Cycles évanescents sur des schémas formels

Alena Pirutka
(sous la direction de Joseph Ayoub)

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Éléments de théorie spectrale **2**
- 2.1 Anneaux de Banach . . . 2
- 2.2 Algèbres de Tate . . . 6
- 2.3 Algèbres affinoïdes . . . 8
- 2.4 L'anneau $k^\circ\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle$ . . . 10
- 2.5 Anneaux topologiquement de présentation finie sur k° . . . 11

3 Schémas formels et espaces analytiques associés **13**
- 3.1 Schémas formels, constructions de base . . . 13
- 3.2 Sites . . . 16
- 3.3 Espaces analytiques . . . 17
- 3.4 Application de réduction . . . 21

4 Morphismes étales et quasi-étales **24**
- 4.1 Morphismes étales de schémas formels . . . 24
- 4.2 Morphismes étales d'espaces analytiques . . . 25
- 4.3 Topologie quasi-étale sur un espace analytique . . . 29
- 4.4 Faisceaux moux sur des espaces analytiques . . . 31
- 4.5 Théorème de comparaison . . . 32

5 Foncteur de cycles évanescents **36**
- 5.1 Construction et propriétés basiques . . . 36
- 5.2 Foncteur des cycles évanescents : le cas des schémas . . . 38
- 5.3 Théorème de comparaison pour les cycles évanescents . . . 41

1 Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier le formalisme de cycles evanescents dans le cas des schémas formels. Soient k un corps non-Archimédien et k° l'anneau des entiers de k. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement de présentation finie sur k°. On associe à $\mathfrak{X}$ un espace analytique $\mathfrak{X}_\eta$, sa fibre générique, et un schéma sur le corps résiduel de k, sa fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$. On construit un foncteur de cycles évanescents de la catégorie des faisceaux étales sur $\mathfrak{X}_\eta$ vers la catégorie des faisceaux étales sur $\mathfrak{X}_s$. Si $\mathfrak{X}$ est la completion formelle $\widehat{\mathcal{X}}$ d'un schéma $\mathcal{X}$ de présentation finie sur k° on montre que les faiceaux de cycles évanescents de $\widehat{\mathcal{X}}$ pour un faiseau torsion sont isomorphes aux faiceaux de cycles évanescents de $\mathcal{X}$. En particulier, cela montre que les cycles évanescents de $\mathcal{X}$ ne dépendent que de $\widehat{\mathcal{X}}$.

2 Éléments de théorie spectrale

2.1 Anneaux de Banach

Dans cette section on introduira quelques notions sur les groupes et les anneaux normés et semi-normés.

Définition 2.1.1. Soit G un groupe abélien. Une *semi-norme* sur G est une fonction $\| \; \| : G \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(i) $\| 0\| = 0$,

(ii) $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$ pour tous $a, b \in G$.

Une semi-norme $\| \; \|$ sur un groupe G est dite *non-archimédienne* si

(ii') $\|a-b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ pour tous $a, b \in G$.

Dans ce cas on appelle (ii') l'inégalité non-archimédienne.

Une semi-norme $\| \; \|$ est une *norme* si $\| a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Notons que si $G_1 \subset G$ est un sous-groupe d'un groupe semi-normé G, on peut définir une semi-norme sur G/G_1 en posant $\|a\| = \inf\{\|g\| \mid g \in G, \pi(g) = a\}$, où $\pi : G \to G/G_1$ est la projection canonique. La semi-norme sur G/G_1 ainsi obtenue s'appelle la semi-norme résiduelle.

Définition 2.1.2. Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes semi-normés. On dit qu'il est *borné* s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\phi(f)\| \leq C\|f\|$ pour tout $f \in G$.

Définition 2.1.3. On dit que deux semi-normes $|| \; ||$ et $|| \; ||'$ sur un groupe G sont *équivalentes* s'il existe C, $C' > 0$, tels que $C||a|| \leq ||a||' \leq C'||a||$ pour tout $a \in G$.

Définition 2.1.4. Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes semi-normés. On dit qu'il est *admissible* si la semi-norme résiduelle sur $G/\ker\phi$ est équivalente à la semi-norme sur $\operatorname{Im}\phi$ obtenue par restriction de la semi-norme sur H.

Définition 2.1.5. Soit A un anneau unitaire. Une *semi-norme* sur A est une semi-norme sur le groupe additif de A telle que

(i) $\| 1\| \leq 1$,

(ii) $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ pour tous $a, b \in A$.

Une telle semi-norme est *multiplicative* si $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$ pour tous $a, b \in A$.

Une *valuation* est une norme multiplicative.

Notons que si A est un anneau non nul et si la valuation n'est pas l'application nulle, alors (d'après (ii)) $(i) \Leftrightarrow \| 1\| = 1$.

Exemple 2.1.6. Un anneau de valuation discrète est un anneau normé non-archimédien. En effet, si A est un tel anneau et $v : A \to \mathbb{Z}$ est une valuation sur A, on obtient une norme non-archimédienne sur A en posant $\|a\| = e^{-v(a)}$. Dans la suite, sauf mention du contraire, une valuation signifie une norme multiplicative.

Pour les anneaux semi-normés on a la notion de suite de Cauchy, i.e. on dit qu'une suite $(x_n),\ x_n \in A$ est de Cauchy si $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. On dit qu'un anneau semi-normé est complet si toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet anneau. Dans ce cas, on dira parfois que la semi-norme est complète. De la même manière comme en analyse classique, on peut définir la complétion $\widehat{A}$ de l'anneau normé A, cette complétion existe et est unique à un isomorphisme près.

Définition 2.1.7. Un *anneau de Banach* est un anneau normé, complet pour cette norme.

Définition 2.1.8. Soit A un anneau normé. Un A-module M est dit semi-normé (resp. normé) s'il est muni d'une semi-norme (resp. norme) $\| \ \|$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|am\| \leq C|a|\|m\|$ pour tous $a \in A$, $m \in M$, où $| \ |$ désigne la norme de A.

Définition 2.1.9. Soit A un anneau normé. Soient M, N des A-modules semi-normés. On définit une semi-norme sur $M \otimes_A N$ en posant
$\|f\| = \inf \sum_i \|m_i\|\|n_i\|$, où l'on prend l'inf sur toutes les décompositions $f = \sum m_i \otimes n_i$. La complétion de $M \otimes_A N$ pour cette semi-norme s'appelle le *produit tensoriel completé.* On le note $M \hat{\otimes}_A N$.

Dans la suite on va essentiellement utiliser les anneaux normés suivants.

Définition 2.1.10. Un *corps de valuation* est un corps qui est un anneau de Banach, dont la norme est une valuation.

Définition 2.1.11. Soit K un corps de valuation. On dit que K est *quasi-complet* si la valuation sur K s'étend d'une manière unique sur chaque extension algèbrique finie de K.

Définition 2.1.12. Un corps *non-archimédien* est un corps de valuation, tel que la valuation est non-archimédienne. En d'autres termes, c'est un corps K muni d'une application $\| \ \| : K \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(i) $\| a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
(ii) $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$ pour tous $a, b \in K$
(iii) $\|a + b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ pour tous $a, b \in K$,

et K est complet pour cette norme.

(En fait, la condition (ii) implique que $\| 1\| = 1$ et $\| -a\| = \| a\|$, d'où (iii)$\Leftrightarrow$ $\|a - b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ pour tous $a, b \in K$).

La condition (iii) ci-dessus peut être précisée de la manière suivante :

Proposition 2.1.13. *Soit K un corps non-archimédien. Soient $a, b \in K$ tels que $\|a\| \neq \|b\|$. Alors $\|a + b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$.*

Démonstration. Supposons que $\|b\| < \|a\|$. Si $\|a+b\| < \|a\|$, alors $\|a\| = \|(a+b)-b\| \leq \max\{\|a+b\|, \|b\|\} < \|a\|$, ce qui n'est pas possible. Donc $\|a+b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$. □

Remarque 2.1.14. En général, si A (resp. K) est un anneau (resp. corps) muni d'une valuation $\|\ \|$, on dit que la valuation est *discrète* (cf. 2.1.6), si l'ensemble $\{\|a\|, a \in A\,(a \in K), a \neq 0\}$ est discret dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Notons qu'il existe des corps munis d'une valuation non-Archimédienne non discrète. Par exemple, l'ensemble des séries formelles (qui est un corps) $\{x = a_1 t^{r_1} + \ldots + a_n t^{r_n} + \ldots,\ a_i \in k,\ a_i \neq 0, r_i \in \mathbb{Q}, r_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty, \}$, k est un corps, où l'on définit une valuation par $\|x\| = 0$ si $x = 0$ et $\|x\| = 2^{-r_1}$ sinon (cf.[Mo] I.3.4).

Définition 2.1.15. Soit K un corps non-archimédien. Soit A une K-algèbre. Dans la suite dira qu'une application $\|\ \|:\ A \to\ \mathbb{R}_+$ définit une *norme* sur A si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

(ii) $\|cf\| = \|c\| \cdot \|f\|$ pour tous $c \in K, f \in A$, où $\|c\|$ désigne la norme sur K,

(iii) $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ pour tous $f, g \in A$,

(iv) $\|f+g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$ pour tous $f, g \in A$.

Remarque 2.1.16. Notons que si A est une K-algèbre comme dans la définition ci-dessus, alors $(x_n) \in A$ est de Cauchy ssi $\|x_{n+1} - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Cela découle de l'inégalité non-archimédienne: $\|x_{n+t} - x_n\| \leq \max\{\|x_{n+t-1} - x_n\|, \|x_{n+t} - x_{n+t-1}\|\} \leq \ldots \leq \max\{\|x_{n+1} - x_n\|, \ldots, \|x_{n+t} - x_{n+t-1}\|\}$.

Définition 2.1.17. Soient A un anneau de Banach et $\|\ \|$ sa norme. Une semi-norme $|\ |$ sur A est dite *bornée* s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a| \leq C\|a\|$ pour tout $a \in A$. On note $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble de toutes les semi-normes multiplicatives bornées de A et on l'appelle le *spectre* de A. On munit $\mathcal{M}(A)$ d'une topologie : c'est la topologie la moins fine telle que les applications de la forme $|\ | \mapsto |f|$, $f \in A$ soient continues.

Théorème 2.1.18. *Le spectre $\mathcal{M}(A)$ est un espace séparé compact non vide.*

Démonstration. [Ber1] 1.2.1 □

Définition 2.1.19. Soient $x \in \mathcal{M}(A)$ et $|\ |$ la semi-norme correspondante. Soit $\mathfrak{p}_x$ le noyau de $|\ |$. C'est un idéal premier fermé de A et par l'inégalité (ii) dans 2.1.1, le valeur $|f|$ ne dépend que de la classe de f dans $A/\mathfrak{p}_x$. On peut étendre la valuation ainsi obtenue sur l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}_x$ à son corps de fractions $k(x)$. On note $\mathcal{H}(x)$ la complétion de $k(x)$ pour cette valuation et on note $f(x)$ l'image de $f \in A$ dans $\mathcal{H}(x)$. Le morphisme ainsi obtenu

$$\hat{}: A \to \prod_{x\in\mathcal{M}(A)} \mathcal{H}(x)$$

$$f \mapsto \hat{f} = (f(x))_{x\in\mathcal{M}(A)}$$

s'appelle la *transformation de Gel'fand.*

Définition 2.1.20. Un homomorphisme borné $A \to K$, où K est un corps de valuation s'appelle un *caractère* de A. On dit que deux caractères $\chi' : A \to K'$ et $\chi'' : A \to K''$ sont *équivalents* si'il existe un caractère $\chi : A \to K$ et des inclusions $i' : K' \hookrightarrow K$ et $i'' : K'' \hookrightarrow K$ telles que $i' \circ \chi' = i'' \circ \chi''$.

Remarque 2.1.21. Le spectre $\mathcal{M}(A)$ s'identifie à l'ensemble de classes d'équivalence de caractères sur A. En effet, le point $x \in \mathcal{M}(A)$ donne un caractère $\chi_x \colon A \to \mathcal{H}(x)$ (ou $A \to k(x)$), $f \mapsto f(x)$, si $x \neq y$ alors les caractères χ_x et χ_y ne sont pas équivalents. Inversement, si $\chi \colon A \to K$ est un caractère, alors en le composant avec la valuation sur K on obtient un élément de $\mathcal{M}(A)$.

