-j\left[1-\frac{\alpha}{2}+d\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)\right]}\|z_i\|_{\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}}$$

  à condition que $R>\rho$ et que $1-\frac{\alpha}{2}+d\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)<0$.

Si l'on considère un des termes du type $a_1...a_{2^*-1}$ définis ci-dessus, on peut supposer par symétrie que $a_1=\Delta_j z_1$. L'inégalité de Hölder puis les deux estimations précédentes permettent alors d'écrire

$$\begin{aligned}\|A_j\|_\nu &\leq \|a_1\|_\rho\|a_2\|_R\dots\|a_{2^*-1}\|_R \\ &\leq C2^{-j(1-\alpha/2)}\left(2^{-j\left[1-\frac{\alpha}{2}+d\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)\right]}\right)^{2^*-2} = C2^{-\frac{j}{2}} \ ,\end{aligned}$$

et la dernière égalité est vraie à condition que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho}+\dfrac{2^*-2}{R}=\dfrac{1}{\nu} \\ 1-\dfrac{\alpha}{2}+(2^*-2)\left[1-\dfrac{\alpha}{2}+d\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{\rho}\right)\right]=\dfrac{1}{2} \\ R>\rho \\ 1-\dfrac{\alpha}{2}+d\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{\rho}\right)<0 \ . \end{array}\right. \tag{5.3.22}$$

Or les deux premières lignes de (5.3.22) sont équivalentes et elles conduisent à une valeur de R qui vérifie les deux dernières inégalités. ■

PREUVE DU LEMME 5.3.3 : La preuve de ce lemme est très similaire à celle du lemme 5.3.2, aussi nous bornons-nous à en indiquer les grandes lignes. On se ramène à l'équation intégrale

$$u(t)=\dot{W}(t)u_0+W(t)u_1+\int_0^t W(t-s)u|u|^{2^*-2}(s)\,ds \ ,$$

que l'on va résoudre dans

$$X_T \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,T],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}) \ .$$

On utilise les deux faits suivants :

- L'application
$$\begin{array}{ccc} X_T^{2^*-1} & \longrightarrow & \widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty}) \\ (z_1\ldots,z_\nu) & \mapsto & z_1|z_2|\ldots|z_{2^*-1}| \end{array}$$
est continue - c'est le lemme 5.3.4.
- Le théorème 5.2.2 donne l'estimation de Strichartz suivante, pour U solution de (5.2.2)
$$\|U\|_{X_T} \leq C\|\dot{W}(t)U_0\|_{X_T} + \|W(t)U_1\|_{X_T} + \|F\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \ .$$

On déduit des deux points précédents l'estimation a priori suivante, pour u solution de $(NLW)_{2^*-1}$,
$$\|u\|_{X_T} \leq C\left[\|\dot{W}(t)u_0\|_{X_T} + \|W(t)u_1\|_{X_T} + \|u\|_{X_T}^{2^*-1}\right] \ .$$
Or
$$\lim_{T\to 0}\left(\|\dot{W}(t)u_0\|_{X_T} + \|W(t)u_1\|_{X_T}\right) \leq Cd_{\dot{B}^1_{2,\infty}\times\dot{B}^0_{2,\infty}}((u_0,u_1),\mathcal{S})$$
puisque si $(u_0,u_1)\in\mathcal{S}$, le membre de gauche de l'équation ci-dessus est nul, et que d'autre part
$$\|\dot{W}(t)u_0\|_{X_T} + \|W(t)u_1\|_{X_T} \leq C\left(\|u_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|u_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}}\right) \ .$$
Enfin, par hypothèse,
$$Cd_{\dot{B}^1_{2,\infty}\times\dot{B}^0_{2,\infty}}((u_0,u_1),\mathcal{S}) \leq C\epsilon \ ,$$
donc si ϵ est choisi assez petit, le problème de point fixe admet une solution. Cette solution sera unique dans une boule de rayon ζ convenablement choisi. ■

5.3.4 Résultat complémentaire

La preuve que nous venons de donner permet en fait de montrer un résultat un peu meilleur que le théorème A. Nous l'énonçons sous forme de corollaire.

Corollaire 5.3.2 *Soit $d = 3, 4$ ou 6, et soit v une solution de $(NLW)_{2^*-1}$ issue des données initiales $(v_0,v_1)\in\dot{B}^1_{2,\infty}\times\dot{B}^0_{2,\infty}$. On suppose que*
$$\|v\|_X < \infty \ .$$
Alors si (w_0,w_1) vérifie
$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} \leq C\exp(-C\|v\|_X) \ ,$$
il existe une solution globale de $(NLW)_{2^*-1}$ issue des données initiales (v_0+w_0, v_1+w_1).

5.4 Solutions globales de l'équation critique pour des données initiales d'énergie infinie : méthode de Calderón

Nous appliquons dans cette partie la méthode de Calderón. Elle nous permet de prouver un théorème d'existence globale pour des données initiales grandes et d'énergie infinie ; ce résultat est complémentaire de celui obtenu dans la partie précédente.

5.4.1 Enoncé du théorème

Théorème B *Soit $d = 6$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy $(NLW)_{2^*-1}$ admette une solution globale u à condition que les données initiales (u_0, u_1) puissent s'écrire*

$$u_0(x) = v_0(x) + \frac{c_0}{|x|^2} \quad \text{et} \quad u_1(x) = v_1(x) + \frac{c_1}{|x|^3} \ ,$$

avec $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, $c_1 < \epsilon$ et $c_2 < \epsilon$.
De plus, u est unique dans l'ensemble

$$\mathcal{E} \overset{déf}{=} \{u \, , \, d_X(u, \mathcal{S}) < \epsilon_1\} \tag{5.4.1}$$

où $\epsilon_1 > 0$ et les notations sont celles du théorème A.

Il nous faut faire quelques remarques

- On a puisque $d = 6$

$$x \mapsto \frac{1}{|x|^2} \in \dot{B}^1_{2,\infty} \setminus \dot{H}^1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{|x|^3} \in \dot{B}^0_{2,\infty} \setminus L^2 \ ,$$

  sans quoi le théorème serait sans intérêt.
- Ce théorème vient compléter le théorème A obtenu en appliquant la méthode de Bourgain. Ici, les perturbations d'énergie infinie (w_0, w_1) ont une forme bien précise : elles s'écrivent $(\frac{c_0}{|x|^2}, \frac{c_1}{|x|^3})$. En revanche, la borne sur la norme de ces perturbations permettant d'obtenir des solutions globales **ne dépend pas** de v_0 et v_1.
- A la restriction $d = 6$, on pourrait peut-être substituer une borne $d \geq 4$, mais de nombreux problèmes techniques supplémentaires devraient alors être résolus. Traiter le cas $d = 3$ par la méthode que nous allons présenter ne semble par contre pas possible, pour une raison qui apparaîtra dans la section 5.4.3.
- Enfin, pour alléger quelque peu les notations, nous montrerons le théorème dans le cas où $c_1 = 0$.

5.4.2 Solution globale pour des données initiales d'énergie infinie et petites

La proposition qui suit est proche d'un résultat démontré par Planchon [19]. Elle peut être vue comme un cas particulier du lemme 5.3.2.

Proposition 5.4.1 (Planchon [19]) *Pour $d = 3, 4, 6$ il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toutes données initiales (w_0, w_1) telles que*

$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} < \epsilon \ ,$$

il existe w solution globale de $(NLW)_{2^*-1}$. De plus, w est unique dans l'ensemble des fonctions telles que

$$\|w\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})} < \epsilon_1$$

(les notations sont celles du théorème A), et vérifie l'estimation

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \dot{B}^1_{2,\infty}) \cap \widetilde{L}^\mu(\mathbb{R}, \dot{B}^{1/2}_{\mu,\infty})} \leq C \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} \right) \ . \tag{5.4.2}$$

PREUVE : Nous ne détaillons pas la preuve, puisqu'elle repose sur un argument de point fixe identique à celui qui apparaît dans le lemme 5.3.3 ; il convient simplement de substituer

$$\widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})$$

à X_T. ■

5.4.3 Solution locale de l'équation perturbée

Nous considérons w une solution de $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales petites telle que donnée par la proposition 5.4.1, et nous examinons à partir de maintenant le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \Box v + (v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2} = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \\ \partial_t v_{|t=0} = v_1 \ , \end{cases} \tag{5.4.3}$$

où $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Notre but est de prouver l'existence de solutions globales de $(NLW)_{2^*-1}$ pour des données initiales d'énergie infinie. Une telle solution est donnée par $u = v + w$, si v est une solution globale du problème de Cauchy ci-dessus ; nous allons donc nous attacher à prouver que ce problème de Cauchy admet des solutions globales.
La première étape est de construire une solution locale ; c'est l'objet de la section qui suit.

Construction de la solution locale et critère d'explosion

Proposition 5.4.2 *Soit $d = 3, 4, 6$.*
(i) Il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour des données initiales (w_0, w_1) telles que

$$\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} < \epsilon \ ,$$

le problème de Cauchy $(NLW)_{2^*-1}$ admette une solution globale w unique dans une boule centrée en 0 et de rayon strictement positif de $\widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})$. Pour ce w et des conditions initiales $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$, il existe $T > 0$ tel que le probème de Cauchy (5.4.3) admette une solution v telle que

$$(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^1 \times L^2) \ .$$

Soit T^* le temps maximal avec cette propriété.
(ii) Il existe une constante $\eta > 0$ telle que si l'on note $\beta(t)$ la quantité

$$\beta(t) \stackrel{déf}{=} \sup \Big\{ r > 0 \, , \, \|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(x,r))} + \|\partial_t v(t,\cdot)\|_{L^2(B(x,r))} + \|v(t,\cdot)\|_{L^{2^*}(B(x,r))} < \eta \ \forall x \in \mathbb{R}^d \Big\}$$

pour $t < T^*$, et si d'autre part $T^* < \infty$, alors

$$\beta(t) \stackrel{t \to T^*}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On dispose même de l'estimation

$$\beta(t) \leq T^* - t \ .$$

PREUVE :
(i) L'existence et l'unicité de w pour ϵ assez petit découlent de la proposition 5.4.1.
Pour prouver l'existence locale d'une solution v de (5.4.3), rappelons d'abord (voir (5.2.4)) que (5.4.3) est équivalent à l'équation intégrale

$$v(t) = \dot{W}(t)v_0 + W(t)v_1 + \int_0^t W(t-s)\left[(v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2}\right] ds \ . \tag{5.4.4}$$

Nous allons maintenant appliquer un argument de point fixe dans l'espace

$$X \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,T], \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2}) \ ,$$

où T strictement positif sera fixé par la suite, et où μ, α et ρ sont définis comme en (5.3.1). Nous avons besoin de deux estimations.