Posons $\|\hat{f}\| = \max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f(x)|$, où $|f(x)|$ est la valeur en $f(x)$ de la valuation sur $\mathcal{H}(x)$ obtenue par l'extension de la semi-norme correspondante à x.

Soit A un anneau de Banach, soit $f \in A$. On pose $\rho(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|}$. ([Ber1] 1.3).

Théorème 2.1.22. *Pour tout $f \in A$ un élément d'un anneau de Banach A on a : $\rho(f) = \|\hat{f}\|$.*

Démonstration. [Ber1] 1.3.1 □

Soit k un corps non-archimédien. On ne suppose pas que la valuation sur k est non-triviale (la valuation triviale est donné par : $\|a\| = 1$, si $a \neq 0$, $\|0\| = 0$). *L'anneau des entiers* de k est

$$k^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in k \mid \|a\| \le 1\}.$$

Proposition 2.1.23. *(i) k° possède l'unique idéal premier non nul (qui est donc maximal) $k^{\circ\circ} = \{a \in k \mid \|a\| < 1\}$;*

(ii) soit $\mathfrak{p}$ un idéal non nul de k°. Alors il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que soit $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| \le t\}$, soit $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| < t\}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal non nul de k°, soit $a \in \mathfrak{p}$. Soit $b \in k^\circ$ tel que $\|b\| \le \|a\|$. Alors $\|\frac{b}{a}\| < 1$ ($b = a \cdot \frac{b}{a}$, la norme est multiplicative et $\|b\| \le \|a\|$), donc $\frac{b}{a} \in k^\circ$ et $b = a \cdot \frac{b}{a} \in \mathfrak{p}$. Donc $a \in \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p}$ pour chaque $b \in k^\circ$ tel que $\|b\| \le \|a\|$. Donc pour démontrer (ii) il suffit de prendre $t = \sup_{a \in k^\circ} \|a\|$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de k°. Alors il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que soit $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| \le t\}$, soit $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| < t\}$. Si $\mathfrak{p}$ est différent de $k^{\circ\circ}$, alors $t < 1$ et il exite $a \notin \mathfrak{p}$, $a \in k^{\circ\circ}$. Comme $\|a\| < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \in \mathfrak{p}$, ce qui implique $a \in \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p}$ est premier. On obtient ainsi une contradiction, donc k° possède l'unique idéal premier non nul $k^{\circ\circ} = \{a \in k \mid \|a\| < 1\}$. □

On pose $\tilde{k} \stackrel{\text{def}}{=} k^\circ / k^{\circ\circ}$ – le *corps résiduel* de k (si la valuation est triviale, $\tilde{k} = k^\circ = k$ et $k^{\circ\circ} = \{0\}$).

Remarque 2.1.24. Notons que l'anneau k° n'est pas en général noethérien, par exemple, lorsque la valuation n'est pas discrète (cf. 2.1.14).

Dans la suite on va utiliser le résultat suivant :

Théorème 2.1.25. *Une valuation de k admet une unique extension à une clôture algèbrique $\overline{k}$ de k. Cette valuation est complète pour chaque sous-extension finie de $\overline{k}/k$.*

Démonstration. [BGR] 3.2.4/2 □

Si $\| \ \|$ est une valuation sur k, on dénote aussi son prolongement sur $\overline{k}$ par $\| \ \|$.

Dans la suite on va noter par k un corps non-archimédien (sans le préciser).

2.2 Algèbres de Tate

Dans cette section on s'intéresse aux séries à coefficients dans k ou k°.

Lemme 2.2.1. *La série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $a_\nu \in k$ *est convergente ssi* $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$.

Démonstration. Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $a_\nu \in k$ est convergente alors $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$. Donc il suffit de démontrer l'inverse. Comme la valuation est non-archimédienne, on a : $\|\sum_{\nu=i}^{j} a_\nu\| \leq \max_{\nu=i\ldots j} \|a_\nu\|$. Comme $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$, cela montre que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ est de Cauchy et donc convergente car k est complet. □

Maintenant considérons des séries à coefficients dans k. Posons

$$\mathbb{B}^n(\overline{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{k}^n ; \|x_i\| \leq 1\}.$$

Lemme 2.2.2. *La série* $S = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_{\nu_1\ldots\nu_n}\zeta_1^{\nu_1}\ldots\zeta_n^{\nu_n} \in k[[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]]$ *converge dans* $\mathbb{B}^n(\overline{k})$ *ssi* $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$.

Démonstration. Si S est convergente en point $(1, \ldots 1) \in \mathbb{B}^n(\overline{k})$ alors $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$ par 2.2.1. Inversement, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n(\overline{k})$. Alors il existe une sous-extension k' de $\overline{k}/k$ telle que $x_i \in k'$ pour tout $i = 1\ldots n$. Par 2.1.25, k' est complet et donc $S(x)$ est convergente dans $k' \subset \overline{k}$ par 2.2.1 ($\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$ implique $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\|\|x^\nu\| = 0$).

Définition 2.2.3. La sous-algèbre des séries convergentes $T_n \stackrel{\text{def}}{=} k\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle \subset k[[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]]$ s'appelle *l'algèbre de Tate.*

Il est facile de vérifier que T_n est une k-algèbre. On peut la munir de façon naturelle d'une norme.

Proposition 2.2.4. *Soit* $f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu\zeta^\nu \in k\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle$. *L'application* $\|\ \| : T_n \to \mathbb{R}_+$:

$$\|f\| = \max \|c_\nu\|$$

définit une norme sur T_n. *On l'appelle la norme de Gauß.*

Démonstration. Il est facile de voir que $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\|cf\| = \|c\| \cdot \|f\|$ pour $c \in k$ et $\|f + g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$ pour tous $f, g \in T_n$. Pour démontrer que $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$ pour tous $f, g \in T_n$ il suffit de prendre f et g tels que $\|f\| = \|g\| = 1$ (quitte à diviser tous les coefficients de f par un coefficient de norme maximale et de même pour g.)

Notons que $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ vient de l'inégalité non-archimédienne $\|a+b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ pour tous $a, b \in k$. Montrons que $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\| = 1$. Supposons le contraire : $\|fg\| < 1$. Notons que $f, g \in k^\circ\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle$, où $k^\circ\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle$ est la sous-algèbre de T_n formée par les séries à coefficients dans k°.

Comme $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$ pour $h = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu\zeta^\nu \in k^\circ\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle$, la projection canonique $\pi : k^\circ \to \tilde{k} = k^\circ/k^{\circ\circ}$ donne l'épimorphisme $\pi : k^\circ\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle \to \tilde{k}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu\zeta^\nu \mapsto \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} \pi(c_\nu)\zeta^\nu$. En plus, $\pi(h) = 0 \Leftrightarrow \|h\| < 1$. D'où $0 = \pi(fg) = \pi(f)\pi(g) \neq 0$ car $\tilde{k}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ est intègre. On obtient une contradiction et donc $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$. □

Proposition 2.2.5. *T_n muni de la norme de Gauß est complète. C'est donc une algèbre de Banach.*

Démonstration. Soit $\sum_{\imath=0}^{\infty} f_i$, $f_i = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_{i\nu}\zeta^\nu \in T_n$ est de Cauchy. De même comme dans la preuve de 2.2.1, on a $\lim_{i\to\infty} \|f_i\| = 0$. On a donc $\lim_{i\to\infty} \|c_{i\nu}\| = 0$ pour chaque ν. Donc les limites $c_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i\nu}$ existent. Montrons que la série $f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu\zeta^\nu$ est convergente. Par 2.2.2 il suffit de démontrer que $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{i\to\infty} \|f_i\| = 0$ on a $\|c_{i\nu}\| < \varepsilon$ pour tout $i \geq N$ et ε. Comme les séries $f_0, \ldots f_{N-1}$ sont convergentes, les valuations de tous ses coefficients sauf un nombre fini sont plus petites que ε. Comme $c_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i\nu}$, alors $\|c_\nu\| < \varepsilon$ pour tous ν sauf un nombre fini. Donc $\lim_{|\nu|\to\infty} \|c_\nu\| = 0$, $f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu\zeta^\nu$ converge et $f = \sum_{\imath=0}^{\infty} f_i$. □

Proposition 2.2.6. *T_n est un anneau noethérien et factoriel.*

Démonstration. [BGR] 5.2.6/1 □

Proposition 2.2.7. *Soit $\mathfrak{a} \subset T_n$ un idéal. Alors $\mathfrak{a}$ est fermé dans T_n. De plus, il est strictement fermé dans T_n, i.e. pour chaque $f \in T_n$ il existe $a_0 \in \mathfrak{a}$ tel que $\|f - a_0\| = \inf_{a\in\mathfrak{a}} \|f - a\|$.*

Démonstration. [BGR] 5.2.7/2 et 5.2.7/8 □

Les propriétés ci-dessus se démontrent à l'aide de la division de Weierstraß dans T_n ([BGR] 5.2). C'est l'analogue de la division euclidienne dans les anneaux de polynômes.

On peut généraliser la construction ci-dessus de la façon suivante :

Définition 2.2.8. Soient $r_1, \ldots, r_n > 0$. On pose

$$k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \ldots, r_n^{-1}\zeta_n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\zeta^\nu \mid a_\nu \in k,\ \|a_\nu\| r^\nu \to 0 \text{ si } |\nu| \to \infty\},$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, $\zeta^\nu = \zeta_1^{\nu_1} \ldots \zeta_n^{\nu_n}$, $r^\nu = r_1^{\nu_1} \ldots r_n^{\nu_n}$. On note $k\langle r^{-1}\zeta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \ldots, r_n^{-1}\zeta_n\rangle$ pour simplifier les notations.

De même que pour T_n on peut munir $k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ d'une norme en posant $\|f\| = \max_\nu \|a_\nu\| r^\nu$, De plus, $k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ est complète pour cette norme, donc c'est une k-algèbre de Banach. Mais $k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \ldots, r_n^{-1}\zeta_n\rangle$ ne coïncide pas avec l'ensemble des séries convergentes sur un polydisque fermé ([BGR] 6.1.5).

Proposition 2.2.9. *$k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ est un anneau noethérien. Si $\mathfrak{a} \subset k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ un idéal, alors $\mathfrak{a}$ est fermé dans $k\langle r^{-1}\zeta\rangle$.*

Démonstration. [Ber1] 2.1.3 □

Remarque 2.2.10. Par le même procédé, on peut définir l'anneau $A\langle\, r^{-1}\zeta\rangle$ pour A une algèbre de Banach quelconque.

2.3 Algèbres affinoïdes

Dans cette section on s'interesse aux algèbres de la forme $k\langle r_1^{-1}\zeta_1,\dots,r_n^{-1}\zeta_n\rangle/\mathfrak{a}$ (en particulier, $T_n/\mathfrak{a}$) où $\mathfrak{a}\subset k\langle r_1^{-1}\zeta_1,\dots,r_n^{-1}\zeta_n\rangle$ est un idéal.

Si $A=k\langle r^{-1}\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ est une telle k-algèbre, $\pi: k\langle r^{-1}\zeta\rangle\to k\langle r^{-1}\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ est la projection canonique, définissons $\|\ \|: A\to \mathbb{R}_+$:

$$\|\pi(h)\|=\inf_{a\in\mathfrak{a}}\|h-a\|,\ h\in k\langle r^{-1}\zeta\rangle.$$

Proposition 2.3.1. *L'application définie ci-dessus est une norme sur A, telle que A est complète pour $\|\ \|$. Donc c'est une k-algèbre de Banach. De plus, si A est de la forme $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$, alors pour chaque $f\in A$ il existe $\bar f\in k\langle\zeta\rangle$ tel que $\pi(\bar f)=f$ et $\|f\|=\|\bar f\|$.*

Démonstration. Il est facile de voir que $\|\ \|$ définit une norme sur une k-algèbre A (le fait que $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$ pour $f\in A$ découle de 2.2.9). Si A est de la forme $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ est strictement fermé dans $k\langle\zeta\rangle$ (par 2.2.7). Alors pour chaque $f\in A$ il existe $\bar f\in k\langle\zeta\rangle$ tel que $\pi(\bar f)=f$ et $\|f\|=\|\bar f\|$.

Il reste à montrer que A est complète pour $\|\ \|$. Cela découle du fait que $k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ est complet et qu'on peut relever une suite de Cauchy de $A=k\langle r^{-1}\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ en une suite de Cauchy dans $k\langle r^{-1}\zeta\rangle$ car $(x_n)\in A$ est de Cauchy ssi $\|x_{n+1}-x_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ par 2.1.16. □

Définition 2.3.2. Une k-algèbre de Banach A s'appelle une *algèbre k-affinoïde* s'il existe un épimorphisme admissible $k\langle r_1^{-1}\zeta_1,\dots,r_n^{-1}\zeta_n\rangle\twoheadrightarrow A$ pour certains $r_1,\dots,r_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Si l'on peut trouver un épimorphisme admissible $T_n\twoheadrightarrow A$, on dit que A est une algèbre *strictement k-affinoïde*. On dit que A est une k-algèbre affinoïde si c'est une algébre K-affinoïde pour certain corps non-archimedien K sur k. Dans la suite on écrira souvent une "algèbre affinoïde" au lieu d'une "algèbre k-affinoïde".

Notons que l'on peut voir l'algèbre affinoïde $k\langle r_1^{-1}\zeta_1,\dots,r_n^{-1}\zeta_n\rangle/\mathfrak{a}$ comme l'algèbre des fonctions définies sur le lieu des zéros de $\mathfrak{a}$ sur un polydisque fermé de polyrayon $(r_1,\dots,r_n)$.

Définition 2.3.3. Soit A une algèbre k-affinoïde. L'espace $\mathcal{M}(A)$ s'appelle un *espace k-affinoïde*.

Notons que cette définition a un sens car si A une algèbre k-affinoïde, A est une algèbre de Banach. Parfois on dira simplement un "espace affinoïde" pour un "espace k-affinoïde". Un morphisme borné d'algèbres affinoïdes $\phi: A\to B$ induit un morphisme $\phi^*:\mathcal{M}(B)\to\mathcal{M}(A)$ en posant $\phi^*(x)(f)\stackrel{\mathrm{def}}{=}|\phi(f)|$ pour $x\in\mathcal{M}(B)$ où l'on note $|\ |$ la semi-norme correspondante à x.

Pour avoir des propriétés fonctorielles, on considère la catégorie des algèbres affinoïdes comme la catégorie où les objets sont les algèbres affinoïdes et les morphismes sont les homomorphismes bornés.

Remarque 2.3.4. Notons que tout morphisme d'anneaux ϕ entre des algèbres strictement affinoïdes A et B est borné pour n'importe quel choix de normes de Banach. En effet, un tel morphisme est automatiquement continu par [BGR] 6.1.3/1, donc $\|\phi(a)\|<\varepsilon$ si $\|a\|\le\delta$, d'où l'on déduit que $\|\phi(a)\|<\frac{\varepsilon}{\delta}\|a\|$, donc ϕ est borné. Cela n'est pas vrai en général pour les algèbres affinoïdes ([Ber1] 2.1.13). Ce n'est pas vrai non plus que si $\phi: A\to B$ est un homomorphisme d'algèbres affinoïdes tel que chaque caractère sur B induit un caractère sur A, alors ϕ est borné (par [Ber1] 2.1.13 encore).

Proposition 2.3.5. *Soit A une algèbre k-affinoïde. Soit B une A-algèbre finie. Supposons que $A \to B$ est un morphisme injectif. Alors l'application induite $\mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ est surjective et quasi-finie (i.e. ses fibres sont finies).*

Démonstration. [Ber1] 2.1.16 □

Définition 2.3.6. Soit $V \subset X$ un fermé dans un espace affinoïde X. On dit que V est un *domaine affinoïde* de X s'il existe un homomorphisme borné d'algèbres affinoïdes $\phi : A \to A_V$ avec la propriété universelle suivante : pour tout homomorphisme borné d'algèbres affinoïdes $f : A \to B$ tel que l'image de $\mathcal{M}(B)$ est incluse dans V il existe un unique homomorphisme borné $\tilde{f} : A_V \to B$ tel que $f = \tilde{f} \circ \phi$.

Théorème 2.3.7. *Soit V un domaine affinoïde dans un espace affinoïde X. Alors $\mathcal{M}(A_V) \xrightarrow{\sim} V$. En particulier, le morphisme $A \to A_V$ est uniquement déterminé par V.*

Démonstration. [Ber1] 2.2.4 □

Exemple 2.3.8. Donnons quelques exemples fondamentaux de domaines affinoïdes (dans les exemples ci-dessous la propriété universelle découle de [Ber1] 2.1.5).

1. Soit X un espace affinoïde, soient $p, q > 0$. Un sous-espace fermé de X de la forme $X(f) = \{x \in X \mid |f(x)| \leq p\}$ s'appelle un *domaine de Weierstraß* de X. Un sous-espace fermé de la forme $X(f, g^{-1}) = \{x \in X \mid |f(x)| \leq p, \; |g(x)| \geq q\}$ s'appelle un *domaine de Laurent* de X.

   Si $X = \mathcal{M}(A)$ alors un domaine de Laurent est représenté par l'homomorphisme $A \to A\langle p^{-1}f, qg^{-1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} A\langle p^{-1}T, qS\rangle/(T - f, gS - 1)$.
2. Si $\phi : A \to B$ est un morphisme borné d'algèbres affinoïdes, $\phi^* : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ le morphisme induit, V est un domaine affinoïde dans $\mathcal{M}(A)$, alors ${\phi^*}^{-1}(V)$ est un domaine affinoïde dans $\mathcal{M}(B)$, representé par le morphisme $B \to B\hat{\otimes}_A A_V$.
3. Si U, V sont des domaines affinoïdes dans $X = \mathcal{M}(A)$, alors $U \cap V$ est un domaine affinoïde, representée par le morphisme $A \to A_U \hat{\otimes}_A A_V$.
4. Si V est un domaine affinoïde dans l'espace affinoïde U, qui est un domaine affinoïde dans X, alors V est un domaine affinoïde dans X.

Pour construire les espaces analytiques "globaux" on aura besoin du résultat suivant :

Théorème 2.3.9 (Tate). *Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini d'un espace affinoïde $X = \mathcal{M}(A)$ par les domaines affinoïdes $V_i = \mathcal{M}(A_{V_i})$. Soit M un A-module de Banach de type fini. Alors le complexe de Čech*

$$0 \to M \to \prod_i M \otimes_A A_{V_i} \to \prod_{i,j} M \otimes_A A_{V_i \cap V_j} \to \dots$$

est exact.

Démonstration. [Ber1] 2.2.5 □

Définition 2.3.10. Soit $V \subset X$ un fermé dans un espace affinoïde X. On dit que V est un domaine spécial de X si V peut s'écrire comme une union finie de domaines affinoïdes de X.

Soit $X = \mathcal{M}(A)$ un espace affinoïde. On peut le munir d'une structure d'espace annelé comme suit. Pour $U \subset X$ on pose $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varprojlim A_V$, où l'on prend la limite sur tous les domaines spéciaux $V \subset U$ et A_V est une algèbre affinoïde correspondante à V. On définit ainsi un préfaisceau sur X qui est en fait un faisceau par le théorème de Tate 2.3.9. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ la fibre de $\mathcal{O}_X$ en point x.

Remarque 2.3.11. Par [Ber1] 2.3 la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local d'idéal maximal $m_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \,|\, |f(x)| = 0\}$ (si $|f(x)| \neq 0$, f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$). De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3.12. *L'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau Hensélien.*

Démonstration. [Ber2], 2.1.5 □

Dans la suite on va considérer les espaces affinoïdes comme les espaces localement annelés. Maintenant définissons la catégorie des espaces affinoïdes (i.e. définissons les morphismes). Notons que l'application $A \mapsto X = \mathcal{M}(A)$ définit un foncteur de la catégorie des algèbres affinoïdes vers la catégorie des espaces localement annelés. Ce foncteur est fidèle, mais il n'est pas pleinement fidèle par 2.3.4. Pour éviter ce problème on définit morphisme d'espaces affinoïdes $X \to Y$, où $X = \mathcal{M}(A)$, $Y = \mathcal{M}(B)$ comme un morphisme d'espaces localement annelés qui vient d'un morphisme borné $B \to A$. On obtient ainsi une catégorie.

Définition 2.3.13. Si K est une extension de k, alors l'application $A \to A\hat{\otimes}K$ définit un foncteur de la catégorie des espaces k-affinoïdes vers la catégorie des espaces K-affinoïdes. On l'appelle *l'extension du corps de base.*

2.4 L'anneau $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle$

On a déjà introduit l'anneau $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle$ comme la sous-algèbre de T_n formée par des séries à coefficients dans k° (i.e. par les séries s, telles que $\|s\| \leq 1$). On écrira parfois $k^\circ\langle\zeta\rangle$ pour $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle$ (ici $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$).

Dans la suite on va s'intéresser aux quotients de la forme $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal de $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle$. Étudions d'abord quelques propriétes de k° et $k^\circ\langle\zeta_1,\ldots,\zeta_n\rangle$. Pour cela introduisons la notion d'anneau adique.

Définition 2.4.1. *Un anneau topologique* est un anneau muni d'une topologie telle que l'addition et la multiplication sont continues pour cette topologie.

Soit A un anneau, soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. Il existe une unique topologie sur A telle que une base de voisinages de zéro est donnée par $\mathfrak{a}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, $U \subset A$ est ouvert ssi pour chaque $x \in U$ il existe n tel que $x + \mathfrak{a}^n \in U$. La topologie ainsi obtenue s'appelle *la topologie $\mathfrak{a}$-adique.* Notons que les $\mathfrak{a}^n$ sont ouverts et fermés pour cette topologie.

Définition 2.4.2. Un anneau topologique *adique* est un anneau topologique tel qu'il existe un idéal $\mathfrak{a} \subset A$ tel que la topologie sur A coïncide avec la topologie $\mathfrak{a}$-adique. Dans ce cas on appelle $\mathfrak{a}$ *l'idéal de définition.*

On a les mêmes notions pour les modules.

Définition 2.4.3. Soit A un anneau topologique. Un *A-module topologique* M est un A-module muni d'une topologie telle que l'addition et la multiplication $A \times M \to M$ sont continues, où l'on munit $A \times M$ de la topologie produit. Si $\mathfrak{a} \subset A$ est un idéal, alors la topologie $\mathfrak{a}$-adique sur M est une topologie telle que une base de voisinages de zéro dans M est donnée par les $\mathfrak{a}^n M$, $n \in \mathbb{N}$. Une topologie sur M s'appelle *adique* si elle coïncide avec une topologie $\mathfrak{a}$-adique pour un idéal $\mathfrak{a} \subset A$.

Lemme 2.4.4. *Soient A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. Considérons les topologies $\mathfrak{a}$-adiques sur A et sur M. Alors*

(i) A est séparé ssi $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$

(ii) M est séparé ssi $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$

Démonstration. Démontrons (i), (ii) se démontre de la même manière. Soient $x \neq y \in A$. Comme $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$, il existe n tel que $x - y \notin \mathfrak{a}^n$, d'où les voisinages cherchés $x + \mathfrak{a}^n$ et $y + \mathfrak{a}^n$ de x et y respectivement. De la même manière on démontre le sens inverse. □

Si la valuation sur k est non-triviale, on fixe pour la suite un élément non nul $a \in k^{\circ\circ}$. Sinon posons $a = 0$. Considérons la topologie (a)-adique sur k°. D'après 2.1.23 $(a) = \{x \in k^\circ \mid \|x\| \leq \|a\|\}$. On déduit de cette description que pour chaque $b \in k^{\circ\circ}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $m, l \in \mathbb{N}$, tels que $(b)^l \subset (a)^n \subset (b)^m$. Donc la topologie (a)-adique sur k° ne dépend pas du choix de $a \in k^{\circ\circ}$.

Pour avoir une autre description de $k^\circ\langle\zeta\rangle$ rappellons la notion de complétion d'un module topologique.