- Commençons par la loi de produit associée au terme non-linéaire. En utilisant le lemme 5.3.4 et ses notations, on a

$$\begin{aligned} &\|(v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2}\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,2})} \\ &\qquad = \left\|(2^*-1)v\int_0^1 |w+\tau v|^{2^*-2} d\tau\right\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty})} \\ &\qquad \le C\|v\|_X \left(\|v\|_X + \|w\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,T],\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})}\right)^{2^*-2} \\ &\qquad \le C\|v\|_X(\epsilon + \|v\|_X)^{2^*-2} \ , \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

  où l'on a utilisé dans la dernière inégalité la majoration (5.4.2).
- D'autre part, le théorème 5.2.2 donne, pour U solution de (5.2.2),

$$\begin{aligned} &\|U\|_{L^\infty([0,T],\dot{H}^1)} + \|\partial_t U\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \|U\|_X \\ &\qquad \le C\left(\|U_0\|_{\dot{H}^1} + \|U_1\|_{L^2} + \|F\|_{\widetilde{L}^\nu([0,T],\dot{B}^{1/2}_{\nu,2})}\right) \ . \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

En prenant la norme de (5.4.4) dans X, et en utilisant (5.4.5) ainsi que (5.4.6), on déduit, pour v solution de (5.4.3), l'estimation a priori

$$\|v\|_X \le C\left(\|\dot{W}(t)v_0\|_X + \|W(t)v_1\|_X + \|v\|_X(\epsilon + \|v\|_X)^{2^*-2}\right) \ .$$

Cette estimation permet d'appliquer le théorème de point fixe de Picard, à condition que ϵ soit assez petit, ce que nous supposerons dorénavant, et que

$$\|\dot{W}(t)v_0\|_X + \|W(t)v_1\|_X \le c \ , \tag{5.4.7}$$

pour une constante universelle c. On choisit T de telle sorte que cette dernière condition soit remplie ; c'est possible car $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ et par conséquent

$$\lim_{T\to 0} \|\dot{W}(t)v_0\|_X + \|W(t)v_1\|_X = 0 \ .$$

On obtient ainsi une solution v de (5.4.3) définie sur $[0,T]$.
Il nous reste à montrer que

$$(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^1 \times L^2) \ .$$

Mais ceci découle de l'estimation a priori suivante, elle même à nouveau conséquence de (5.4.5) et de (5.4.6)

$$\|v\|_{L^\infty([0,T],\dot{H}^1)} + \|\partial_t v\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq C\left(\|v_0\|_{\dot{H}^1} + \|v_1\|_{L^2} + \|v\|_X(\epsilon + \|v\|_X)^{2^*-2}\right) .$$

En effet, v est construit en utilisant un schéma itératif (théorème de point fixe de Picard). Chacun des itérés est la solution d'une équation linéaire, il possède donc la propriété de continuité souhaitée. Cette propriété passe à la limite puisque ces itérés convergent pour la norme $L^\infty\dot{H}^1 \times L^\infty L^2$ du fait de l'estimation ci-dessus.

(*ii*) Le petit lemme suivant nous sera utile.

Lemme 5.4.1 *Pour tout $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un opérateur de prolongement*

$$E(x,r) \ : [\dot{H}^1 \cap L^{2^*}](B(x,r)) \to [\dot{H}^1 \cap L^{2^*}](\mathbb{R}^d)$$

continu et vérifiant $(E(x,r)v)_{|B(x,r)} = v$. De plus, la norme de cet opérateur ne dépend ni de x ni de r.

PREUVE DU LEMME 5.4.1 : Donnons-nous deux fonctions ϕ et ψ telles que

- $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$ et $\phi(x) = 2 - x$ si $1 \leq x \leq 2$.
- $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, $\mathrm{Supp}(\psi) \subset B(0, 3/2)$ et $\psi = 1$ sur $B(0,1)$.

On peut alors vérifier que l'opérateur $E(x,r)$ souhaité est fourni par

$$E(x,r)(v)(y) = \psi\left(\frac{y-x}{r}\right) v\left(x + \frac{r(y-x)}{|y-x|}\phi\left(\frac{|y-x|}{r}\right)\right) .$$

■

RETOUR À LA PREUVE DE LA PROPOSITION 5.4.2 : Donnons-nous $x \in \mathbb{R}^d$ et $t < T^*$. Par définition de β, on a

$$\|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(x,r))} + \|v(t,\cdot)\|_{L^{2^*}(B(x,r))} + \|\partial_t v(t,\cdot)\|_{L^2(B(x,r))} \leq \beta(t) ,$$

et par conséquent

$$\|E(x,r)(v(t,\cdot))\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} + \|\chi_{B(x,r)}\partial_t v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0\beta(t) ,$$

où C_0 est la norme de $E(x,r)$ et $\chi_{B(x,r)}$ la fonction caractéristique de $B(x,r)$.
D'autre part, les estimations de Strichartz (théorème 5.2.2) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\|\dot{W}(t')E(x,r)(v(t,\cdot))\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,\infty[,\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} &+ \|W(t')\chi_{B(x,r)}\partial_t v(t,\cdot)\|_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha}([0,\infty[,\dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,2})} \\ &\leq C_1\left(\|E(x,r)(v(t,\cdot))\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} + \|\chi_{B(x,r)}\partial_t v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \\ &\leq C_1C_0\beta(t) .\end{aligned}$$

Ainsi, si

$$\beta(t) \leq \frac{c}{C_1C_0} \stackrel{\text{déf}}{=} \eta ,$$

l'inégalité (5.4.7) est vérifiée, avec

$$v_0 = E(x,r)(v(t,\cdot)) \qquad \text{et} \qquad v_1 = \chi_{B(x,r)}\partial_t v(t,\cdot) ,$$

et on peut appliquer la construction effectuée dans le (i). On obtient une solution globale de (5.4.3) issue de $(E(x,r)(v(t,\cdot)), \chi_{B(x,r)}\partial_t v(t,\cdot))$. Par vitesse finie de propagation, c'est, dans le cône d'espace-temps de base $\{t\} \times B(x,r)$ et de sommet $(t+r,x)$, une solution issue de $(v(t,\cdot), \partial_t v(t,\cdot))$.
En répétant cette construction pour tous les couples (x,r), avec $r < \beta(t)$, on obtient une solution de (5.4.3) sur $[t, t+\beta(t)[\times\mathbb{R}^d$.
Si $t+\beta(t) > T^*$, ceci contredit la définition de T^* ; il faut donc que

$$\beta(t) \leq T^* - t \ .$$

Ceci prouve le point (ii). ■
Heuristique : comment obtenir une solution globale ?

Soit v une solution de (5.4.3) donnée par la proposition 5.4.2. Rappelons que T est le temps maximal jusqu'auquel on peut définir une solution v telle que

$$(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^1 \times L^2) \ .$$

Supposons par l'absurde que $T < \infty$. Il nous faut montrer que le critère d'explosion (point (ii)) de la proposition 5.4.2 ne peut être vérifié ; en d'autres termes, il nous faut montrer que l'énergie ne se concentre pas.
Or la preuve de Shatah et Struwe [27] de l'existence globale de solutions d'énergie finie de $(NLW)_{2^*-1}$ consiste essentiellement à montrer que l'énergie ne se concentre pas. Les solutions d'énergie finie étudiées par ces deux auteurs correspondent au cas $w = 0$.
Leur argument ne serait-il pas adaptable au cas qui nous intéresse ? Le principal obstacle est que, si $w = 0$, l'énergie de v est constante ; ceci n'est plus vrai dès que w est d'énergie infinie. A défaut de la conservation exacte de l'énergie de v, nous allons demander que l'énergie de v croisse de manière contrôlée.
Comme nous le verrons un peu plus loin, le bilan d'énergie entre les instants $T/2$ et $T/2+\tau$ s'écrit

$$E(v, \frac{T}{2}+\tau) = E(v, \frac{T}{2}) - \int_{T/2}^{\frac{T}{2}+\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v \left((v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2} \right) dx\, dt \ .$$

Pour simplifier la discussion, nous allons raisonner de manière heuristique en assimilant $(v+w)|v+w|^{2^*-2} - w|w|^{2^*-2} - v|v|^{2^*-2}$ à

$$(v+w)^{2^*-1} - w^{2^*-1} - v^{2^*-1} = \sum_{i=1}^{2^*-2} a_i w^i v^{2^*-1-i} \ ,$$

où les a_i sont des réels. Contrôler

$$\int_{T/2}^{\frac{T}{2}+\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v \sum_{i=1}^{2^*-2} a_i w^i v^{2^*-1-i} dx\, dt$$

revient à contrôler le terme le plus singulier de cette expression, c'est à dire

$$\int_{T/2}^{\frac{T}{2}+\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v\, v^{2^*-2} w\, dx\, dt \ .$$

Pour espérer contrôler la croissance de l'énergie, il nous faut donner un sens à l'intégrale ci-dessus, en utilisant seulement l'énergie de v, c'est à dire le fait que $(v, \partial_t v)$ appartient à $\mathcal{C}([0,t], \dot{H}^1 \times L^2)$. Du fait de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2},2}$, l'intégrale ci-dessus aura un sens si

$$w \in L^1_{\rm loc}(]0,t], L^{\gamma,\infty}) \tag{5.4.8}$$

avec

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} + \frac{4}{d-2}\frac{d-2}{2d} = 1 \quad \text{c'est à dire} \quad \gamma = \frac{2d}{d-4} \cdot$$

Ceci n'a un sens que pour $d \geq 4$; notons que cette condition n'est en aucun cas optimale.

Dans le reste de ce chapitre, **nous nous placerons en dimension d'espace** $d = 6$ afin de simplifier les calculs (en effet, pour $d = 6$, la non-linéarité dans $(NLW)_{2^*-1}$ est plus facile à manier). Il semble cependant que la méthode que nous allons exposer soit valide à la seule condition que $d \geq 4$.
L'heuristique qui vient d'être développée nous conduit à adopter la stratégie suivante pour obtenir des solutions globales de (5.4.3).

1. Tout d'abord, nous allons montrer que w, la solution de $(NLW)_{2^*-1}$ associée aux conditions initiales $(w_0, w_1) = (\frac{c}{|x|^2}, 0)$, avec c assez petit, vérifie la condition (5.4.8) : c'est l'objet de la section 5.4.4.
2. Ceci nous permettra de contrôler l'énergie de v solution locale de (5.4.3).
3. Enfin, en adaptant la preuve de Shatah et Struwe [27], nous nous assurerons dans la section 5.4.5 que l'énergie de v ne se concentre pas

5.4.4 Etude d'une solution autosimilaire

Rappelons que la dimension d'espace est fixée à $d = 6$; nous notons w pour la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \Box w + |w|w = 0 \\ w_{|t=0}(x) = w_0(x) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{c}{|x|^2} \\ \partial_t w_{|t=0} = 0 \ . \end{cases}$$

Remarquons tout de suite que si $d = 6$, $2^* = 3$; nous nous intéressons donc à l'équation critique $(NLW)_{2^*-1}$. D'autre part, la donnée initiale $w_0(x) = \dfrac{c}{|x|^2}$ appartient à $\dot{B}^1_{2,\infty}$.
Grâce à la proposition 5.4.1, on sait que, pour c assez petit (ce que nous supposons à partir de maintenant), le problème de Cauchy ci-dessus admet une solution globale w, unique dans une boule de $L^\infty(\mathbb{R}, \dot{B}^1_{2,\infty}) \cap \widetilde{L}^\mu(\mathbb{R}, \dot{B}^{1/2}_{\mu,\infty})$.
D'autre part, w_0 est autosimilaire, et on en déduit l'existence d'un profil ψ à symétrie radiale tel que

$$w(t,x) = \frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{x}{t}\right) \ .$$

Proposition 5.4.3 *Le profil ψ qui vient d'être défini appartient localement à $L^{6,\infty}$.*

PREUVE : Nous allons d'abord utiliser les estimations de Strichartz, afin d'obtenir autant de régularité que possible pour ψ. Mais ces estimations ne suffiront pas, et il nous faudra dans un deuxième temps utiliser l'équation différentielle ordinaire vérifiée par ψ.

1. Commençons par examiner ψ loin de 0. Puisque $w \in L^\infty \dot{B}^1_{2,\infty}$, on a aussi $\psi \in \dot{B}^1_{2,\infty}$. Comme ψ est radiale, ceci implique qu'elle est continue en dehors de 0.

En effet, soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ une fonction radiale dont le support ne contient pas 0. Alors $\phi\psi$ est une fonction radiale appartenant à l'espace non homogène $B^1_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Soit maintenant g une fonction d'une variable réelle telle que

$$g(|x|) \overset{\text{déf}}{=} \phi(x)\psi(x) \ .$$

Alors $g \in B^1_{2,\infty}(\mathbb{R})$, donc aussi à $B^{3/4}_{2,2}$, et enfin, par injection de Sobolev, à l'espace de Hölder $C^{1/4}$.
Au total, il nous reste seulement à nous assurer que ψ ne présente pas de singularité trop explosive en 0.

2. Il nous faut maintenant utiliser les estimations de Strichartz : grâce au théorème 5.2.2, nous obtenons

$$\|w\|_{\widetilde{L}^q \dot{B}^s_{r,\infty}} \leq C \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} + \||w|w\|_{\widetilde{L}^\nu \dot{B}^{1/2}_{\nu,\infty}} \right)$$

si s est donné par $s = \frac{1}{q} + \frac{6}{r} - 2$, et si q et r vérifient les conditions (5.2.6). En utilisant le lemme 5.3.4, on voit que

$$\|w\|_{\widetilde{L}^q \dot{B}^s_{r,\infty}} \leq C \left(\|w_0\|_{\dot{B}^1_{2,\infty}} + \|w_1\|_{\dot{B}^0_{2,\infty}} + \|w\|^2_{\widetilde{L}^{\mu/\alpha} \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty}} \right) < \infty$$

car $w \in L^\infty(\mathbb{R}, \dot{B}^1_{2,\infty}) \cap \widetilde{L}^\mu(\mathbb{R}, \dot{B}^{1/2}_{\mu,2}) \hookrightarrow \widetilde{L}^{\mu/\alpha}(\mathbb{R}, \dot{B}^{1-\alpha/2}_{\rho,\infty})$. Ainsi,

$$w \in \widetilde{L}^q \dot{B}^s_{r,\infty} \qquad \text{avec } s = \frac{1}{q} + \frac{6}{r} - 2 \ , \tag{5.4.9}$$

si q et r vérifient les conditions (5.2.6).

3. De l'appartenance de w aux espaces fonctionnels apparaissant ci-dessus, nous allons maintenant déduire que ψ appartient à certains espaces de Besov, à l'aide d'un argument apparaissant dans Planchon [19]. Si q, r et s vérifient les conditions (5.2.6) et (5.4.9), nous savons que

$$\sup_j 2^{js} \|\Delta_j w\|_{L^q L^r} < \infty \ ;$$

jusqu'ici l'indice j a été choisi dans $\mathbb{Z}$, mais nous faisons de lui à partir de maintenant un paramètre continu. On voit facilement que

$$\Delta_j w(x,t) = t^{-2} \left(\Delta_{j+\ln_2 t}\psi\right)\left(\frac{x}{t}\right) \ .$$

Ceci entraîne que

$$\|\Delta_j w(\cdot,t)\|_r = t^{-2+6/r} \|\Delta_{j+\ln_2 t}\psi\|_r \ .$$

Or s, r et q sont liés par la relation $-2 + \frac{6}{r} = s - \frac{1}{q}$. En prenant la norme L^q en t de l'égalité ci-dessus pour $j = 0$, on obtient donc

$$\|\Delta_0 w(\cdot,t)\|_{L^q L^r} = \left[\int_{\mathbb{R}^+} \left(t^s \|\Delta_{\ln_2(t)}\psi\|_r\right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \ .$$

Mais cette dernière expression est équivalente à la norme de ψ dans $\dot{B}^s_{r,q}$, voir le chapitre 6. Au total, si $s = \frac{1}{q} + \frac{6}{r} - 2$, et si q et r vérifient (5.2.6), ψ appartient à $\dot{B}^s_{r,q}$.

4. Cette dernière information suffit-elle à affirmer que $w \in L^{6,\infty}$ localement ? Heuristiquement, ceci correspondrait à $s = 0$, $r = 6$; du fait du scaling, ceci entraîne $q = 1$, or c'est une valeur interdite par (5.2.6).
Par contre, on peut choisir $s = 0$, $r = 4$ et $q = 2$; ceci donne $\psi \in \dot{B}^0_{4,2} \hookrightarrow L^4$.
Nous allons maintenant noter $\widetilde{\psi}$ pour la fonction d'une variable réelle telle que

$$\widetilde{\psi}(|x|) \stackrel{\text{déf}}{=} \psi(x) \ .$$

On montre facilement que $\widetilde{\psi}$ vérifie l'équation suivante, déjà utilisée par Kavian et Weissler dans [12], si $r > 0$,

$$(r^2-1)\widetilde{\psi}''(r) + (6r - \frac{5}{r})\widetilde{\psi}'(r) + 6\widetilde{\psi}(r) + \widetilde{\psi}(r)|\widetilde{\psi}(r)| = 0 \ .$$

Nous considérons cette équation au sens des distributions sur $]0, \frac{1}{2}[$.
Nous venons de voir que $r^{5/4}\widetilde{\psi}(r)$ appartient à L^4. Ceci implique que, si $r \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$(r^3 - r)\widetilde{\psi}''(r) + (6r^2 - 5)\widetilde{\psi}'(r) = \frac{g(r)}{r^{3/2}} \ ,$$

avec

$$g(r) = -6r^{5/2}\widetilde{\psi}(r) - r^{5/2}\widetilde{\psi}(r)|\widetilde{\psi}(r)| \quad \in L^2([0,1/2]) \ .$$

Nous procédons maintenant à un changement de variable en posant $z(r) = r^5\widetilde{\psi}'(r)$, et en observant qu'alors

$$(r^3 - r)\widetilde{\psi}''(r) + (6r^2 - 5)\widetilde{\psi}'(r) = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r^4}\left(\sqrt{1-r^2}z(r)\right)' \ .$$

Ceci implique que

$$-\left(\sqrt{1-r^2}z(r)\right)' = r^{5/2}f(r) \ ,$$

avec

$$f(r) = \frac{g(r)}{\sqrt{1-r^2}} \quad \in L^2([0,1/2]) \ .$$

Mais alors $\sqrt{1-r^2}z(r)$ est une fonction continue sur $]0, \frac{1}{2}[$, qui a nécessairement une limite nulle en 0 (si cette limite valait $\theta > 0$, on aurait $\widetilde{\psi}'(r) \stackrel{r\to 0}{\sim} \frac{\theta}{r^5}$, et $r^{5/4}\widetilde{\psi}(r)$ ne pourrait appartenir à L^4). En intégrant l'expression ci-dessus, puis en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient par conséquent

$$\left|\sqrt{1-r^2}z(r)\right| \leq \int_0^r |t^{5/2}f(t)|dt \leq \|f\|_2 \left(\int_0^r t^5 dt\right)^{1/2} \leq Cr^3 \ ,$$

si $r \in]0, \frac{1}{2}[$. Cette dernière estimation nous permet de revenir à $\widetilde{\psi}'$, qui peut se majorer si $r \in]0, \frac{1}{2}[$ par

$$|\widetilde{\psi}'(r)| \leq Cr^{-2} \ ,$$

et il suffit d'intégrer cette inégalité pour voir que

$$|\widetilde{\psi}(r)| \leq Cr^{-1} \ ,$$

autrement dit ψ appartient à $L^{6,\infty}$ dans un voisinage de 0. Ceci conclut la preuve de la proposition. ■

5.4.5 Contrôle de l'énergie et preuve du théorème B

Nous allons, dans ce paragraphe, conclure la preuve du théorème B, en montrant que la solution locale v donnée par le théorème 5.4.2 se prolonge en une solution globale pourvu que w soit bien choisi.

Proposition 5.4.4 *Nous supposons $d = 6$, et nous nous donnons des conditions initiales (w_0, w_1) et (v_0, v_1) telles que*

1. $w_0 = \frac{c}{|x|^2}$, *avec c assez petit*
2. $w_1 = 0$
3. $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$

Alors il existe une solution v globale de (5.4.3) qui vérifie

$$(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1 \times L^2) \ .$$

PREUVE : Le théorème de Shatah et Struwe (théorème 5.2.4 du présent chapitre) correspond à la proposition ci-dessus dans le cas où $w = 0$. Nous allons reprendre le schéma de la preuve de Shatah et Struwe, et montrer que cette preuve est "stable par une perturbation w bien choisie".
Commençons par récapituler les résultats que nous connaissons déja.

- Par la proposition 5.4.3, nous savons que $w(t,x) = \frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$, pour un profil $\psi \in L^{6,\infty}$. En particulier, $\|w\|_{L^\infty([\delta,\infty[,L^{6,\infty})} < \infty$ si $\delta > 0$.
- Par la proposition 5.4.2, nous savons qu'il existe une solution locale v de (5.4.3), telle que $(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}([0,T[, \dot{H}^1 \times L^2)$, pour un $T > 0$. Nous supposons par l'absurde T fini et maximal, et nous allons montrer que v peut en fait se prolonger au-delà de T, ce qui prouvera la proposition.

Restriction à un domaine borné

Le théorème de Shatah et Struwe permet de traiter le cas de données initiales d'énergie finie. Or la donnée initiale que nous considérons est partout localement d'énergie finie, sauf en 0. Par vitesse finie de propagation, la solution u peut exploser seulement si elle se trouve dans le cône d'influence de 0. En particulier, on peut prolonger la solution u sur $[T, T+1] \times (\mathbb{R}^6 \setminus B(0, T+2))$. Il nous suffira donc de prolonger u sur $[T, T+\epsilon] \times B(0, T+2)$ avec $\epsilon > 0$ pour conclure.
Nous notons $\mathcal{B}$ le cône de lumière inverse issu de $\{T\} \times B(0, T+2)$:

$$\mathcal{B} = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^6 \, , \, |x| \leq 2T + 2 - t\}$$

Contrôle de l'énergie totale sur $\mathcal{B}$

Notre but dans ce paragraphe est de montrer que l'énergie de v reste bornée jusqu'à T. Pour ce faire, nous multiplions l'équation vérifiée par v par $\partial_t v$,

$$\partial_t v \, \partial_t^2 v - \partial_t v \, \Delta v + \partial_t v \, v \, |v| + \partial_t v \, ((v+w)\,|v+w| - w\,|w| - v\,|v|) = 0$$

puis nous intégrons l'égalité ci-dessus sur $\mathcal{B}' \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B} \cap ([\frac{T}{2}, \frac{T}{2} + \tau] \times \mathbb{R}^6)$. En toute rigueur, il faudrait d'abord régulariser l'équation, puis utiliser une procédure de passage à la limite. Pour ne pas alourdir la preuve, nous laissons cette étape de côté.

On obtient (voir Shatah et Struwe [27] pour plus de précisions sur la dérivation de l'identité suivante)

$$\widetilde{E}(T/2+\tau) + \text{flux} = \widetilde{E}(T/2) - \int_{\mathcal{B}'} \partial_t v \left((v+w)|v+w| - w|w| - v|v| \right) dx\, dt \ ,$$

où flux est une quantité positive et où on note $\widetilde{E}(v,t)$ pour l'énergie de v sur la section $\mathcal{B}_t \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B} \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^6)$:

$$\widetilde{E}(v,t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathcal{B}_t)} + \frac{1}{2}\|\partial_t v\|^2_{L^2(\mathcal{B}_t)} + \frac{1}{2^*}\|v\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathcal{B}_t)} \ .$$

On a alors

$$\widetilde{E}(v, \frac{T}{2}+\tau) \leq \widetilde{E}(v, \frac{T}{2}) - 2\int_{\mathcal{B}'}\int_0^1 \partial_t v\, v \left(|w+sv| - |sv| \right) ds\, dx\, dt \ . \tag{5.4.10}$$

Nous remarquons maintenant, que, quels que soient les réels a et b, $\left|\, |a+b| - |b| \,\right| \leq |a|$, ce qui implique

$$\| |w+sv|(t,\cdot) - |sv|(t,\cdot) \|_{L^{6,\infty}(\mathcal{B}_t)} \leq \|w(t,\cdot)\|_{L^{6,\infty}(\mathcal{B}_t)} \ .$$

Revenons maintenant à (5.4.10) : l'inégalité ci-dessus, jointe au fait que $L^{6,\infty} \hookrightarrow \mathbf{M}(\dot{H}^1, L^2)$ (du fait de l'injection de Sobolev précisée $\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{3,2}$, voir par exemple Lemarié [15], théorème 2.4.), implique que

$$\widetilde{E}(v, \frac{T}{2}+\tau) \leq \widetilde{E}(v, \frac{T}{2}) + C\tau \|w\|_{L^\infty L^{6,\infty}(\mathcal{B}')} \|v\|_{L^\infty \dot{H}^1(\mathcal{B}')} \|\partial_t v\|_{L^\infty L^2(\mathcal{B}')} \ .$$