Définition 2.4.5. Soit A un anneau topologique, soit M un A-module topologique. La *complétion* de M est un A-module topologique M^*, complet et séparé, muni d'un homomorphisme continu $\phi : M \to M^*$ avec la propriété universelle suivante : pour chaque A-module topologique M', complet et séparé, et pour chaque homomorphisme continu d'anneaux topologiques $f : M \to M'$ il existe un unique homomorphisme continu $f^* : M^* \to M'$ tel que $f = f^* \circ \phi$.

Notons que la condition "séparé" assure qu'une limite d'une suite de Cauchy est unique.

Si A est un anneau $\mathfrak{a}$-adique et si M un A-module topologique, muni d'une topologie $\mathfrak{a}$-adique, alors on a la description explicite suivante de complétion $\mathfrak{a}$-adique $\hat{M}$:

Lemme 2.4.6. $\hat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$. *La topologie sur $\hat{M}$ est la plus fine telle que les projections canoniques $\pi_n : \hat{M} \to M/\mathfrak{a}^n M$ sont continues, où l'on munit $M/\mathfrak{a}^n M$ de la topologie discrète. Autrement dit, un sous-espace de $\hat{M}$ est ouvert ssi il est union de certaines fibres de π_n (où l'on varie $n \in \mathbb{N}$). Et donc la base de voisinages de $0 \in \hat{M}$ est donnée par les idéaux* $\ker \pi_n$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. [M] 23.H.3 □

Vu comme k°-module, $k^\circ\langle\zeta\rangle$ possède une topologie (a)-adique, qui est complète (car T_n est complet) et séparé (par 2.4.4). En fait, on peut voir $k^\circ\langle\zeta\rangle$ comme une complétion (a)-adique d'un anneau de polynômes $k^\circ[\zeta]$ (où l'on voit $k^\circ[\zeta]$ comme k°-module et l'on considère la topologie (a)-adique sur $k^\circ[\zeta]$). En effet, soit $\phi : k^\circ[\zeta] \hookrightarrow k^\circ\langle\zeta\rangle$ l'inclusion canonique. Soit M' un k°-module topologique, complet et séparé. Soit $f : k^\circ[\zeta] \to M'$ un homomorphisme continu. Soit $s \in k^\circ\langle\zeta\rangle$. Alors on peut voir s comme la limite d'une suite de Cauchy $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ avec $s_n \in k^\circ[\zeta]$. Comme f est continue, $f(s_n)$ est une suite de Cauchy dans M'. Or M' est complet et séparé, il existe une unique $f^*(s) = \lim_{n\to\infty} f(s_n)$ et l'on obtient ainsi l'application cherchée f^*. Donc $k^\circ\langle\zeta\rangle$ est une complétion (a)-adique de l'anneau $k^\circ[\zeta]$. Par [M] 23.H.3 on a :

Lemme 2.4.7. $k^\circ\langle\zeta\rangle = \varprojlim k^\circ/(a^m)[\zeta]$.

2.5 Anneaux topologiquement de présentation finie sur k°

Dans la suite on va travailler avec les anneaux de la forme $k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a} \subset k^\circ\langle\zeta\rangle$ un idéal. Étudions quelques propriétés d'anneaux de cette forme. Notons d'abord que l'on peut munir

$k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ de la topologie (a)-adique.

Proposition 2.5.1. *Soit $\mathfrak{a} \subset k^\circ\langle\zeta\rangle$ un idéal de type fini. Alors $k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ est complet et séparé pour la topologie (a)-adique.*

Démonstration. C'est une conséquence de [A] 10.13. Plus précisément, posons $A \stackrel{\text{def}}{=} k^\circ\langle\zeta\rangle$. Montrons d'abord que si M est un A-module de type fini, alors $M \to \widehat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$ est surjective. Cela découle du fait, que si l'on a une suite exacte

$$0 \to N \to A^r \to M \to 0,$$

alors, par la construction de $\varprojlim$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & A^r \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{N} \arrow[r] & A^r \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notons que $A^r = \widehat{A^r}$ comme A est complet. La deuxième ligne est exacte, car les applications $N/a^{n+1}N \to N/a^n N$ sont surjectives. D'après [H] 9.1. cela implique que $\varprojlim$ est exacte.

Donc $M \to \widehat{M}$ est surjective.

De plus, si M est de présentation finie, i.e. si N est de type fini, il en découle que $M \to \widehat{M}$ est injective, car dans ce cas $N \to \widehat{N}$ est surjective d'après ce qui précède. Donc si M est de présentation finie, alors $M \to \widehat{M}$ est un isomorphisme. En prennant $M = k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$, on obtient le résultat vu que α est de type fini. □

Définition 2.5.2. Un anneau *topologiquement de présentation finie sur* k° est un anneau de la forme $k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ pour un idéal $\mathfrak{a} \subset k^\circ\langle\zeta\rangle$ de type fini.

Pour la brièveté on écrira dans la suite "anneau de présentation finie" pour un anneau "topologiquement de présentation finie".

Lemme 2.5.3. *Soit A un anneau de présentation finie sur k°. Alors le quotient $A/k^{\circ\circ}A$ est de type fini sur $\tilde{k}$.*

Démonstration. Soit $k^\circ\langle\zeta\rangle \twoheadrightarrow A$ un épimorphisme, alors il induit une surjection $\tilde{k}[\zeta] \twoheadrightarrow A/k^{\circ\circ}A$. Plus précisément, si $A = k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ pour un idéal $\mathfrak{a} \subset k^\circ\langle\zeta\rangle$ de type fini, alors $A/k^{\circ\circ}A = k^\circ\langle\zeta\rangle/(\mathfrak{a} + k^{\circ\circ}\langle\zeta\rangle) \simeq \tilde{k}[\zeta]/\tilde{\mathfrak{a}}$ est de type fini sur $\tilde{k}$. □

3 Schémas formels et espaces analytiques associés

3.1 Schémas formels, constructions de base

Pour définir les schémas formels comme des espaces annelés, introduisons d'abord le procédé de la localisation complète.

Soit A un anneau $\mathfrak{a}$-adique, complet et séparé. Par 2.4.6 $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ et donc le morphisme canonique $A \to \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ est un isomorphisme.

Définition 3.1.1. Soit $f \in A$. La *localisation complète* de A en f est l'anneau $A\langle f^{-1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}]$.

Notons qu'on a une application canonique $A \to A\langle f^{-1}\rangle$. De plus, les applications $A[f^{-1}] \to A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}]$ donnent une application $A[f^{-1}] \to A\langle f^{-1}\rangle$, ce qui montre que l'image de f dans $A\langle f^{-1}\rangle$ est inversible. Ce morphisme canonique $A[f^{-1}] \to A\langle f^{-1}\rangle$ donne la description suivante :

Proposition 3.1.2. *L'anneau $A\langle f^{-1}\rangle$ est la complétion de $A[f^{-1}]$ pour la topologie sur $A[f^{-1}]$ donnée par l'idéal $\mathfrak{a}A[f^{-1}]$. Si $\mathfrak{a}$ est de type fini, alors la topologie sur $A\langle f^{-1}\rangle$ coïncide avec la topologie $\mathfrak{a}A\langle f^{-1}\rangle$-adique.*

Démonstration. Comme $A[f^{-1}]$ est plat sur A, alors $A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \simeq A[f^{-1}]/\mathfrak{a}^n$. Donc $A\langle f^{-1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A[f^{-1}]/\mathfrak{a}^n$ est la complétion $\mathfrak{a}A[f^{-1}]$-adique de $A[f^{-1}]$. Le fait que la topologie sur $A\langle f^{-1}\rangle$ coïncide avec la topologie $\mathfrak{a}A\langle f^{-1}\rangle$-adique si $\mathfrak{a}$ est de type fini découle du lemme ci-dessous. $\square$

Lemme 3.1.3. *Soit B un anneau $\mathfrak{b}$-adique pour certain idéal $\mathfrak{b} \in B$. Si $\mathfrak{b}$ est de type fini, alors $\mathfrak{b}\hat{B}$ est l'adhérence de $\mathfrak{b}$ dans la complétion $\mathfrak{b}$-adique $\hat{B}$ de B. Donc $\hat{B}$ est un anneau adique avec l'idéal de définition $\mathfrak{b}\hat{B}$.*

Démonstration. Par 2.4.6 la base de voisinages de $0 \in \hat{B}$ est donnée par $\ker \pi_n$, où $\pi_n : \hat{B} \to B/\mathfrak{b}^n$.

Montrons que $\ker \pi_n$ est la clôture de $\mathfrak{b}^n$ in $\hat{B}$. En effet, $\mathfrak{b}^n$ est dense dans $\ker \pi_n$: pour chaque $f \in \ker \pi_n$ et pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe $f_m \in \mathfrak{b}^n$ (par exemple, un représentant de $\pi_{n+m}(f) \in B/\mathfrak{b}^{n+m}$) tel que $f - f_m \in \ker \pi_{n+m}$. Comme $\ker \pi_n$ est fermé dans $\hat{B}$ par la définition de la topologie sur $\hat{B}$, c'est une clôture de $\mathfrak{b}^n$ dans $\hat{B}$.

Soit $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_r)$. Notons que $\mathfrak{b}$ est dense dans $\mathfrak{b}\hat{B}$, car $\mathfrak{b}\hat{B} \subset \ker \pi_1$ et $\mathfrak{b}$ est dense dans $\ker \pi_1$. Donc il suffit de démontrer que chaque élément de l'adhérence de $\mathfrak{b}$ appartient à $\mathfrak{b}\hat{B}$. Soit alors $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ avec $f_i \in \mathfrak{b}^i$. On écrit pour chaque i, $f_i = \sum_{j=1}^{r} f_{ij} b_j$ avec $f_{ij} \in \mathfrak{b}^{i-1}$, d'où $f = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{\infty} f_{ij}) b_j$, d'où $f \in \mathfrak{b}\hat{B}$. Donc $\mathfrak{b}\hat{B}$ est l'adherence de $\mathfrak{b}$ dans $\hat{B}$. Comme $\ker \pi_n$ sont les clôtures de $\mathfrak{b}^n$ in $\hat{B}$, $n \in \mathbb{N}$, et la base de voisinages de $0 \in \hat{B}$ est donnée par $\ker \pi_n$, $n \in \mathbb{N}$, donc la topologie sur $\hat{B}$ coïncide avec la topologie $\mathfrak{b}\hat{B}$-adique. $\square$

Pour avoir une autre description de $A\langle f^{-1}\rangle$ considérons l'anneau $A\langle t\rangle = \{\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \mid \lim c_i = 0\}$ où t est une variable. De même que dans 2.2.5 et 2.4, on peut démontrer que $A\langle t\rangle$ est complet et séparé pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique et que $A\langle t\rangle = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[t]$. Il existe donc un homomorphisme canonique $A\langle t\rangle \to A\langle f^{-1}\rangle$ qui envoie t en f^{-1}.