Si l'on note $\widetilde{\widetilde{E}}(\tau) = \sup_{s\in[\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+\tau]} \widetilde{E}(s)$, la dernière inégalité entraîne

$$\left(1 - C\tau \|w\|_{L^\infty([\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+\tau], L^{6,\infty})}\right) \widetilde{\widetilde{E}}(v,\tau) \leq \widetilde{\widetilde{E}}(v,0) \ .$$

Si τ est choisi tel que $C\tau\|w\|_{L^\infty L^{6,\infty}(\mathcal{B}')} < \frac{1}{2}$, l'inégalité ci-dessus permet de contrôler $\widetilde{E}(v,t)$ sur $[\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+\tau]$. On peut alors itérer cet argument pour contrôler $\widetilde{E}(v,t)$ sur $[\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+2\tau]$, puis sur $[\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+3\tau]$... En continuant de la sorte jusqu'à ce que $\frac{T}{2}+n\tau \geq T$, on obtient que $\widetilde{E}(v,\cdot)$ est majoré par une constante, que nous notons $\mathcal{E}$, sur $[0,T]$

$$\forall t \in [0,T] \quad , \quad E(v,t) \leq \mathcal{E} \ .$$

Restriction à un cône

Pour plus de simplicité dans les écritures, nous effectuons une translation de $-T$ en temps de tous les éléments du problème : ainsi, à partir de maintenant, nous considérons v solution locale de

$$\begin{cases} \Box v + |v+w|\,(v+w) - |w|\,w = 0 \\ v_{|t=-T} = v_0 \\ \partial_t v_{|t=-T} = v_1 \ . \end{cases} \tag{5.4.11}$$

Nous savons que $(v, \partial_t v) \in \mathcal{C}([-T,0[, \dot{H}^1 \times L^2)$, et il s'agit de prolonger v au-delà de $t=0$; la perturbation w appartient à $L^\infty_{\text{loc}}(]-T, +\infty[, L^{6,\infty})$. En effet, on peut remplacer $L^{6,\infty}_{\text{loc}}$ par $L^{6,\infty}$ car nous nous sommes restreints à un domaine compact.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'énergie de v n'explose pas en $t = 0$; il nous faut maintenant nous assurer qu'elle ne se concentre pas non plus. Pour ce faire, nous allons travailler dans un cone de lumière inverse, de sommet $z_0 = (0, x_0)$.
Quitte à faire une translation en espace, nous nous ramenons au cas où $z_0 = (0, 0)$.
Nous adoptons de plus les notations suivantes.

- Si $s < s' < 0$, $K_s^{s'}$ est la "tranche" du cône de lumière inverse issu de $(0, 0)$ définie par

$$K_s^{s'} \stackrel{\text{déf}}{=} \{(t, x) \in [s, s'] \times \mathbb{R}^d \,,\, |x| \leq |t|\} \,.$$

  En particulier, $K_{-\infty}^0$ est le cône tout entier.
- Si $s < s' < 0$, $M_s^{s'}$ est le "manteau" du cône de lumière inverse donné par

$$M_s^{s'} \stackrel{\text{déf}}{=} \{(t, x) \in [s, s'] \times \mathbb{R}^d \,,\, |x| = |t|\} \,.$$

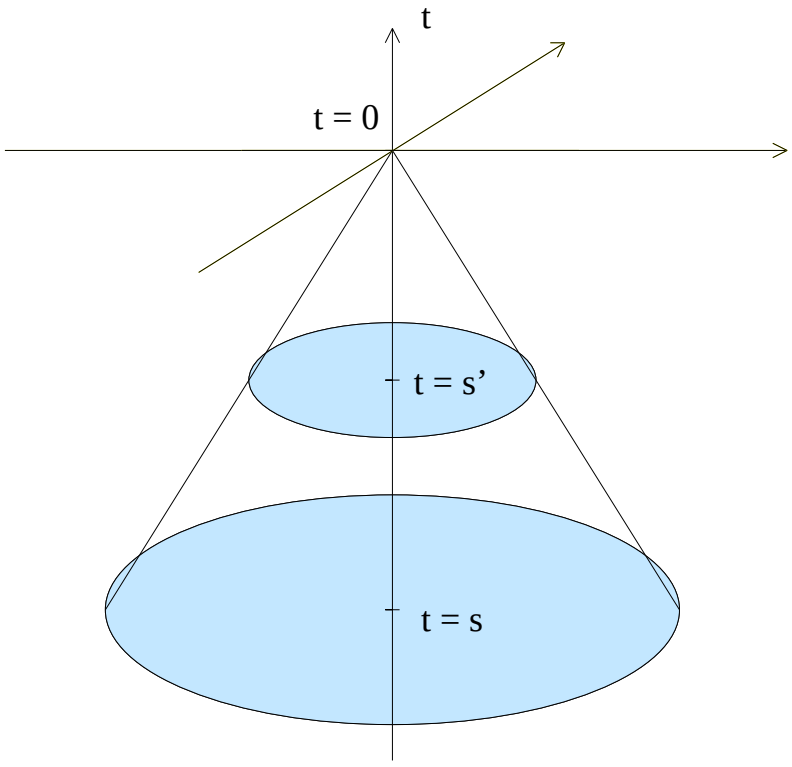

Figure 5.2: Le cône de lumière inverse issu de $(0, 0)$. On a colorié les disques D_s et $D_{s'}$.

- Si $s < 0$, le disque D_s est la section du cône de lumière inverse par l'hyperplan sur lequel le temps est constant et égal à s :

$$D_s \stackrel{\text{déf}}{=} \{(s, x) \,,\, x \in \mathbb{R}^d \,,\, |x| \leq |s|\} \,.$$

- On définit de manière naturelle l'énergie de $u(t, x)$ sur D_s :

$$E(v, s, D_s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\|Dv(t, \cdot)\|^2_{L^2(D_s)} + \frac{1}{2^*}\|v(t, \cdot)\|^{2^*}_{L^{2^*}(D_s)} \,.$$

Le flux sur le manteau du cône tend vers 0

Si $-T < s < s' < 0$, l'identité d'énergie locale sur le cone $K_s^{s'}$ s'obtient en multipliant (5.4.3) par $\partial_t v$, puis en intégrant sur $K_s^{s'}$. Elle s'écrit

$$E(v,s',D_{s'}) + \text{flux}(v,M_s^{s'}) = E(v,s,D_s) + \int_{K_s^{s'}} \partial_t v\, v \int_0^1 (|w+\tau v| - |\tau v|)\, d\tau\, dx\, dt\ ,$$

avec

$$\text{flux}(v,M_s^{s'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_s^{s'}} \left(\frac{|\nabla v - \frac{x}{|x|}\partial_t v|^2}{2} + \frac{1}{p+1}|v|^{p+1} \right) d\sigma\ ,$$

où σ est la mesure de surface sur $M_s^{s'}$.
Nous devrions en toute rigueur procéder par régularisation pour obtenir une telle estimation, voir [26] [27]. Par souci d'alléger la preuve nous ne le faisons pas ici, la procédure étant assez lourde. Jusqu'à la fin de la preuve, nous ignorerons les questions de régularisation. Utilisant comme plus haut que quels que soient les réels a et b, $|\,|a+b| - |b|\,| \le |a|$, on obtient

$$E(v,s',D_{s'}) + \text{flux}(v,M_s^{s'}) \le E(v,s,D_s) + \mathcal{E} \int_s^{s'} \|w(\tau)\|_{L^{6,\infty}}\, d\tau$$

et donc

$$\text{flux}(v,M_s^{s'}) \le \mathcal{E} + \mathcal{E} \int_s^{s'} \|w(\tau)\|_{L^{6,\infty}}\, d\tau\ .$$

Supposons par l'absurde que $\text{flux}(v,M_s^{s'}) \overset{s,s'\to 0}{\not\longrightarrow} 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et une suite (s_n) de $[-\frac{T}{2},0[$ tendant en croissant vers 0 tels que

$$\text{flux}(v,M_{s^n}^{s^{n+1}}) \ge \delta\ .$$

Mais ceci implique que, si $N \in \mathbb{N}$ est assez grand,

$$\text{flux}(v,M_{s_0}^{s^N}) \ge N\delta \ge \mathcal{E} + \mathcal{E} \int_{-T/2}^0 \|w(\tau)\|_{L^{6,\infty}}\, d\tau\ ,$$

ce qui est absurde. Ainsi, si $-T < s < 0$, $\text{flux}(v,M_s^0)$ est bien défini et

$$\text{flux}(v,M_s^0) \overset{s\to 0}{\longrightarrow} 0\ . \tag{5.4.12}$$

La norme $L^\infty L^3$ dans le cône tend vers 0

Si $-T < s < 0$, nous obtenons, grâce à l'identité de Morawetz (voir Shatah et Struwe [27]),

$$\begin{aligned}\int_{D_s} |v|^3\, dx &\le C\left(\text{flux}(v,M_s^0) + |s|^a\, \text{flux}(v,M_s^0)^b\right) \\ &\quad + \frac{C}{|s|}\left| \int_{K_s^0} v \int_0^1 (|w+\tau v| - |\tau v|)\, d\tau \left(t\partial_t v + x\cdot\nabla v + \frac{5}{2} v \right) dx\, dt \right| \\ &\overset{\text{déf}}{=} I(s) + II(s)\ ,\end{aligned}$$

avec a et b des réels positifs. Puisque le flux tend vers 0 (identité (5.4.12)), il est clair que $I(s) \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0$. Pour ce qui est de $II(s)$, nous remarquons que, si $-T < t < 0$,

$$\begin{aligned}
&\|t\,\partial_t v\|_{L^2(D_t)} \le |t|\mathcal{E}^{1/2}\\
&\|x\cdot\nabla v\|_{L^2(D_t)} \le |t|\mathcal{E}^{1/2}\\
&\|v\|_{L^2(D_t)} \le \|1\|_{L^6(D_t)}\|u\|_{L^3(D_t)} \le |t|\mathcal{E}^{1/3}\ ,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder dans la dernière ligne. Les majorations ci-dessus nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
|II(s)| &\le \frac{C}{|s|}\int_s^0 \|v(t)\|_{\dot H^1(D_t)}\|w(t)\|_{L^{6,\infty}}\left\|t\partial_t v + x\cdot\nabla v + \frac{5}{2}v\right\|_{L^2(D_t)} dt\\
&\le \frac{C}{|s|}\int_s^0 \|w(t)\|_{L^{6,\infty}}(\mathcal{E}+\mathcal{E}^{5/6})|t|\,dt \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0\ ,
\end{aligned}$$

puisque $\|w(t)\|_{L^{6,\infty}}$ est borné si $t \ge C > -T$. Au total, nous obtenons le résultat souhaité

$$\int_{D_s} |v|^3\,dx \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0\ . \tag{5.4.13}$$

La norme $L^\mu \dot B^{1/2}_{\mu,2}$ dans le cône est finie

Commençons par remarquer que, si B est une boule de rayon r, et f une fonction définie sur B,

$$\|f\|_{L^{7/2}(B)} \le C(r)\|f\|_{L^{6,\infty}(B)}$$

avec $C(r) \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} 0$. En particulier, comme w est majoré dans $L^\infty L^{6,\infty}$, on a

$$\|w\|_{(L^\infty L^{7/2})(K_s^0)} \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0\ . \tag{5.4.14}$$

D'autre part, il est possible de localiser les estimations de Strichartz données par le théorème 5.2.2 à un cône : voir [25] [26]. On obtient ainsi, pour $-T < s < s' < 0$

$$\begin{aligned}
\|v\|_{(L^\mu \dot B^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})} &\le C\Big(\|v(s,\cdot)\|_{\dot H^1(D_s)} + \|\partial_t v(s,\cdot)\|_{L^2(D_s)}\\
&\qquad + \Big\||v+w|(v+w) - |w|w\Big\|_{(L^\nu \dot B^{1/2}_{\nu,2})(K_s^{s'})}\Big)\\
&\le C\left(\mathcal{E}^{1/2} + \left\|v\int_0^1 |w+\tau v|d\tau\right\|_{(L^\nu \dot B^{1/2}_{\nu,2})(K_s^{s'})}\right)\\
&\le C\left(\mathcal{E}^{1/2} + \|v\|_{(L^\mu \dot B^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}\left[\|v\|_{L^{7/2}(K_s^{s'})} + \|w\|_{L^{7/2}(K_s^{s'})}\right]\right)\ ;
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

nous avons utilisé dans la dernière inégalité le fait que pour des fonctions f et g

$$\|f\,g\|_{(L^\nu \dot B^{1/2}_{\nu,2})(K_s^{s'})} \le C\|f\|_{L^{7/2}(K_s^{s'})}\|g\|_{(L^\mu \dot B^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}\ ,$$

voir Shatah et Struwe [25]. Dans cette même référence, il est aussi montré que, pour une fonction f,

$$\|f\|_{L^{7/2}(K_s^{s'})} \le \|f\|^{\theta}_{(L^\infty L^3)(K_s^{s'})}\|f\|^{1-\theta}_{(L^\mu \dot B^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}\ ,$$

avec $\theta \in]0,1[$. Revenant à (5.4.15), on a

$$\|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})} \leq C\left(\mathcal{E}^{1/2} + \|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}\|w\|_{L^{7/2}(K_s^{s'})} + \|v\|^{2-\theta}_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}\|v\|^{\theta}_{(L^\infty L^3)(K_s^{s'})}\right) . \tag{5.4.16}$$

Grâce à (5.4.14), on peut choisir $s \in]-T,0[$ tel que $C\|w\|_{L^{7/2}(K_s^0)} < \frac{1}{2}$. Si l'on note $G(s')$ pour $\|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^{s'})}$, la majoration ci-dessus donne alors

$$G(s') \leq C\left(\mathcal{E}^{1/2} + G(s')^{2-\theta}\|v\|^{\theta}_{(L^\infty L^3)(K_s^0)}\right) .$$

Le lemme suivant va nous permettre de conclure (pour la preuve, se reporter par exemple à Bahouri et Gérard [1]).

Lemme 5.4.2 *Soit $M(t)$ une fonction continue sur $[0,A]$, avec $A>0$, et telle que*

$$M(t) \leq a + bM(t)^k ,$$

où a et b sont strictement positifs, $k>1$ et

$$a < \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(kb)^{1/(k-1)}} \qquad et \qquad M(0) \leq \frac{1}{(kb)^{1/(k-1)}} . \tag{5.4.17}$$

Alors, pour tout $t \in [0,A]$,

$$M(t) \leq \frac{k}{k-1}a .$$

Or nous savons que

$$\|v\|_{(L^\infty L^3)(K_s^0)} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Nous pouvons donc choisir s tel que, en posant

$$M(s'-s) = G(s') \quad , \quad a = C\mathcal{E}^{1/2} \quad , \quad b = C\|v\|^{\theta}_{(L^\infty L^3)(K_s^0)} \quad \text{et} \quad k = 2-\theta ,$$

les conditions (5.4.17) soient vérifiées. Appliquons alors le lemme précédent qui donne, pour $s' > s$,

$$G(s') \leq C ,$$

c'est à dire

$$\|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^0)} < \infty . \tag{5.4.18}$$

L'énergie dans le cône tend vers 0

Du fait de la formule de Duhamel (5.2.4), v peut s'écrire sous forme intégrale

$$v(t) = \dot{W}(t-s)v(s) + W(t-s)\partial_t v(s) + \int_0^{t-s} W(t-t')v(s+t')\int_0^1 \left|w(s+t') + \tau v(s+t')\right| d\tau\, dt' ,$$

si $-T < s < t < 0$. En notant $f(t)$ pour le dernier terme du membre de droite de l'expression ci-dessus, le théorème 5.2.2 localisé sur le cône K_s^0 permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^\infty \dot{H}^1)(K_s^0)} + \|\partial_t f\|_{(L^\infty L^2)(K_s^0)} &\leq C\left\| v\int_0^1 |w+\tau v|\, d\tau\right\|_{(L^\nu \dot{B}^{1/2}_{\nu,2})(K_s^0)} \\ &\leq C\left(\|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^0)}\|w\|_{L^{7/2}(K_s^0)} + \|v\|^{2-\theta}_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K_s^0)}\|v\|^{\theta}_{(L^\infty L^3)(K_s^0)}\right) ,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient grâce aux mêmes majorations que (5.4.16). Or nous savons par (5.4.18) que $\|v\|_{(L^\mu \dot{B}^{1/2}_{\mu,2})(K^0_s)}$ est borné pour $-T < s < s' < 0$, alors que $\|w\|_{L^{7/2}(K^0_s)}$ et $\|v\|_{(L^\infty L^3)(K^0_s)}$ tendent vers 0 avec s (relations (5.4.14) et (5.4.13)). Par conséquent,

$$\|f\|_{(L^\infty \dot{H}^1)(K^0_s)} + \|\partial_t f\|_{(L^\infty L^2)(K^0_s)} \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

D'autre part, en notant $g(t) = \dot{W}(t-s)v(s) + W(t-s)\partial_t v(s)$, il est clair que, à $s < 0$ fixé,

$$\|g\|_{(L^\infty \dot{H}^1)(K^0_t)} + \|\partial_t g\|_{(L^\infty L^2)(K^0_t)} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Les deux limites ci-dessus impliquent que

$$\|v\|_{(L^\infty \dot{H}^1)(K^0_s)} + \|\partial_t v\|_{(L^\infty L^2)(K^0_s)} \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \ , \tag{5.4.19}$$

c'est à dire que **l'énergie de v ne se concentre pas**. Il est maintenant aisé de conclure.

Conclusion de la preuve de la proposition 5.4.4

Grâce aux deux limites (5.4.13) et (5.4.19), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|v(-\delta,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(0,\delta))} + \|v(-\delta,\cdot)\|_{L^{2^*}(B(0,\delta))} + \|\partial_t v(-\delta,\cdot)\|_{L^2(B(0,\delta))} < \frac{\eta}{2} \ .$$

On peut donc choisir $\epsilon > 0$ tel que

$$\|v(-\delta,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(0,\delta+\epsilon))} + \|v(-\delta,\cdot)\|_{L^{2^*}(B(0,\delta+\epsilon))} + \|\partial_t v(-\delta,\cdot)\|_{L^2(B(0,\delta+\epsilon))} < \frac{3\eta}{4} \ .$$

La preuve de la proposition 5.4.2 montre alors qu'on peut construire une solution de (5.4.3) sur le cône de base $\{-\delta\} \times B(0, \delta+\epsilon)$ et de sommet $(\epsilon, 0)$, donc en particulier sur le cône de base $\{0\} \times B(0,\epsilon)$ et de sommet $(\epsilon, 0)$.
Ce résultat est bien sûr valable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, il existe $\epsilon_x > 0$ tel que l'on peut prolonger v sur le cône de base $\{0\} \times B(x, \epsilon_x)$ et de sommet $(\epsilon_x, 0)$.
Puisque nous nous sommes restreints à un domaine compact, un argument de compacité permet de trouver un nombre fini de boules $B(x, \epsilon_x)$ qui recouvrent ce domaine. On en déduit alors l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que l'on peut prolonger v sur $[0, \epsilon]$. Ceci contredit la définition de T et prouve la partie "existence" du théorème. ■

Preuve de l'unicité

Elle est identique à la preuve de l'unicité dans le théorème A, aussi ne la détaillons-nous pas. Le théorème B est démontré. ■

Bibliographie

[1] H. Bahouri, P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical non linear wave equations*, American Journal of Mathematics **121**, 131-175 (1999)

[2] H. Bahouri, J. Shatah, *Global estimate for the critical semilinear wave equation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non-linéaire, **15**, 783-789 (1998)

[3] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure **14**, 209-246 (1981)

[4] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications **46**, American Mathematical Society, Providence, RI (1999)

[5] C. Calderón, *Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p*, Transactions of the American Mathematical Society **318**, 179-200 (1990)

[6] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, 307-337 (2002)

[7] I. Gallagher, F. Planchon, *On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation*, Revista Matematica Iberoamericana **19**, 161-177 (2003)

[8] J. Ginibre, G. Velo, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, Journal of Functional Analysis **133**, 50-68 (1995)

[9] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation*, Mathematische Zeitschrift **189**, 487-505 (1985)

[10] M. Grillakis, *Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity*, Annals of Mathematics **132**, 485-509 (1990)

[11] K. Jörgens, *Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen*, Mathematische Zeitschrift **77**, 295-308 (1961)

[12] O. Kavian, F. Weissler, *Finite energy self-similar solutions of a non-linear wave equation*, Communications in Partial Differential Equations **15**, 1381-1420 (1990)

[13] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, American Journal of Mathematics **120**, 955-980 (1998)

[14] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations **25**, 1741-1752 (2000)

[15] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall (2003)

[16] H. Lindblad, C. Sogge, *On existence and scattering with minimal regularity for semi-linear wave equations*, Journal of Functional Analysis **130**, 357-426 (1995)

[17] K. Nakanishi, *Scattering theory for the non linear Klein-Gordon equation with Sobolev critical Power*, International Mathematics Research Notices **1999**, 31-60

[18] H. Pecher, *Self-similar and asymptotically self-similar solutions of non-linear wave equations*, Mathematische Annalen **316**, 259-281 (2000)

[19] F. Planchon, *Self-similar solutions and semi-linear wave equations in Besov spaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées IX, Sér. **79**, 809-820 (2000)

[20] F. Planchon, *On uniqueness for semilinear wave equations*, Mathematische Zeitschrift **244**, 587-599 (2003)

[21] J. Rauch, *I. The u^5 Klein-Gordon equation II. Anomalous singularities for semilinear wave equations*, Non-linear partial differential equations and their applications, H. Brézis and J.L. Lions eds, Research notes in Mathematics **53**, 335-364, Pitman (1981)

[22] F. Ribaud, A. Youssfi, *Solutions globales et solutions auto-similaires de l'équation des ondes non-linéaire*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris **329**, Série 1, 33-36 (1999)

[23] F. Ribaud, A. Youssfi, *Global solutions and self-similar solutions of semilinear wave equation*, Mathematische Zeitschrift **239**, 231-262 (2002)

[24] I.E. Segal, *The global Cauchy problem for a relativistic vector field with power interaction*, Bulletin de la Société Mathématique de France **91**, 129-135 (1963)

[25] J. Shatah, M. Struwe, *Regularity results for nonlinear wave equations*, Annals of Mathematics **138**, 503-518 (1993)

[26] J. Shatah, M. Struwe, *Well-posedeness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth*, International Mathematics Research Notices **1994**, 303-309

[27] J. Shatah, M. Struwe, *Geometric wave equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York (2000)

[28] C. Sogge, *Lectures on nonlinear wave equations*, Monographs in Analysis, International Press Incorporated, Boston (1995)

[29] W. Strauss, *Non linear wave equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **73** (1989)

[30] R. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications*, Journal of Functional Analysis **5**, 218-235 (1970)

[31] M. Struwe, *Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa : classe di scienze **IV** Ser. **15**, 495-513 (1988)

[32] M. Struwe, *Uniqueness for critical non-linear wave equations*, Communications in Pure and Applied Mathematics **LII**, 1179-1188 (1999)

[33] T. Tao, *Low regularity semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations **24**, 599-629 (1999)

Chapitre 6

Appendice : théorie de Littlewood-Paley et espaces de Besov

La théorie de Littlewood-Paley des espaces fonctionnels, et plus particulièrement la théorie des espaces de Besov, joue un rôle essentiel tout au long de cette thèse, aussi lui consacrons-nous cet appendice.
Nous rappellerons dans ce qui suit les résultats que nous utilisons dans les quatre chapitres précédents ; nous omettons les preuves, et nous référons pour cela aux ouvrages de Bergh et Löfström [1], Runst et Sickel [5] et Triebel [6].

6.1 Décomposition de Littlewood-Paley et paraproduit

6.1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

L'idée de base de la décomposition de Littlewood-Paley est d'écrire une fonction donnée f comme somme de fonctions élémentaires f_n telles que chaque f_n soit localisée en fréquence sur un anneau dyadique de taille $\sim 2^n$.
Cette décomposition s'avère très bien adaptée à l'étude des espaces fonctionnels classiques (espaces de Lebesgue, Hölder, Sobolev...) comme nous le verrons par la suite.