Lemme 3.1.4. *L'homomorphisme $A\langle t\rangle \to A\langle f^{-1}\rangle$ induit l'isomorphisme $A\langle t\rangle/(1 - ft) \simeq A\langle f^{-1}\rangle$.*

Démonstration. Considérons les suites exactes suivantes :

$$0 \to (1-ft)A/\mathfrak{a}^n[t] \to A/\mathfrak{a}^n[t] \to A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \to 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\varprojlim$ est exacte à gauche, cela donne une suite exacte à gauche :

$$0 \to \varprojlim(1-ft)A/\mathfrak{a}^n[t] \to \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[t] \to \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \to 0,$$

qui est en fait exacte comme les applications
$(1-ft)A/\mathfrak{a}^{n+1}[t] \to (1-ft)A/\mathfrak{a}^n[t]$ sont surjectives ([H] 9.1). Comme $(1-ft)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $A/\mathfrak{a}^n[t]$, cela donne une suite exacte :

$$0 \to (1-ft)A\langle t\rangle \to A\langle t\rangle \to A\langle f^{-1}\rangle \to 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Maintenant nous sommes prêts pour définir les schémas formels affines. Ce sont certains espaces annelés où tous les anneaux que l'on considère sont des anneaux topologiques. Soit A un tel anneau, complet et séparé, avec $\mathfrak{a}$ l'idéal de définition. On suppose ici que $\mathfrak{a}$ est de type fini. Notons

$$\mathrm{Spf}A = \{\text{idéaux premiers ouverts de } A.\}$$

Soit $\mathfrak{p} \in A$ un idéal premier. Comme $\mathfrak{p}$ est ouvert ssi il existe n tel que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}^n \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, alors Spf$A$ coïncide ensemblistement avec Spec$A/\mathfrak{a}$. La topologie de Zariski sur Spec$A/\mathfrak{a}$ induit donc la topologie sur Spf$A$. Comme d'habitude, on note $D(f)$ le sous-ensemble de Spf$A$ où f ne s'annule pas. Introduisons le faisceau structurel $\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}$ sur Spf$A$. Comme les espaces $D(f)$ forment une base d'ouverts sur Spf$A$, il suffit de définir $\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}(D(f))$ pour tout $f \in A$. Posons

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}(D(f)) \overset{\mathrm{def}}{=} A\langle f^{-1}\rangle = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}].$$

Cela définit un préfaisceau sur la catégorie des ensembles de la forme $D(f) \subset \mathrm{Spf}A$, qui est en fait un faisceau car pour tout recouvrement $(D(f_i))_i$ de $D(f)$ la suite

$$A\langle f^{-1}\rangle \to \prod_i A\langle f_i^{-1}\rangle \rightrightarrows \prod_{i,j} A\langle (f_i f_j)^{-1}\rangle$$

est exacte comme la limite projective des suites exactes

$$A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \to \prod_i A/\mathfrak{a}^n[f_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{i,j} A/\mathfrak{a}^n[(f_i f_j)^{-1}]$$

(vu que limite projective est exacte à gauche).

Pour $x \in \mathrm{Spf}A$ on a : $\mathcal{O}_x = \varinjlim_{x \in D(f)} A\langle f^{-1}\rangle$ est la fibre en point x. Comme dans le cas classique, on voit que c'est un anneau local ([EGAI] 1.10.1.6).

Définition 3.1.5. Soit A un anneau adique d'idéal de définition $\mathfrak{a}$. Posons $X = \mathrm{Spf}A$ et $\mathcal{O}_X$ le faisceau d'anneaux topologiques construit ci-dessus. L'espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ s'appelle un *schéma formel affine*. On le note par Spf$A$ aussi.

Notons que comme on a supposé que $\mathfrak{a}$ est de type fini, alors par 3.1.2 on a que $A\langle f^{-1}\rangle$, $f \in A$ est encore un anneau $\mathfrak{a}$-adique. On voit aussi que l'on peut voir Spf$A\langle f^{-1}\rangle$ comme l'ensemble des idéaux prémiers ouverts de A ne contenant pas f. On peut dire donc que pour un schéma formel affine $X = \mathrm{Spf}A$ et $U = D(f) \subset \mathrm{Spf}A$ un ouvert, l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est isomorphe au schéma formel affine Spf$A\langle f^{-1}\rangle$.

Les morphismes des schémas formels affines $\mathrm{Spf}A \to \mathrm{Spf}B$ sont les morphismes d'espaces localement topologiquement annelés. Comme dans le cas de schémas, ils correspondant bijectivement aux morphismes continues d'anneaux $B \to A$.

Définition 3.1.6. Un *schéma formel* est un espace localement topologiquement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que chaque point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est isomorphe à un schéma formel affine.

Remarque 3.1.7. Comme dans le cas des schémas on a les notions d'immersions fermées et de schémas séparés pour les schémas formels. Comme dans le cas classique tout sous-schéma fermé d'un schéma formel affine $X = \mathrm{Spf}A$ est donné par $\mathrm{Spf}A/I \to \mathrm{Spf}A$. De même, cela donne que si X est séparé, alors l'intersection de deux ouverts affines de X est affine. ([EGAI] 1.10.14)

Dans la suite on travaillera avec des schémas formels de la forme suivante :

Définition 3.1.8. Un schéma formel $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit *localement de présentation finie* sur k° si
(i) X est locallement isomorphe à $\mathrm{Spf}A$ où A est un anneau de présentation finie sur k° ;
(ii) les familles des composantes irréductibles de schémas $\mathrm{Spf}A$ de (i) forment un recouvrement localement fini.
On note k°-$Fsch$ la catégorie des schémas formels localement de présentation finie sur k°.

Cette définition est correcte par 2.5.1 (on a le droit de considérer un schéma formel $\mathrm{Spf}A$ où A est un anneau de présentation finie sur k°) et par 3.1.4 (si A est un anneau de présentation finie sur k°, alors sa localisation compléte en un élément $f \in A$ l'est aussi).

Définition 3.1.9. Un schéma formel localement de présentation finie sur k° est dit *de présentation finie* s'il peut s'écrire comme l'union finie de sous-schémas formels ouverts affines de forme $\mathrm{Spf}A$ où A est un anneau de présentation finie sur k°.

Notons que si la valuation sur k est triviale, alors k°-$Fsch$ coïncide avec la catégorie des schémas localement de type fini sur k.

Dans la suite on va utiliser les lettres $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ etc. pour des schéma formels de k°-$Fsch$.

Proposition 3.1.10. *Soit $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}) \in k^\circ$-$Fsch$. Alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/k^{\circ\circ}\mathcal{O}_\mathfrak{X})$ est un schéma localement de type fini sur $\tilde{k}$. On le note $\mathfrak{X}_s$ et on l'appelle la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. Si $U = \mathrm{Spf}A$ est un ouvert de $\mathfrak{X}$, alors $\mathcal{O}_\mathfrak{X}(U)/k^{\circ\circ}\mathcal{O}_\mathfrak{X}(U) = A/k^{\circ\circ}A$ est de type fini sur $\tilde{k}$ par 2.5.3. Plus précisément, si $A = k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$, alors $A/k^{\circ\circ}A = \tilde{k}[\zeta]/\tilde{\mathfrak{a}}$, où $\tilde{\mathfrak{a}}$ est l'image de $\mathfrak{a}$ dans $\tilde{k}[\zeta]$.

Pour conclure il faut démontrer que $(U, (\mathcal{O}_\mathfrak{X}/k^{\circ\circ}\mathcal{O}_\mathfrak{X})|_U)$ est isomorphe au schéma de type fini sur $\tilde{k}$ $\mathrm{Spec}A/k^{\circ\circ}A$. Pour faire cela il suffit de montrer que pour chaque ouvert $D(f) \subset U$ on a $\mathcal{O}_\mathfrak{X}(D(f))/k^{\circ\circ}\mathcal{O}_\mathfrak{X}(D(f)) \simeq A/k^{\circ\circ}A[f^{-1}]$.

Par 3.1.4 $\mathcal{O}_\mathfrak{X}(D(f)) \simeq A\langle t\rangle/(1-ft) \simeq k^\circ\langle\zeta, t\rangle/(\mathfrak{a}, 1-ft)$, où l'on écrit encore f pour une préimage de f dans $k^\circ\langle\zeta\rangle$. Donc $\mathcal{O}_\mathfrak{X}(D(f))/k^{\circ\circ}\mathcal{O}_\mathfrak{X}(D(f)) \simeq[\text{par } 2.5.3]\simeq \tilde{k}[\zeta, t]/(\tilde{\mathfrak{a}}, 1-\tilde{f}\tilde{t}) \simeq A/k^{\circ\circ}A[f^{-1}]$. Ce qu'il a fallait démontrer. □

Remarque 3.1.11. Tout ouvert d'un schéma formel $\mathrm{Spf}A$ est l'union finie de schémas formels affines de la forme $\mathrm{Spf}A\langle f^{-1}\rangle$, $f \in A$ (cela découle du fait que $\mathrm{Spf}A$ est un espace topologique noethérien, ce qui se démontre de la même manière comme pour les schémas).

Proposition 3.1.12. $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$ *définit un foncteur.*

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'un morphisme $\phi\colon \mathrm{Spf}B \to \mathrm{Spf}A$ induit un morphisme $\mathrm{Spec}B/k^{\circ\circ}B \to \mathrm{Spec}A/k^{\circ\circ}A$. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme continue d'anneaux correspondant. Soit $x \in k^{\circ\circ}A$, alors $\|x\| < 1$ (par 2.3.1 par example), et donc $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, donc $\varphi(x) \in k^{\circ\circ}B$ (sinon $\|\varphi(x)\| = 1$ par 2.3.1 et $(\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}} \nrightarrow 0$). Donc $\varphi(k^{\circ\circ}A) \subset k^{\circ\circ}B$. Donc le morphisme $\varphi\colon A \to B$ induit le morphisme $A/k^{\circ\circ}A \to B/k^{\circ\circ}B$, donc il induit le morphisme

$\mathrm{Spec} B/k^{\circ\circ}B \to \mathrm{Spec} A/k^{\circ\circ}A$. Donc $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$ est un foncteur. □

3.2 Sites

Définition 3.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *topologie de Grothendieck* sur $\mathcal{C}$ est la donnée pour chaque objet $U \in Ob\,\mathcal{C}$ d'un ensemble de familles de morphismes $(U_i \to U)_{i\in I}$ qu'on appelle les *recouvrements* de U tels que

(i) pour tout recouvrement $(U_i \to U)_{i\in I}$ et tout morphisme $V \to U$ les produits fibrés $U_i \times_U V$ existent et $(U_i \times_U V \to V)_{i\in I}$ est un recouvrement de V ;

(ii) si $(U_i \to U)_{i\in I}$ est un recouvrement de U et si pour tout i on se donne un recouvrement de U_i : $(V_{ij} \to U_i)_{j\in J_i}$, alors la famille $(V_{ij} \to U)_{i,j}$ est un recouvrement de U (où le morphisme $V_{ij} \to U$ est défini par la composition) ;

(iii) pour tout $U \in \mathcal{C}$ la famille $(U \xrightarrow{id} U)$ est un recouvrement de U.

La catégorie $\mathcal{C}$ avec la topologie de Grothendieck s'appelle un *site*. Si T est un site, on note $\mathrm{Cat}\,T$ la catégorie correspondante.

Exemple 3.2.2. Soit X un schéma. Considérons la catégorie $\acute{E}t(X)$ des morphismes étales $U \to X$. Le recouvrement d'un tel morphisme est une famille $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i\in I}$ telle que $U = \bigcup_i f_i(U_i)$. On note le site ainsi obtenu $X_{\acute{e}t}$ et l'appelle le *site étale* de X.

Définition 3.2.3. Soient T_1, T_2 deux sites. *Une application continue* (un morphisme de sites) $T_1 \to T_2$ est un foncteur $\mathrm{Cat}\,T_2 \to \mathrm{Cat}\,T_1$ qui envoie les recouvrements sur des recouvrements.

Définition 3.2.4. Un *préfaisceau* d'ensembles (de groupes abéliens etc.) sur le site T est un foncteur contravariant $\mathcal{F} \colon \mathrm{Cat}\,T \to Sets$ (un foncteur $\mathrm{Cat}\,T \to Ab$ etc.). On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau* si la suite

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

est exacte pour tout recouvrement $(U_i \to U)_{i\in I}$.

Un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs. Un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux.

Si T est un site, on note $T^{\sim}$ la catégorie des faisceaux d'ensembles sur T et $S(T)$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur T.

Dans la suite on va souvent considérer les faisceaux de la forme suivante.

Définition 3.2.5. Soit T est un site. Soit $F \in S(T)$. On dit que F est un faisceau *torsion* si pour chaque $U \in \mathrm{Cat}\,T$ le groupe $F(U)$ est un groupe de torsion, i.e. chaque élément de $F(U)$ est d'ordre fini.

Soient T_1, T_2 deux sites. Soit $\phi : T_1 \to T_2$ un morphisme de sites, soit $\phi^t : \mathrm{Cat}\,T_2 \to \mathrm{Cat}\,T_1$ le foncteur correspondant. Sous certaines bonnes hypothèses (comme l'existence des limites inductives et projecttives etc., [Ka]), pour un tel morphisme ϕ on peut définir le foncteur *d'image directe* $\phi_* : T_1^{\sim} \to T_2^{\sim}$, $F \mapsto \phi_* F$, en posant $\phi_* F(U) = F(\phi^t(U))$.

On définit aussi le foncteur *d'image inverse* $\phi^* : T_2^{\sim} \to T_1^{\sim}$, $F \mapsto \phi^* F$, en posant $\phi^* F$ un faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto \phi^p(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim(F(U))$ où l'on prend la limite sur tous $V \to \phi^t(U)$. Cette définition est correcte et ϕ^* est l'adjoint à gauche de ϕ_* ([Ka]).

Remarque 3.2.6. (i) Dans la suite on considera les cohomologies des faisceaux sur T. On considera les sites T tels que la catégorie $T^{\sim}$ admet assez d'injectives (cf. [Mi] III.1.1).

(ii) On dira qu'un faisceau F sur un site T est *flasque* si $H^q(U, F) = 0$ pour tout $U \in Ob(\mathrm{Cat}\, T)$ et tout $q \geq 1$.

(iii) Il en découle de [SGA4] V.4.1 qu'un faisceau F sur un site T est flasque ssi les cohomologies de Čech $\check{H}^q(\mathcal{U}, F)$ s'annulent pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de tout objet U de $\mathrm{Cat}\, T$ et pour tout $q \geq 1$.

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant :

Théorème 3.2.7. *Soit $X = \mathrm{Spec} K$ où K est un corps. Soit K^s la clôture séparable de K (i.e. la plus grande extension séparable de K contenue dans une clôture algébrique de K). Alors la catégorie ${X_{ét}}^{\sim}$ est équivalente à la catégorie des G_K-modules discrets, où $G_K = \mathrm{Gal}(K^s/K)$. (si un groupe G agit sur l'ensemble A on dit que A est G-dicret si l'application $G \times A \to A$ est continu où l'on muni A de la topologie discrète.)*

Démonstration. [Mi] II.1.9 □

3.3 Espaces analytiques

Dans cette section on va introduire quelques contructions de [Ber2]. On suppose que tous les espaces topologiques compacts, localement compacts et paracompacts sont séparé (un espace topologique séparé est dit paracompact si tout recouvrement ouvert de cet espace admet un sous-recouvrement localement fini).

Définition 3.3.1. Soit X un espace topologique. Soit τ une classe de sous-ensembles de X (on les munit de la topologie induite de celle de X). On dit que τ est un *quasi-réseau* si pour tout $x \in X$ il existe $V_1, \ldots, V_n \in \tau$ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de x. On dit qu'un quasi-réseau τ est un *réseau* sur X si pour tous $U, V \in \tau$ la restriction $\tau|_{U \cap V}$ est un quasi-réseau sur $U \cap V$.

Remarque 3.3.2. Par le voisinage d'un point $x \in X$ on entend une partie de l'espace topologique, contenant une boule ouverte de centre x. Si $Y \subset X$ une partie de X on note $\tau|_Y = \{V \in \tau | V \subset Y\}$.

Définition 3.3.3. Soit X un espace topologique localement séparé, soit τ un réseau de sous-ensembles compacts sur X. Un *atlas k-affinoïde* $\mathcal{A}$ sur X est une application qui associe à tout $V \in \tau$ une algèbre k-affinoïde A_V et un homeomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_V)$, et pour tous $U, V \in \tau$ tels que $U \subset V$ un homomorphisme borné d'algèbres k-affinoïdes $\alpha_{V/U} : A_V \to A_U$ qui identifie (U, A_U) avec un domaine affinoïde dans V. Un triplet $(X, \mathcal{A}, \tau)$ ainsi défini est dit un *espace k-analytique.*

Par exemple, le triplet $(X, A, \{X\})$, où $X = \mathcal{M}(A)$, A est une algèbre affinoïde, est un espace analytique. Dans la suite on va le noter $\mathcal{M}(A)$ simplement.

Remarque 3.3.4. D'après [Ber2] 1.2.4(iii) une base de la topologie d'un espace analytique est formée par des ouverts locallement compacts et paracompacts.

Pour définir les morphismes entre les espaces k-analytiques nous avons besoin de quelques constructions supplémentaires.

Définition 3.3.5. Un morphisme fort entre les espaces k-analytiques $\phi\colon (X, \mathcal{A}, \tau) \to (X', \mathcal{A}', \tau')$ est la donnée :

(i) d'un morphisme continue $\varphi : X \to X'$ tel que pour tout $V \in \tau$ il existe $V' \in \tau'$ tel que $\varphi(V) \subset V'$

(ii) d'un système de morphismes compatibles d'espaces affinoïdes $\varphi_{V/V'} : (V, A_V) \to (V', A_{V'})$ pour toute paire $V \in \tau$ et $V' \in \tau'$ telle que $\varphi(V) \subset V'$.

On dit qu'un tel morphisme est un *quasi-isomorphisme* si φ induit un homeomorphisme entre X et X' et pour toute paire $V \in \tau$ et $V' \in \tau'$, $\varphi(V) \subset V'$, $\varphi_{V/V'}$ identifie V avec un domaine affinoïde dans V'.

On définit la catégorie k-$\widetilde{An}$, où les morphismes sont les morphismes forts (la composition est bien définie par [Ber2] 1.2). La catégorie k-An d'espaces k-analytiques est définie comme la localisation de k-$\widetilde{An}$ par les quasi-isomorphismes (le système de quasi-isomorphismes dans k-$\widetilde{An}$ admet un calcul de fractions par [Ber2] 1.2.10).

Proposition 3.3.6. *La catégorie k-An admet des produits fibrés.*

Démonstration. [Ber2] 1.4.1 □

On définit les domaines affinoïdes d'un espace analytique comme suit. Soit $(X, \mathcal{A}, \tau)$ un espace analytique. On dit qu'un sous-ensemble $W \subset X$ est *τ-spécial* s'il est compact et il existe un recouvrement $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ tel que $W_i, W_i \cap W_j \in \tau$ et $A_{W_i} \hat{\otimes} A_{W_j} \to A_{W_i \cap W_j}$ est un épimorphisme admissible. On appelle un tel recouvrement de W un recouvrement *τ-spécial*. Par le théorème de Tate 2.3.9 l'algèbre de Banach $A_W \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\prod_i A_{W_i} \to \prod_{i,j} A_{W_i \cap W_j})$ ne dépend pas du recouvrement et l'application $W \to \mathcal{M}(A_W)$ est bien définie.

Posons $\bar{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \{W \,|\, W$ est un domaine k-affinoïde dans un $V \in \tau\}$. On peut montrer que l'on peut étendre $\mathcal{A}$ en un atlas $\bar{\mathcal{A}}$ pour obtenir un espace analytique $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\tau})$. Soit $\hat{\tau}$ une collection d'espaces $\bar{\tau}$-spéciaux tels que l'algèbre correspondante A_W est k-affinoïde, $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_W)$ et pour certain recouvrement $\bar{\tau}$-spécial, (W_i, A_{W_i}) sont des domaines affinoïdes dans W.

Définition 3.3.7. Les sous-espaces de $\hat{\tau}$ s'appellent les domains *k-affinoïdes* de X. C'est-à-dire, $W \subset X$ est un domaine affinoïde de X, s'il existe un recouvrement $W = \cup_i W_i$ tel que W_i, $W_i \cap W_j$ sont des domaines affinoïdes dans certaines $V_i, U_{ij} \in \tau$, $A_{W_i} \hat{\otimes} A_{W_j} \to A_{W_i \cap W_j}$ est un épimorphisme admissible, $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_W)$ et (W_i, A_{W_i}) sont des domaines affinoïdes dans W. Les sous-espaces $\hat{\tau}$-spéciaux s'appellent les *domaines spéciaux* de X.

Remarque 3.3.8. D'après [Ber2] 1.1.1(i) les domaines affinoïdes sont fermés dans X.

Lemme 3.3.9. *Soit $\phi : (X, \mathcal{A}, \tau) \to (X', \mathcal{A}', \tau')$ un morphisme d'espaces analytiques, soient $V \subset X$ et $V' \subset X'$ des domaines affinoïdes. Alors l'intersection $V \cap \phi^{-1}(V')$ est un domaine spécial de X.*

Démonstration. [Ber2] 1.2.14 □

Proposition 3.3.10. *Soient (X, A, τ) et (X', A', τ') des espaces analytiques. Alors il existe une bijection entre l'ensemble* $\mathrm{Hom}((X, A, \tau), (X', A', \tau'))$ *et l'ensemble des paires (ϕ, S) où*

– *$\phi : X \to X'$ est une application continue telle que pour tout $x \in X$ il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset X$ et $V'_1, \ldots, V'_n \subset X'$ tels que $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ et $V'_1 \cup \ldots \cup V'_n$ sont des voisinages de x et $\phi(x)$ respectivement, $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$ et $\phi(V_i) \subset V'_i$;*

– *S est un système des morphismes compatibles $\phi_{V/V'}$ d'espaces affinoïdes pour tous domaines affinoïdes $V \subset X$ et $V' \subset X'$ tels que $\phi(V) \subset V'$.*

Démonstration. [Ber2] 1.2.15 □

Définition 3.3.11. Un sous-espace Y de l'espace analytique X s'appelle un *domaine k-analytique* si pour tout $y \in Y$ il existe des domaines k-affinoïdes $V_1, \ldots, V_n$ contenus dans Y tels que $y \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de y dans Y.

Notons que d'après cette définition et 3.3.9 on a ([Ber2] 1.3) :

1. l'intersection de deux domaines analytiques est un domaine analytique ;
2. une préimage d'un domaine analytique par un morphisme d'espaces analytiques est un domaine analytique ;
3. si $Y \subset X$ est un domaine analytique, alors la famille des domaines affinoïdes de X qui sont contenus dans Y définit un atlas sur Y et on obtient ainsi un morphisme d'espaces analytiques $\nu : Y \to X$ avec la propriété universelle suivante : si $\varphi : Z \to X$ est un morphisme d'espaces analytiques tel que $\varphi(Z) \subset Y$ il existe un unique morphisme $\psi : Z \to Y$ tel que $\varphi = \nu \circ \psi$;
4. un domaine analytique qui est isomorphe à un espace k-affinoïde est un domaine affinoïde ;
5. tout ouvert de l'espace analytique est un domaine analytique. (C'est le cas pour un espace affinoïde par définition de la topologie sur le spectre d'anneau de Banach. Dans le cas général soit $(X, \mathcal{A}, \tau)$ un espace analytique, $U \subset X$ est un ouvert. Par définition des l'espaces analytiques, pour chaque $x \in U$ il existe $V_1, \ldots, V_n \in \tau$ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de x. Comme l'assertion est vraie pour chaque V_i le résultat en découle.)

Considérons maintenant le procédés de recollement d'espaces k-analytiques. Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces k-analytiques. Supposons que pour tous $i, j \in I$ on a un domaine k-analytique $X_{ij} \subset X_i$ et un isomorphisme d'espaces k-analytiques $\nu_{ij} : X_{ij} \xrightarrow{\sim} X_{ji}$ tels que

(i) $X_{ii} = X_i$

(ii) $\nu_{ij}(X_{ij} \cap X_{il}) = X_{ji} \cap X_{jl}$

(iii) $\nu_{il} = \nu_{jl} \circ \nu_{ij}$ sur $X_{ij} \cap X_{il}$.

On cherche un espace k-analytique X muni d'une famille de morphismes $\mu_i : X_i \to X$ tels que

(1) μ_i est un isomorphisme de X_i sur un domaine k-analytique de X

(2) $X = \bigcup \mu_i(X_i)$

(3) $\mu_i(X_{ij}) = \mu_i(X_i) \cap \mu_j(X_j)$

(4) $\mu_i = \mu_j \circ \nu_{ij}$ sur X_{ij}.

Si un tel X existe, on dit qu'il est obtenu par recollement de X_i selon les X_{ij}.

Proposition 3.3.12. *Le recollement existe et il est unique à un isomorphisme près dans les situations suivantes :*

(i) les X_{ij} sont ouverts dans les X_i ;

(ii) pour chaque $i \in I$ tous les X_{ij} sont fermés dans les X_i et $X_{ij} = \emptyset$ sauf un nombre fini d'indices j.

Dans le cas (i) tous les $\mu_i(X_i)$ sont ouverts dans X. Dans le cas (ii) tous les $\mu_i(X_i)$ sont fermés dans X et si les X_i sont séparés (paracompacts) alors X est séparé (paracompact).