Soyons maintenant plus précis, et commençons par définir une décomposition de Littlewood-Paley homogène. Il existe une fonction ψ telle que

$$\begin{gathered}\psi \in \mathcal{S} \\ \mathrm{Supp}(\hat{\psi}) \subset \mathcal{C}(0, 3/4, 8/3) \\ \Delta_j \overset{\text{déf}}{=} \hat{\psi}(2^{-j}D) \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j = Id \text{ dans } \mathcal{S}' \text{ modulo les polynômes}\end{gathered}$$

(on note $\mathcal{C}(0, a, b)$ pour $\{x \in \mathbb{R}^d\,,\, a < |x| < b\}$). On peut aussi considérer une décomposition

de Littlewood-Paley non homogène

$$\Phi \in \mathcal{S}$$
$$\mathrm{Supp}(\widehat{\Phi}) \subset B(0, 2/3)$$
$$S_j \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\Phi}(2^{-j}D)$$
$$S_0 + \sum_{j \geq -1} \Delta_j = Id \text{ dans } \mathcal{S}' \ .$$

On a alors, pour $\xi \neq 0$, $\widehat{\phi}(2^{-j}\xi) = \sum_{k \leq j-2} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi)$, c'est à dire

$$S_j f = \sum_{k \leq j-2} \Delta_k f$$

pour toute fonction f dont la transformée de Fourier est nulle sur un voisinage de 0.

6.1.2 L'algorithme du paraproduit

Cet algorithme a été introduit par Bony [2]. Il consiste à écrire le produit ponctuel de deux fonctions f et g sous la forme

$$fg = \sum_j \Delta_j f S_j g + \sum_j S_j f \Delta_j g + \sum_{|j-k| \leq 1} \Delta_j f \Delta_k g$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \Pi(f,g) \quad + \quad \widetilde{\Pi}(f,g) \quad + \quad R(f,g) \ .$$

Alors que dans le produit fg les interactions entre les différentes fréquences de f et de g sont toutes mélangées (puisque $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$), l'algorithme du paraproduit permet de distinguer les différents types d'interaction : $\Pi(f,g)$ rassemble les interactions entre basses fréquences de g et hautes fréquences de f, $\widetilde{\Pi}(f,g)$ celles entre hautes fréquences de f et basses fréquences de g, et $R(f,g)$ celles entre fréquences comparables de f et g.

De plus, chacun des trois termes $\Pi(f,g)$, $\widetilde{\Pi}(f,g)$ et $R(f,g)$ est, en un certain sens, plus facile à manipuler que le procuit standard. Ainsi,

- Chacun des éléments des sommes définissant $\Pi(f,g)$ et $\widetilde{\Pi}(f,g)$ est localisé en fréquence dans un anneau dyadique : on a $\mathrm{supp}(\Delta_j f S_j g) \subset \mathcal{C}(0, A2^j, B2^j)$, pour des constantes $A > 0$, $B > 0$. Ceci est une conséquence directe des propriétés de localisation spectrale des opérateurs Δ_j et S_j.
- Le terme $R(f,g)$ ne présente pas cette propriété de localisation dans des anneaux puisqu'on a seulement $\mathrm{supp}(\Delta_j f \Delta_j g) \subset B(0, C2^j)$. En revanche, ce terme présente l'avantage que chaque gamme de fréquence de f ou de g (c'est à dire chaque $\Delta_j f$ ou $\Delta_j g$) intervient une seule fois dans la somme définissant $R(f,g)$

6.2 Espaces de Besov : définitions

6.2.1 Cas où l'espace de base est un espace de Banach général

Les espaces de Besov doivent en général être définis modulo les polynômes. Nous commençons donc par introduire les distributions modulo les polynômes.

Définition 6.2.1 (Distributions modulo les polynômes) *Notons $\mathcal{S}_\infty$ l'ensemble des fonctions de la classe de Schwartz dont tous les moments sont nuls. Le dual de cet espace, $\mathcal{S}'_\infty$, est l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes.*

Ainsi, la transformée de Fourier d'une distribution de $\mathcal{S}'_\infty$ est définie partout sauf en 0, et on peut lui appliquer les opérateurs Δ_j définis plus haut.

Définition 6.2.2 (Espaces de Besov) *Soit F un espace de Banach de distributions, s un nombre réel, et q un nombre dans l'intervalle $[1,\infty]$. Une distribution f de $\mathcal{S}'_\infty$ appartient à $\dot{B}^s_{F,q}$ si et seulement si*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js}\|\Delta_j f\|_F\right]^q\right)^{1/q} < \infty \ .$$

Qui plus est, l'expression ci-dessus définit une norme qui fait de $\dot{B}^s_{F,q}$ un espace de Banach.

6.2.2 Cas où l'espace de base est un espace de Lebesgue

Si F est l'espace de Lebesgue L^p, $1 \le p \le \infty$, on note $\dot{B}^s_{p,q}$ au lieu de $\dot{B}^s_{L^p,q}$.

Toujours dans le cas où F est un espace de Lebesgue, on peut remplacer la définition 6.2.2 par une version plus maniable.

Définition 6.2.3 (Espaces de Besov sur des espaces de Lebesgue) *Soit $s < \dfrac{d}{p}$, ou $s = \dfrac{d}{p}$ et $q = 1$; on définit alors $\dot{B}^s_{p,q}$ comme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}'$ telles que*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}\right]^q\right)^{1/q} < \infty \ . \tag{6.2.1}$$

et

$$f = \sum_j \Delta_j f \quad \textit{dans} \quad \mathcal{S}' \ . \tag{6.2.2}$$

Cette définition fait de $\dot{B}^s_{p,q}$ muni de la norme (6.2.1) un espace de Banach.

Si pour un entier n on a $s \in [\dfrac{d}{p}+n, \dfrac{d}{p}+n+1)$, ou $s = \frac{d}{p}+n+1$ et $q = 1$, on remplace (6.2.2) par

$$f = \sum_j \Delta_j f \quad \textit{dans } \mathcal{S}' \quad \textit{modulo les polynômes d'ordre au plus } n.$$

Ainsi, si $s < \frac{d}{p}$, ou $s = \frac{d}{p}$ et $q = 1$, $\dot{B}^s_{p,q}$ s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$.
Si $s \in [\frac{d}{p}+n, \frac{d}{p}+n+1)$, ou $s = \frac{d}{p}+n+1$ et $q = 1$, $\dot{B}^s_{p,q}$ s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$ modulo les polynômes d'ordre au plus n.

6.2.3 Définitions équivalentes

Nous allons donner quatre définitions équivalentes des espaces de Besov sur des espaces de Lebesgue dont l'indice de régularité $s \in]0,1[$. Utiliser l'une ou l'autre de ces définitions s'avère d'un grand secours dans les applications.

Nous nous limitons dans la proposition qui suit au cas où $s \in]0,1[$ et où l'espace de base est un espace de Lebesgue puisque cela nous suffit pour traiter les problèmes qui se posent dans le corps de la présente thèse. Cependant, de nombreuses généralisations de la proposition suivante sont possibles.

Avant d'énoncer cette proposition, il nous faut fixer trois notations : pour $s \in [0,1]$, et $p \in [1,\infty[$, on définit l'espace de Banach $\dot{W}^{s,p}$ par

$$\dot{W}^{s,p} \stackrel{\text{déf}}{=} |D|^{-s} L^p \ .$$

D'autre part, dans la définition $\Delta_j = \psi(2^{-j}D)$ donnée dans la section 6.1.1, nous autorisons maintenant j à être un réel quelconque. Enfin, si $h \in \mathbb{R}^d$, on note τ_h pour l'opérateur

$$\tau_h \ : \ f \mapsto f(\cdot + h)$$

Proposition 6.2.1 *Soit $(s,p,q) \in]0,1[\times[1,\infty] \times [1,\infty]$ tels que $s < \frac{d}{p}$. Alors on a les quatre caractérisations suivantes de $\dot{B}^s_{p,q}$.*

- *Si $s_0 < s < s_1$ et $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$,*

$$\dot{B}^s_{p,q} = [\dot{W}^{s_0,p}, \dot{W}^{s_1,p}]_{\theta,q} \ ,$$

  où l'on note, si A et B sont des espaces de Banach, $[A,B]_{\theta,q}$ pour l'espace d'interpolation réelle d'indices θ et q.

- *$\dot{B}^s_{p,q}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'$ telles que $S_j f \stackrel{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js} \|\Delta_j f\|_p \right]^q \right)^{1/q} < \infty \ . \tag{6.2.3}$$

- *$\dot{B}^s_{p,q}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'$ telles que $S_j f \stackrel{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} \left(t^s \|\Delta_{\ln_2(t)} \psi\|_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \ . \tag{6.2.4}$$

- *$\dot{B}^s_{p,q}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{\text{loc}}$ telles que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|\tau_h f - f\|_p^q}{|h|^{sq+d}} \, dh \right)^{1/q} < \infty \ . \tag{6.2.5}$$

De plus, les expressions (6.2.3) (6.2.4) et (6.2.5) sont toutes trois équivalentes à la norme de $\dot{B}^s_{p,q}$.

6.3 Résultats classiques

6.3.1 Densité des fonctions régulières

Il est souvent très utile de disposer d'un résultat de densité des fonction régulières dans un espace de Besov donné.

Proposition 6.3.1 *(i) L'espace $\mathcal{S}_\infty$ est inclus dans $\dot{B}^s_{p,q}$ pour tout triplet $(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1,\infty]^2$. Il est dense si $q < \infty$.*
(ii) L'espace $\mathcal{S}$ est inclus dans $\dot{B}^s_{p,q}$ si et seulement si $s < \frac{d}{p}$ ou $s = \frac{d}{p}$ et $q = \infty$. Si l'inclusion a lieu, elle est dense tant que $q < \infty$.

6.3.2 Dualité

Si B est un espace de Banach, on note $\widetilde{B}$ pour l'adhérence de $\mathcal{S}_\infty$ dans B.

Proposition 6.3.2 *Soit $(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1,\infty]^2$. Le dual de $\widetilde{(\dot{B}^s_{p,q})}$ est $\dot{B}^{-s}_{p',q'}$, où p' et q' sont les exposants conjugués de p et q.*

6.3.3 Injection de Sobolev

La proposition suivante généralise les classiques injections de Sobolev.

Proposition 6.3.3 *Soit $(s,p,q) \in \mathbb{R} \times [1,\infty]^2$. On a alors, si $\widetilde{p} \geq p$ et $\widetilde{q} \geq q$*

$$\dot{B}^s_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s-\frac{d}{p}+\frac{d}{\widetilde{p}}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}} .$$

6.3.4 Sommes de fonctions à support fréquentiel borné

Proposition 6.3.4 *Donnons-nous p et q dans $[1,\infty]$.*

- *Supposons $s > 0$, et soit $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de distributions tempérées telles que, pour tout j, $\operatorname{Supp} \widehat{f_j} \subset B(0, A2^j)$, où A est un réel. Si de plus*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js} \|f_j\|_p \right]^q \right)^{1/q} < \infty ,$$

alors $f = \sum_j f_j \in \dot{B}^s_{p,q}$ et

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq C \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js} \|f_j\|_p \right]^q \right)^{1/q} .$$

- *Supposons $s \in \mathbb{R}$, et soit $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de distributions tempérées telles que, pour tout j, $\operatorname{Supp} \widehat{f_j} \subset \mathcal{C}(0, A2^j, B2^j)$, où A et B sont des réels. Si de plus*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js} \|f_j\|_p \right]^q \right)^{1/q} < \infty ,$$

alors $f = \sum_j f_j \in \dot{B}^s_{p,q}$ *et*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq C \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js} \|f_j\|_p \right]^q \right)^{1/q} .$$

6.3.5 Stabilité des espaces de Besov par composition avec la valeur absolue

Lemme 6.3.1 *Soit* $(s,p,q) \in]0,1[\times[1,\infty] \times [1,\infty]$ *tels que* $s < \frac{d}{p}$. *Alors*

$$\| \, |f| \, \|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq C \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$$

PREUVE : Il suffit d'utiliser la quatrième définition donnée en section 6.2.3, en observant que si $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\| \, \tau_h |f| - |f| \, \|_p \leq C \| \, \tau_h f - f \, \|_p \, .$$

■

6.4 Lien avec des espaces fonctionnels classiques

Un des grands intérêts des espaces de Besov est qu'ils permettent de généraliser dans un cadre unique de nombreux espaces fonctionnels classiques. Nous en donnons quelques exemples ici.