Démonstration. [Ber2] 1.3.3 □

Remarque 3.3.13. Rappelons qu'un espace topologique X est dit séparé (ou de Hausdorff) si l'image de X dans $X \times X$ est fermée.

Naturellement, on peut recoller les morphismes aussi :

Proposition 3.3.14. *Soit X un espace analytique, soit $(Y_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des domaines analytiques tel que tout point $x \in X$ a un voisinage de la forme $Y_{i_1} \cup \ldots \cup Y_{i_n}$ et $x \in Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}$ (i.e. (Y_i) est un quasi-réseau sur X). Alors pour tout espace analytique X' la suite*

$$\mathrm{Hom}(X, X') \to \prod_i \mathrm{Hom}(Y_i, X') \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(Y_i \cap Y_j, X')$$

est exacte.

Démonstration. [Ber2] 1.3.2 □

Certains espaces analytiques possèdent la propriété supplémentaire suivante (en particulier, les espaces analytiques au sens de [Ber1]).

Définition 3.3.15. On dit qu'un espace analytique X est *bon* si tout point de X a un voisinage affinoïde.

Exemple 3.3.16.
(i) Un espace analytique $\mathcal{M}(A)$ est bon (A est une algèbre affinoïde).
(ii) Par contre le lieu de validité sur le polydisque unité de dimension 2 de la condition "$\|T\| = 1$ où $\|S\| = 1$" est un espace analytique qui n'est pas bon : le point $\sum a_{i,j} T^i S^j \mapsto \max |a_{ij}|$ n'as pas de voisinage affinoïde.

Si X est un bon espace analytique, on peut le munir d'un faisceau structurel $\mathcal{O}_X$. Si $X = \mathcal{M}(A)$ c'est le faisceau déjà construit. Par 3.3.14 cela donne un faisceau $\mathcal{O}_X$ pour un bon espace analytique X.

Dans le cas général définissons une topologie de Grothendieck sur un espace analytique X. Comme catégorie on prend la categorie de tous les domaines analytiques de X. Les recouvrements d'un domaine analytique Y sont donnés par les familles $(Y_i)_{i \in I}$ de domaines analytiques de Y qui sont des quasi-réseaux sur Y.

Définition 3.3.17. La topologie ainsi obtenue s'appelle la G-topologie sur X. On note par X_G le site correspondant.

D'après 3.3.14 on obtient un faisceau structurel $\mathcal{O}_{X_G}$ sur X_G et on a ainsi une notion de $\mathcal{O}_{X_G}$-module. On dit qu'un $\mathcal{O}_{X_G}$-module M est cohérent s'il existe un quasi-réseau τ de domaines affinoïdes sur X tel que pour tout $V \in \tau \quad M|_{V_G}$ est isomorphe au conoyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_{V_G}$-modules libres de type fini. Un morphisme d'espaces analytiques induit un morphisme d'espaces G-annelés $\phi_G \colon Y_G \to X_G$.

Remarque 3.3.18.
(i) Si x est un point de X et V un domaine affinoïde de X contenant x, alors on peut définir le corps résiduel $k(x)$ et le corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ de x dans V comme dans 2.1.19. Il ne depend pas du choix de domaine V par 3.3.9. On ontient ainsi une application $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \to X$ qui vient du caractère χ_x corredpondant (2.1.19) De 2.1.19 on déduit que donner un point x de l'espace analytique X est équivalent à donner un morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \to X$ (ou un morphisme $\mathcal{M}(k(x)) \to X$).
(ii) Si $\phi : Y \to X$ est un morphisme d'espaces analytiques et $x \in X$, alors l'espace analytique $Y \times_X \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ s'identifie à la fibre Y_x de ϕ en point x ([Ber2] 1.4).

Étudions le lien entre les espaces k-analytiques et les schémas localement de type fini sur k. Soit X un tel schéma. Soit Φ un foncteur de la catégorie de bons espaces analytiques sur k vers la catégorie des ensembles qui accocie à un espace analytique $\mathcal{X}$ l'ensemble des morphismes d'espaces annelés $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{X}, X)$.

Théorème 3.3.19. *Le foncteur Φ est représentable par un espace analytique X^{an} et le morphisme $\pi : X^{\mathrm{an}} \to X$. Si $X = \mathrm{Spec}\, A$ où A est de type fini sur k, alors X^{an} coïncide avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur A prolongeant la norme de k.*

Démonstration. [Ber2] 2.6.1 □

3.4 Application de réduction

Considérons d'abord le cas affine. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf} A$ un schéma formel tel que A est un anneau de présentation finie sur k°, i.e. $A = k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ pour un idéal $\mathfrak{a} \subset k^\circ\langle\zeta\rangle$ de type fini. Posons $\mathcal{A} = A \otimes_{k^\circ} k$.

Lemme 3.4.1. *$\mathcal{A}$ est une algèbre k-affinoïde et l'image de A dans $\mathcal{A}$ est contenue dans*

$$\mathcal{A}^\circ = \{f \in \mathcal{A} \,|\, |f(x)| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

De plus, si $f \in A$, alors $A\langle f^{-1}\rangle \otimes_{k^\circ} k \xrightarrow{\sim} (A \otimes_{k^\circ} k)\langle f^{-1}\rangle$.

Démonstration. On a : $\mathcal{A} = (k^\circ\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}) \otimes_{k^\circ} k = (k^\circ\langle\zeta\rangle \otimes_{k^\circ} k)/(\mathfrak{a} \otimes_{k^\circ} k) = k\langle\zeta\rangle/(\mathfrak{a} \otimes_{k^\circ} k)$. (Plus précisément, si $\mathfrak{a}$ est engendré par $f_1, \ldots, f_n$, alors $\mathfrak{a} \otimes_{k^\circ} k$ est engendré sur $k\langle\zeta\rangle$ par $f_1, \ldots, f_n$. En effet, notons $\mathfrak{b}$ l'idéal de $k\langle\zeta\rangle$ engendré par $f_1, \ldots, f_n$. L'application $\mathfrak{a} \otimes_{k^\circ} k \to \mathfrak{b}$, $\sum p_i f_i \otimes c_i \mapsto \sum c_i p_i f_i$, $c_i \in k$, $p_i \in k^\circ\langle\zeta\rangle$ est surjective. Elle est aussi injective : si $\sum c_i p_i f_i = 0$, alors $\sum \frac{c_i}{c} p_i f_i = 0$ où $c = \max \|c_i\|$, d'où $\sum p_i f_i \otimes c_i = (\sum \frac{c_i}{c} p_i f_i) \otimes c = 0$, donc $\mathfrak{a} \otimes_{k^\circ} k = \mathfrak{b}$.) L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc une algèbre k-affinoïde.

Ensuite notons que $f \in \mathcal{A}^\circ \Leftrightarrow \|\hat{f}\| \leq 1 \Leftrightarrow \rho(f) \leq 1$ par 2.1.22. Mais $\rho(f) = \|f\|$ car la norme est multiplicative, donc $f \in \mathcal{A}^\circ \Leftrightarrow \|f\| \leq 1$, d'où si $f \in A$ alors $f \in \mathcal{A}^\circ$ par 2.3.1.

Pour démontrer le reste écrivons $A\langle f^{-1}\rangle \otimes_{k^\circ} k$=[par 3.1.4]=$A\langle T\rangle/(1 - ft) \otimes_{k^\circ} k$=$A\langle T\rangle \otimes_{k^\circ} k/(1 - ft) \otimes_{k^\circ} k$=[de la même manière comme ci-dessus on montre que $(1 - ft)A\langle T\rangle \otimes_{k^\circ} k = (1 - ft)\mathcal{A}\langle T\rangle$]=$\mathcal{A}\langle T\rangle/(1 - ft) = (A \otimes_{k^\circ} k)\langle f^{-1}\rangle$. □

Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre k-affinoïde, on peut définir l'espace k-analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Posons $\mathfrak{X}_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Notons qu'un morphisme $\mathrm{Spf} A \to \mathrm{Spf} B$ induit un morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ est donc $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_\eta$ est un foncteur.

Le point $x \in \mathfrak{X}_\eta$ donne un morphisme $\chi_x : A \to \mathcal{H}(x)$, $f \mapsto f(x)$ (comme dans 2.1), qui induit le morphisme $\widetilde{\chi_x} \colon \widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(x)}$, où $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} A/k^{\circ\circ}A$ (comme dans 3.1.12 : $\chi_x(k^{\circ\circ}A) \subset \mathcal{H}(x)^{\circ\circ}$ par 2.1.22). On pose :

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \widetilde{\chi_x}.$$

Comme $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est un corps, $\pi(x)$ est un idéal premier de $\widetilde{A}$. On obtient ainsi une application $\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s = \mathrm{Spec}\widetilde{A}$, qu'on appelle *l'application de réduction.*

Maintenant démontrons quelques propriétés de cette application.

Proposition 3.4.2. *L'image de π est fermé dans $\mathfrak{X}_s$.*

Démonstration. Considérons l'application $\widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ et posons $\pi'(x)$ son noyau. L'application ainsi définie $\pi' : \mathfrak{X}_\eta \to \mathrm{Spec}\widetilde{\mathcal{A}}$ est l'application de réduction de [Ber1] 2.4. Cette application est surjective d'après [Ber1] 2.4.4 (i).

Considérons ensuite un épimorphisme $k^\circ\langle\zeta\rangle \to A$. Il induit les épimorphismes $\tilde{k}[\zeta] \to \tilde{A}$ et $k\langle\zeta\rangle \to \mathcal{A}$. Notons que le premier est bien défini par 3.1.12. L'épimorphisme $k\langle\zeta\rangle \to \mathcal{A}$ induit un homomorphisme fini $\tilde{k}[\zeta] \to \tilde{\mathcal{A}}$ par [BGR] 6.3.4/2. Ce dernier coïncide avec la composé $\tilde{k}[\zeta] \to \widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, donc $\widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est fini (car $\tilde{k}[\zeta] \to \tilde{\mathcal{A}}$ est fini). Soit $x \in \mathfrak{X}_\eta$. Par définition de π on a alors : $\pi(x) = j^{-1}(\pi'(x)) = j^{-1}(\ker \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{H}(x)})$, où $j\colon \widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est le morphisme canonique. Comme $\widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est fini, cela montre que l'image de π est fermé dans $\mathfrak{X}_s$. □

Proposition 3.4.3. *(i) Soit $\mathcal{Y}$ un fermé de $\mathfrak{X}_s$ défini par $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ pour certains $f_1, \ldots, f_n \in A$. Alors*

$$\pi^{-1}(\mathcal{Y}) = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \,|\, |f_i(x)| < 1,\, 1 \le i \le n\}.$$

(ii) Soit $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\widetilde{A}_{\tilde{f}}$, $f \in A$ un ouvert de $\mathfrak{X}_s$. Alors

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \,|\, |f(x)| = 1\}$$

et donc $\mathfrak{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$ où $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf} A\langle f^{-1}\rangle$.

Démonstration. Dans le cas (i) on a : $x \in \pi^{-1}(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow \pi(x) \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \tilde{f}_i \in \ker \widetilde{\chi_x}$, $1 \le i \le n$ $\Leftrightarrow |\tilde{f}_i(x)| < 1$, $1 \le i \le n \Leftrightarrow |f_i(x)| < 1$, $1 \le i \le n$.

Dans le cas (ii), $x \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \pi(x) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \tilde{f} \notin \ker \widetilde{\chi_x} \Leftrightarrow |\tilde{f}(x)| = 1 \Leftrightarrow |f(x)| = 1$. Le fait, que $\mathfrak{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$ découle de 2.3.7. En effet, $\|f\| \le 1$ par 2.1.22 : $f \in A$ et donc $f \in \mathcal{A}^\circ$ par 3.4.1. On peut voir donc $\{x \in \mathfrak{X}_\eta \,|\, |f(x)| = 1\} = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \,|\, |f(x)| \ge 1\}$ comme un domaine de Laurent, représenté par $\mathcal{A} \to \mathcal{A}\langle T\rangle/(1 - fT) = A\langle f^{-1}\rangle \otimes_{k^\circ} k$ (par 3.4.1). Donc $\mathfrak{U}_\eta = \mathcal{M}(A\langle f^{-1}\rangle \otimes_{k^\circ} k) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathfrak{X}_\eta \,|\, |f(x)| = 1\}$ par 2.3.7. □

Considérons le cas où $\mathcal{U}$ est un ouvert (pas forcement affine) de $\mathfrak{X}_s$.