6.4.1 Espaces de Sobolev

Nous nous restreignons aux espaces de Sobolev basés sur L^2 ; les choses sont plus compliquées pour ce qui concerne les espaces de Sobolev basés sur L^p, voir la section 6.4.3. Commençons par rappeler la définition des espaces de Sobolev basés sur L^2.

Définition 6.4.1 *Si* $s \in \mathbb{R}$, *et si* $f \in \mathcal{S}_\infty$, *on note*

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \, .$$

Le complété de $\mathcal{S}_\infty$ *pour* $\| \cdot \|_{\dot{H}^s}$ *est* $\dot{H}^s$.

Les espaces de Sobolev basés sur L^2 s'identifient à des espaces de Besov.

Proposition 6.4.1 *Soit* $s \in \mathbb{R}$. *On a alors*

$$\dot{H}^s = \dot{B}^s_{2,2} \, .$$

Nous en profitons pour rappeler les lois de produits entre espaces de Sobolev ; nous les utilisons à plusieurs reprises dans les chapitres précédents.

Proposition 6.4.2 *Soient* s *et* t *deux nombres réels tels que*

$$s + t > 0 \quad , \quad s < d/2 \quad \textit{and} \quad t < d/2 \, .$$

Alors le produit est une opération continue

$$\dot{H}^s \times \dot{H}^t \longrightarrow H^{s+t-d/2} \, .$$

6.4.2 Espaces de Hölder

Nous nous limitons aux espaces de Hölder C^s, avec $s \in]0,1[$, car le cas s entier est un peu plus compliqué.

Définition 6.4.2 *Soit $s \in]0,1[$. Une fonction continue f appartient à C^s si et seulement si*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} < \infty \ ,$$

et la quantité ci-dessus définit une norme sur C^s qui en fait un espace de Banach.

Les espaces de Hölder s'identifient à des espaces de Besov.

Proposition 6.4.3 *Soit $s \in]0,1[$. On a alors*

$$C^s = \dot{B}^s_{\infty,\infty} \ .$$

PREUVE : Il s'agit simplement de la quatrième définition équivalente donnée en section 6.2.3. ■

6.4.3 Espaces de Lebesgue

Les espaces de Lebesgue L^p ne coïncident pas, si $p \neq 2$, avec des espaces de Besov. Cependant, ils admettent une caractérisation "du type Besov" (en fait, le théorème qui suit permet d'identifier les espaces de Lebesgue et certains espaces de Triebel-Lizorkin).

Théorème 6.4.1 (Littlewood, Paley) *Soit f une distribution tempérée telle que $f = \sum_j \Delta_j f$.*

- *Si $r \in]1,\infty[$,*

$$\|f\|_r \sim \left\| \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right]^{1/2} \right\|_r \ ,$$

  où $\sim$ désigne l'équivalence entre deux normes.

- *En notant $\mathcal{H}^1$ l'espace de Hardy, on a*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} \sim \left\| \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right]^{1/2} \right\|_1 \ .$$

- *Enfin, on peut caractériser BMO par*

$$\|f\|_{BMO} \sim \left\| \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right]^{1/2} \right\|_\infty \ .$$

Plus généralement (voir Coifman-Meyer [4], chapitre II), si $1 < r < \infty$, et si les (f_j) sont des fonctions dont le support en Fourier est compris dans une couronne $A2^j \leq |\xi| \leq B2^j$, avec $0 < A < B$, on a

$$\left\| \sum_j f_j \right\|_r \sim \left\| \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^2 \right]^{1/2} \right\|_r \ .$$

Du théorème ci-dessus on peut déduire "l'encadrement" suivant de L^p par des espaces de Besov.

Proposition 6.4.4 *Soit $p \in]1,\infty[$. On a alors*

$$\dot{B}^0_{p,\min(2,p)} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow \dot{B}^0_{p,\max(2,p)} \ .$$

6.5 Une modification des espaces de Besov adaptée aux EDP d'évolution

Si u est la solution d'une équation d'évolution, c'est une fonction de t (variable de temps) et de x (variable d'espace), et ces deux variables jouent clairement un rôle très différent. Dans un espace de Besov en $y = (t,x)$ classique, on demande autant de régularité en t qu'en x ; or, dans de nombreuses situations, on souhaiterait s'intéresser uniquement à la régularité en x de $u(t,x)$. Une solution est alors de considérer des espaces de Lebesgue en temps à valeurs dans des espaces de Besov en espace. Une autre solution consiste à introduire les espaces $\widetilde{L}^r([0,T],\dot{B}^s_{p,q})$ donnés par la norme suivante :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^r([0,T],\dot{B}^s_{p,q})} = \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^r([0,T],L^p)}\right)^q\right]^{1/q} ,$$

pour $T>0$, $s\in\mathbb{R}$ et $p,q,r\in[1,+\infty]$.
Les espaces $\widetilde{L}^r([0,T],\dot{B}^s_{p,q})$ s'avèrent très utiles pour de nombreux problèmes. Ils ont été introduits par Chemin et Lerner [3].

Les propriétés de ces espaces sont très proches de celles des espaces de Besov standard. En particulier,

- Les injections de Sobolev énoncées plus haut restent vraies : si $(s,p,q,r)\in\mathbb{R}\times[1,\infty]^3$, et si $\widetilde{p}\geq p$ et $\widetilde{q}\geq q$, on a
$$\widetilde{L}^r\dot{B}^s_{p,q} \hookrightarrow \widetilde{L}^r\dot{B}^{s-\frac{d}{p}+\frac{d}{\widetilde{p}}}_{\widetilde{p},\widetilde{q}}$$
(on note $\widetilde{L}^r\dot{B}^s_{p,q}$ pour $\widetilde{L}^r([0,T],\dot{B}^s_{p,q})$ afin d'alléger les notations).

- La proposition sur les sommes de fonctions à support fréquentiel borné (proposition 6.3.4) reste vraie, à condition bien sûr de considérer les transformées de Fourier en x seulement.

- La quatrième définition équivalente donnée en section 6.2.3 devient : $f\in\widetilde{L}^r\dot{B}^s_{p,q}$ si et seulement si $f\in L^1_{\rm loc}$ et
$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|\tau_h f - f\|^q_{L^rL^p}}{|h|^{sq+d}}\,dh\right)^{1/q} < \infty \ ,$$
où l'on note L^rL^p pour $L^r([0,T],L^p)$.

- En conséquence, la propriété de stabilité par composition avec la valeur absolue reste valable : si $0\leq s<1$
$$\|\,|f|\,\|_{\widetilde{L}^r\dot{B}^s_{p,q}} \leq C\|f\|_{\widetilde{L}^r\dot{B}^s_{p,q}} \ .$$

Bibliographie

[1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer Verlag (1976)

[2] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure **14**, 209-246 (1981)

[3] J.-Y. Chemin, N. Lerner, *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, Journal of Differential Equations **121**, 314-328 (1995)

[4] R. R. Coifman, Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque **57**, Société mathématique de France, Paris (1978)

[5] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemystkij operators and nonlinear partial differential equations*, De Gruyter series in non-linear analysis and applications, Berlin (1992)

[6] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhaüser Verlag (1992)

Chapitre 7

Perspectives : solutions auto-similaires et comportement asymptotique

Nous voudrions dans ce chapitre présenter certains développements possibles des travaux de cette thèse, et plus généralement recenser quelques questions qui sont à notre connaissance ouvertes.
Notre discussion s'appliquera bien sûr aux deux EDP d'évolution qui sont l'objet de cette thèse, (NS) et $(NLW)_p$, mais elle reste au moins partiellement valable pour toute une classe d'équations d'évolution, qui possèdent les deux propriétés fondamentales (voir le chapitre 1) : homogénéité et existence d'une énergie. On devrait ainsi pouvoir ajouter à (NS) et $(NLW)_p$ des exemples tels que l'équation de Schrödinger semi-linéaire, ou l'équation de la chaleur semi-linéaire.

7.1 Solutions auto-similaires d'EDP d'évolution

7.1.1 La problématique

Nous appelons solution auto-similaire d'une EDP une solution invariante par le scaling de l'équation. Au moins formellement, une solution est auto-similaire si et seulement si elle est issue de données initiales auto-similaires (pour le scaling propre aux données initiales).
Nous avons vu au cours de cette thèse que l'on ne sait en général prouver l'existence de solutions auto-similaires d'EDP d'évolution que dans le cas de données initiales petites.
Pourquoi ? Nous avons cité dans l'introduction les deux techniques principales de construction de solutions d'EDP, et aucune des deux ne peut s'appliquer à des données initiales auto-similaires et grandes.

- La méthode de compacité basée sur la conservation de l'énergie ne peut donner aucun résultat puisque les solutions auto-similaires sont d'énergie infinie.
- Quant à la méthode de point fixe, elle revient à résoudre une équation du type

$$u = Su_0 + F(u) \ ,$$

en utilisant le théorème de Picard dans un espace critique X. Ceci n'est possible que si $\|Su_0\|_X$ est assez petit. En général, pour traiter le cas de données initiales grandes, on

utilise l'espace X_T, restriction à $t \in [0,T]$ de X, et le fait que

$$\|Su_0\|_{X_T} \overset{T\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Malheureusement, la limite ci-dessus n'est plus vraie dans le cas de données initiales autosimilaires.

Comment faire dès lors pour construire des solutions auto-similaires à données grandes ? Pour $(NS2D)$, on peut utiliser la structure très particulière de l'équation (Cottet [3], Giga, Miyakawa et Osada [9]), mais cette stratégie n'est applicable qu'à certaines données initiales et en aucun cas à d'autres équations.
Nous allons décrire dans la sous-section suivante une approche plus générale.

7.1.2 L'équation de la chaleur non-linéaire

Nous voudrions décrire l'approche suivie par Brézis, Peletier et Terman [2], voir aussi Kamin et Peletier [11]. Ces auteurs considèrent l'équation parabolique suivante

$$u_t - \Delta u + u^p = 0 \qquad \text{pour } (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$$

avec u positif et $1 < p < \dfrac{d+2}{d}$ (nous n'indiquons pas de donnée initiale pour une raison qui va apparaître). Ils démontrent l'existence d'une solution autosimilaire de cette équation,

$$W(x,t) = \frac{1}{t^{1/(p-1)}} f\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) \ ,$$

en observant (c'est un calcul facile) que W est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifie

$$f'' + \left[\frac{d-1}{x} + \frac{x}{2}\right] f' + \frac{1}{p-1} f - f^p = 0 \ . \tag{7.1.1}$$

Ils montrent que, pour tout $A \geq 0$, l'EDO ci-dessus admet une solution telle que

$$x^{2/(p-1)} f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} A \ .$$

Si l'on fait tendre t vers 0 dans la formule donnant W, on voit que la "donnée initiale" correspondant à un tel f serait

$$W(x,0) = \frac{A}{|x|^{2/(p-1)}} \ ,$$

qui n'est pas une distribution. Il n'est en fait pas possible de donner un sens au problème de Cauchy "naturel".

Mais laissons de côté cette question de donnée initiale, pour retenir que la méthode exposée ci-dessus permet de construire des solutions auto-similaires à données grandes.

7.1.3 L'équation des ondes non-linéaire

Pour l'équation des ondes $(NLW)_p$, nous avons rencontré au chapitre 5 l'analogue de (7.1.1) : $u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{2}{p-1}}} f\left(\frac{|x|}{t}\right)$ est solution de $(NLW)_p$ si et seulement si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est solution de

$$(x^2-1)f'' + \left(\frac{2(p+1)}{p-1}x - \frac{d-1}{x}\right) f' + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} f + f|f|^{p-1} = 0 \ ,$$

pour $x \neq 0$, et il faut ajouter une condition en $x = 0$, que nous n'écrivons pas.
Considérons la donnée initiale $u_0(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{p-1}{2}}}$ (nous oublions u_1 pour simplifier). Pour que u soit issue de u_0, il faudrait que $f(y)$ soit équivalent, pour $|y|$ grand, à $\frac{1}{|y|^{\frac{p-1}{2}}}$. Existe-t-il une solution de l'équation ci-dessus ayant un tel comportement à l'infini ? Nous l'ignorons.

7.1.4 L'équation de Navier-Stokes

Supposons que $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ est solution de (NS). Alors $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est solution, sauf en l'origine, de

$$-\Delta f - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} x \cdot \nabla f + f \cdot \nabla f + \nabla q = 0 \ , \tag{7.1.2}$$

pour une certaine fonction scalaire q. De même que pour $(NLW)_p$, on ne sait à notre connaissance pas si, en se prescrivant un certain comportement asymptotique de f correspondant à une donnée initiale autosimilaire, cette équation admet une solution.

Néammoins, il nous faut mentionner deux résultats très voisins de la réponse à cette question.

- Lemarié-Rieusset [13] a pu construire des solutions "faibles d'énergie infinie" issues de données appartenant à L^2_{loc}. Ceci implique en particulier l'existence de solutions issues de données initiales auto-similaires. Cependant, comme on ne sait rien de l'unicité de ces solutions, on ne peut conclure qu'elles sont auto-similaires.

- Des solutions auto-similaires de Navier-Stokes d'un type différent de celui que nous avons étudié jusqu'ici, c'est à dire

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T-t)}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2a(T-t)}}\right) \ ,$$

où f est un profil appartenant à $L^2 \cap \dot{H}^1$, et a et T des réels, ont été considérées par Leray dans son célèbre article [14]. Leray conjecturait que ce type de solution pouvait fournir un exemple de formation de singularité en temps fini pour (NS). La forme ci-dessus pour u implique que f satisfait l'équation

$$-\Delta f + af + ax \cdot \nabla f + f \cdot \nabla f + \nabla q = 0 \ , \tag{7.1.3}$$

où q est une fonction scalaire ; remarquer les changements de signe par rapport à (7.1.2). Une réponse négative à la conjecture de Leray a été apportée soixante ans plus tard par Nečas, Ružička et Šverák [15] : l'équation (7.1.3) n'admet pas de solution dans L^3.

Notons enfin que ce dernier résultat a été généralisé par Iskauriaza, Seregin et Šverák [10].

7.1.5 Limites de l'approche par solutions autosimilaires

Comme nous l'avons vu, l'étude des solutions auto-similaires d'EDP d'évolution fait apparaître, au lieu d'une équation en plusieurs dimensions d'espace et dépendant du temps, un problème elliptique en une ou plusieurs dimensions d'espace, suivant que l'on considère un problème radialement symétrique ou non.
Cette méthode pourrait permettre d'établir l'existence de solutions auto-similaires de norme grande.
Cependant, cette stratégie s'effondre dès que l'on s'attaque à des donnés initiales générales (par exemple, appartenant simplement à ∂BMO pour (NS) ou à $\dot{B}^1_{2,\infty} \times \dot{B}^0_{2,\infty}$ pour $(NLW)_{2^*-1}$). Il semble qu'une nouvelle approche soit alors nécessaire.

7.2 Comportement asymptotique de solutions d'énergie infinie

7.2.1 Un schéma général

En simplifiant beaucoup, on peut résumer les caractéristiques du comportement asymptotique des EDP d'évolution étudiées dans cette thèse (c'est à dire (NS) et $(NLW)_p$ posés dans tout l'espace) de la manière suivante :

- Pour des données initiales d'énergie finie, les interactions non-linéaires tendent à disparaître en temps grand, puique l'énergie tend à se disperser dans tout l'espace. Les solutions ressemblent alors en temps grand à des solutions de l'équation linéaire. Ceci n'est bien sûr plus vrai si l'on se place sur des domaines bornés.
- Par contre, pour des données initiales auto-similaires petites, on obtient une solution auto-similaire, donnée par un certain profil non-linéaire, et les interactions non-linéaires persistent pour tout temps.

Remarque 7.2.1 *Toute les EDP d'évolution ne se comportent pas en temps grand suivant une des deux possibilités qui viennent d'être mentionnées.*
Par exemple, pour le système de Korteweg-de Vries (KdV), la dynamique en temps grand des solutions d'énergie finie fait apparaître des solitons, qui sont des structures non-linéaires persistantes. C'est aussi le cas pour l'équation de Schrödinger non-linéaire L^2-critique.

7.2.2 Le cas de $(NS2D)$

Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce paragraphe au système de Navier-Stokes $(NS2D)$.
Il semble (voir le chapitre 4) que le comportement asymptotique des solutions de $(NS2D)$ soit gouverné par l'équivalence entre les deux points suivants

1. La donnée initiale u_0 est semblable pour les basses fréquences à une donnée auto-similaire w_0, c'est à dire
$$\lambda u_0(\lambda x) \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} w_0(x) \ . \tag{7.2.1}$$
2. La solution u est asymptotiquement (en temps grand) sembable à une solution auto-similaire w, c'est à dire
$$u(t,\cdot) \overset{t\to+\infty}{\sim} w(t,\cdot) \ .$$

Si l'un de ces deux points est vérifié, l'autre aussi, et w est alors naturellement la solution de $(NS2D)$ associée à w_0.
On ne connaît pas de contre exemple à l'équivalence entre ces deux points, mais de nombreuses questions restent ouvertes. Examinons par exemple le cas où u_0 s'écrit $v_0 + w_0$, avec v_0 d'énergie finie et w_0 auto-similaire. Alors on sait que les deux points ci-dessus sont équivalents si

- $w_0 = 0$, voir Wiegner [17].
- v_0 et w_0 sont petits, voir Planchon [16].
- w_0 est égal au tourbillon d'Oseen, voir Gallay-Wayne [8] et Gallagher et Gallay [4] .

(Notons aussi que le théorème B du chapitre 4 permet de traiter le cas où $u_0 \in (\dot{B}^{-1+2/p}_{p,q})_\sigma$, et $\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{q} > 1$.)

Dans les autres cas que ceux énumérés ci-dessus on ne sait pas si les points 1. et 2. sont équivalents. Ainsi, on ignore si cette équivalence est vraie dans les cas suivants

- Si w_0 est petit, et v_0 grand (on sait alors qu'une solution globale existe par le théorème A du chapitre 4).
- Si w_0 est grand et différent du tourbillon d'Oseen (mais on ignore alors si une solution - même locale - existe).

Enfin, on peut se demander ce qui se passe si une donnée initiale u_0 est telle que (7.2.1) n'est vérifié pour aucun w_0. Nous ignorons la réponse.

7.2.3 Le cas de (NS)

L'étude de l'équation de Navier-Stokes en dimension quelconque est beaucoup plus ardue qu'en dimension 2. Pour pouvoir traiter du comportement asymptotique des solutions de (NS), il nous faut disposer de solutions globales.
Dans les cas où ces solutions existent, c'est à dire si u_0 est d'énergie finie ou de norme petite dans un espace au scaling de l'équation, on sait que l'équivalence entre les points 1. et 2. de la section précédente est vérifiée.
Si la norme de u_0 dans un espace au scaling X est grande, on ne sait pas si des solutions globales existent. Néammoins, si elles existent (et si la donnée initiale est dans l'adhérence de la classe de Schwartz dans X), alors l'équivalence entre 1 et 2 est vérifiée, et u tend vers 0 en temps grand dans X : c'est le résultat de Gallagher, Iftimie et Planchon [5], étendu par Auscher, Dubois et Tchamitchian [1].

7.2.4 Le cas de $(NLW)_p$

On sait que pour des données initiales d'énergie finie, les solutions de $(NLW)_p$ diffusent en temps grand (il existe un opérateur de scattering), alors que des données initiales auto-similaires donnent naissance à des solutions auto-similaires ne diffusant pas, voir le chapitre 5.
Pour illustrer le cas $p < 2^* - 1$, considérons le cas $p = 3$, $d = 3$. Alors

- Pour des données initiales dans $\dot{H}^1 \times L^2$, il existe une solution globale qui diffuse en temps grand.

- Pour des données initiales dans $\dot{H}^{3/4} \times \dot{H}^{-1/4}$, il existe une solution globale (Kenig, Ponce, Vega [12] ; Gallagher, Planchon [7]) qui explose a priori en temps grand.

- Enfin, pour des données initiales auto-similaires (petites) appartenant à $\dot{B}^{1/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{-1/2}_{2,\infty}$, il existe une solution globale auto-similaire.

Outre l'existence de solutions globales pour des données initiales dans $\dot{B}^{1/2}_{2,\infty} \times \dot{B}^{-1/2}_{2,\infty}$, plusieurs questions se posent : les solutions de Kenig, Ponce et Vega explosent-elles effectivement ? Si l'on ajoute à des données initiales auto-similaires (petites) des données initiales d'énergie finie (petites), comment la diffusion de l'énergie finie interagit-elle avec la solution auto-similaire ?

Le cas $p = 2^* - 1$ est en un sens plus simple.

- Pour des données initiales dans $\dot{H}^1 \times L^2$, il existe une solution globale qui diffuse en temps grand.

- Pour des données initiales auto-similaires (petites) appartenant à $\dot{B}^{1}_{2,\infty} \times \dot{B}^{0}_{2,\infty}$, il existe une solution globale auto-similaire.

Nous avons (chapitre 5) construit des solutions globales issues de données initiales s'écrivant

$$(u_0, u_1) = (v_0, v_1) + (w_0, w_1) \ ,$$

avec (w_0, w_1) auto-similaire et petit, et (v_0, v_1) d'énergie finie et de taille quelconque. Pour une telle solution globale, on peut encore se demander comment la diffusion de l'énergie finie interagit avec la solution auto-similaire.

Bibliographie

[1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space*, Journal de mathématiques pures et appliquées **83**, 673-697 (2004)

[2] H. Brézis, L. A. Peletier, D. Terman, *A very singular solution of the heat equation with absorption*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **95**, 185-209 (1986)

[3] G.-H. Cottet, *Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris série I Mathématiques **303**, 105-108 (1986)

[4] I. Gallagher, T. Gallay, *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes flow with a measure as initial vorticity*, Mathematische Annalen, à paraître

[5] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, *Non-explosion en temps grand et stabilit de solutions globales des quations de Navier-Stokes* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, Mathématiques, **334** 289-292 (2002)

[6] I. Gallagher, F. Planchon, *On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational and Mechanical Analysis **161**, No.4, 307-337 (2002)

[7] I. Gallagher, F. Planchon, *On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation*, Revista Matematica Iberoamericana **19**, 161-177 (2003)

[8] T. Gallay, E. Wayne, *Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on* $\mathbb{R}^3$, Recent developments in the mathematical theory of water waves (Oberwolfach, 2001), The Royal Society of London. Philosophical transactions. Series A. Mathematics, Physics and Engineering Sciences **360**, no. 1799, 2155-2188 (2002)

[9] Y. Giga, T. Miyakawa, H. Osada, *Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity*, Archives of Rational and Mechanical Analysis **104**, 223-250 (1988)

[10] L. Iskauriaza, G.A. Seregin, V. Šverák, $L^{3,\infty}$*-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Russian Math. Surveys **58**, 211-250 (2003)

[11] S. Kamin, L.A. Peletier, *Large time behavior of solutions of te heat equation with absorption*

[12] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Communications in Partial Differential Equations **25**, 1741-1752 (2000)

[13] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman-Hall, (2003)

[14] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934)

[15] J. Nečas, M. Ružička, V. Šverák, *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations*, Acta Mathematica **176**, 283-294 (1996)

[16] F. Planchon, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Revista Matematica Iberoamericana **14**, 71-93 (1998)

[17] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on* $\mathbb{R}^N$, Journal of the London Mathematical Society **2**, 303-313 (1987)