Proposition 3.4.4. *Soit $\mathfrak{U}$ un schéma formel avec un espace topologique sous-jacent $\mathcal{U}$. Alors $\mathfrak{U}_\eta$ s'identifie à un domaine affinoïde dans $\mathfrak{X}_\eta$.*

Démonstration. Par 3.1.11 $\mathfrak{U}$ est l'union finie de schémas formels de la forme $\mathfrak{U}_i = \mathrm{Spf} A\langle f_i\rangle$, $f_i \in A$. Posons $\mathcal{U}_i = \mathrm{Spec}\widetilde{A}_{\tilde{f}_i}$. Donc $\mathfrak{U}_{i,\eta} = \mathcal{M}(\mathcal{A}\langle f_i^{-1}\rangle) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Par le théorème de Tate 2.3.9 $\mathfrak{U}_\eta$ s'identifie avec un domaine affinoïde $\mathcal{M}(\ker \prod \mathcal{A}\langle f_i^{-1}\rangle \to \prod \mathcal{A}\langle f_i^{-1}, f_j^{-1}\rangle)$ dans $\mathfrak{X}_\eta$. De plus, notons que dans ce cas $\mathfrak{U}_\eta$ coïncide avec $\pi^{-1}(\mathcal{U})$. □

Considérons le cas général. On le fera en deux étapes. On fixe un recouvrement localement fini $\mathfrak{X} = \bigcup \mathfrak{X}_i$ par des schémas affines de la forme $\mathrm{Spf} A$, où A est de présentation finie sur k°. Par définition de schémas formels de présentation finie sur k°, on peut supposer que $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$ est vide sauf un nombre fini d'indices j.

Pour la première étape supposons que $\mathfrak{X}$ est séparé. Dans ce cas $\mathfrak{X}_{ij} = \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$ est affine par 3.1.7 et donc $\mathfrak{X}_{ij,\eta}$ est un domaine affinoïde dans $X_{i,\eta}$ et $\mathfrak{X}_{ij,\eta} \to \mathfrak{X}_{i,\eta} \times \mathfrak{X}_{j,\eta}$ est une immersion fermé (i.e. un morphisme d'algèbres associé est un épimorphisme). Donc on peut recoller les $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ pour obtenir un k-espace analytique séparé paracompact $\mathfrak{X}_\eta$ (par 3.3.12). Si $\mathfrak{X}$ est de présentation finie (i.e. c'est l'union finie $\bigcup \mathfrak{X}_i$) alors $\mathfrak{X}_\eta$ est compact (comme les $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ sont compacts par 2.1.18).
De plus, on a les propriétés suivantes :

Proposition 3.4.5. *(i) $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_\eta$ est un foncteur ;*

(ii) les applications de réduction $\mathfrak{X}_{i,\eta} \to \mathfrak{X}_{i,s}$ donnent une application de réduction $\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$;

(iii) si $\mathfrak{U}$ est un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{X}$ avec un espace topologique sous-jacent $\mathcal{U}$, alors $\mathfrak{U}_\eta$ est un domaine analytique fermé de $\mathfrak{X}_\eta$ et $\mathfrak{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$;

(iv) si $\mathcal{Y}$ est un fermé dans $\mathfrak{X}_s$ alors $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ est un ouvert de $\mathfrak{X}_\eta$;
(v) l'image de π est fermé dans $\mathfrak{X}_s$.

Démonstration. Les propriétés (i) et (ii) découlent du procédé de recollement des morphismes 3.3.14. La (iv) est vraie comme elle est vraie localement, les propriétés (iii) et (v) découlent de [Bou] I.1.5/4 (ce qui dit que la réunion d'une famille localement finie de parties fermées d'un espace topologique est fermé dans cet espace). □

Finalement, dans la deuxième étape $\mathfrak{X} \in k^\circ\text{-}Fsch$ quelconque. Notons que $\mathfrak{X}_{i,j}$ sont des schémas formels séparés (comme l'intersection de deux affines) et on utilise la première étape pour construire $\mathfrak{X}_{ij,\eta}$ qui est un domaine analytique compact dans un espace k-affinoïde $X_{i,\eta}$ (car $\mathfrak{X}_{i,j}$ est un ouvert dans un affine et donc l'union finie d'ouverts affines par 3.1.11). Donc on peut recoller les $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ pour obtenir un espace analytique séparé paracompact $\mathfrak{X}_\eta$ (par 3.3.12) et on a les propriétés (i)-(v) comme ci-dessus.

De même, si $\mathfrak{X}$ est de présentation finie (i.e. c'est l'union finie $\bigcup \mathfrak{X}_i$) alors $\mathfrak{X}_\eta$ est compact (comme les $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ sont compacts par 2.1.18).

Il est important de noter que l'espace $\mathfrak{X}_\eta$ n'est pas bon en général : par exemple si $\mathfrak{X}$ est un ouvert complémentaire de l'origine dans le plan affine formel alors $\mathfrak{X}_\eta$ est l'espace analytique de 3.3.16(ii) qui n'est pas bon.

Pour un morphisme $\phi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ on note ϕ_s et ϕ_η les morphismes $\mathfrak{Y}_s \to \mathfrak{X}_s$ et $\mathfrak{Y}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$ respectivement.

4 Morphismes étales et quasi-étales

4.1 Morphismes étales de schémas formels

Dans cette section on introduira les notions de morphismes étales de schémas formels. On aura besoin de la propriété suivante, qui a lieu pour les morphismes étales de schémas.

Théorème 4.1.1. *Localement tout morphisme étale est standard :*
si $\varphi\colon Y \to X$ est un morphisme étale, pour tout $y \in Y$ il existe des voisinages affines V et U de y et $\varphi(y)$ respectivement tels que le morphisme $\varphi|_V\colon V \to U$ est standard. (On dit qu'un morphisme étale $\varphi : V \to U$ est standard si c'est un morphisme de la forme $\mathrm{Spec}(A[T]/P)_f \to \mathrm{Spec}A$, où A est un anneau, $P \in A[T]$ est un polynôme réduit, i.e. son coefficient au plus haut degrée est égal à 1, $f \in A[T]$ tel que P' est inversible dans $(A[T]/P)_f$).

Démonstration. [Mi], 3.14 □

Maintenant considérons le cas des schémas formels. Soit $\mathfrak{X} \in k^\circ$-$Fsch$, soit $n \in \mathbb{N}$. De la même manière comme dans 3.1.10 on montre l'assertion suivante :

Proposition 4.1.2. *L'espace annelé $\mathfrak{X}_n \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/a^n\mathcal{O}_\mathfrak{X})$ est un schéma de type fini sur $k^\circ/(a^n)$.*

Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k^\circ$-$Fsch$, soit $n \in N$. Notons qu'un morphisme $\phi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ induit un morphisme $\phi_n : \mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{X}_n$, car $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \times_{k^\circ} k^\circ/a^n$ et $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z} \times_{k^\circ} k^\circ/a^n$.

Remarque 4.1.3. Soit $x \in \mathfrak{X}$ un point du schéma formel $\mathfrak{X} \in k^\circ$-$Fsch$ correspondant à l'idéal premier ouvert $\mathfrak{p}$. Notons que $\mathfrak{p} \cap k^\circ$ est un idéal premier de k°. Comme $\mathfrak{p}$ est ouvert, $\mathfrak{p} \supset (a)$, donc $\mathfrak{p} \cap k^\circ$ est non nul, d'où $\mathfrak{p} \cap k^\circ = k^{\circ\circ}$ par 2.1.23. Les schémas $\mathfrak{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{X}/k^{\circ\circ}\mathfrak{X}$ coïncident donc ensemblistement.

Définition 4.1.4. Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k^\circ$-$Fsch$. Un morphisme $\phi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est dit *plat* (resp. *étale*) si tous les morphismes $\phi_n : \mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{X}_n$ sont plats (resp.étales), $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.1.5. En général les schémas $\mathfrak{Z}_n$ et $\mathfrak{X}_n$ ne sont pas localement noethériens (cf. 2.1.24). La notion d'un morphisme étale (resp. non-ramifié) correspond donc à [EGAIV] 17.3. Pourtant on peut utiliser le même critère que pour des schémas localement noethériens (*loc. cit.* 17.4.1(d″)) : un morphisme localement de présentation finie $f : X \to Y$ est non-ramifié en point $x \in X$ ssi l'anneau $\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/m_y\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, extension finie séparable de $k(y)$, où l'on note $y = f(x)$ et X_y est la fibre de f en point y.

Lemme 4.1.6. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k^\circ$-$Fsch$. Un morphisme $\phi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est étale si est seulement s'il est plat et étale en sa fible spéciale (i.e. si le morphisme $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ est étale).*

Démonstration. Si $\phi_n : \mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{X}_n$ sont étales, alors $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ l'est aussi par le changement de base (le morphisme $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ coïncide avec le morphisme $\mathfrak{Z}_n \otimes_{\mathfrak{X}_n} (\mathfrak{X}_n \otimes_{k^\circ} k^\circ/k^{\circ\circ}) \to \mathfrak{X}_n \otimes_{k^\circ} k^\circ/k^{\circ\circ}$). Il s'agit donc de monrer que si $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ est non-ramifié, alors $\mathfrak{Z}_n \to \mathfrak{X}_n$ le sont aussi. Cela découle de la rémarque ci-dessus vu que les anneaux locaux des fibres de ces morphismes (i.e. les $\mathcal{O}_{X_y,x}$) ainsi que les corps résiduels sont les mêmes par 4.1.3. □

Proposition 4.1.7. *Soit $\mathfrak{X} \in k^\circ$-$Fsch$. Alors la correspondance $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$ induit une équivalence entre la catégorie des schémas formels étales sur $\mathfrak{X}$ et la catégorie des schémas étales sur $\mathfrak{X}_s$.*

Remarque 4.1.8. Cette correspondance est bien définie par le lemme ci-dessus.

Démonstration. Il faut montrer que le foncteur $\cdot_s : \mathfrak{Z} \mapsto \mathfrak{Z}_s$ entre la catégorie des schémas formels étales sur $\mathfrak{X}$ et la catégorie des schémas étales sur $\mathfrak{X}_s$ est essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Montrons qu'il est pleinement fidèle. Il s'agit de montrer que l'ensemble de morphismes étales $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_s}(\mathfrak{Y}_s, \mathfrak{Z}_s)$. Cela découle du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n)$ par [EGAI] I.10.6.11 et du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}_s}(\mathfrak{Y}_s, \mathfrak{Z}_s)$ par [Mi] I.3.23.

Montrons que $\cdot_s$ est essentiellement surjectif. Comme il est pleinement fidèle, il suffit de montrer que l'on peut relever localement un morphisme étale $\mathcal{Z} \to \mathfrak{X}_s$ (i.e. on peut recoller les relèvements ainsi obtenus, car ils coïncident sur les intersections vu que $\phi_s = \psi_s \Rightarrow \phi = \psi$ car le foncteur $\cdot_s$ est pleinement fidèle). Par la localité on peut supposer que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf} A$, $\mathfrak{X}_s = \mathrm{Spec}\widetilde{A}$ et $\mathcal{Z} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}[T]/\widetilde{P})_{\tilde{f}}$, où $\widetilde{P}$ est un polynôme réduit et $\widetilde{P'}$ est inversible dans $(\widetilde{A}[T]/\widetilde{P})_{\tilde{f}}$ (par 4.1.1). On choisit des relèvements P et f de $\tilde{P}$ et $\tilde{f}$ et on pose $Z = \mathrm{Spf}(A\langle T\rangle/P)_f$. Alors $Z_s = \mathcal{Z}$. Comme Z est un ouvert du schema formel $\mathrm{Spf}(A\langle T\rangle/P) = \mathrm{Spf}(A[T]/P)$, on voit que Z est plat sur X. Comme $Z_s \to X_s$ est etale, $Z \to X$ est etale d'après 4.1.6. Donc $\cdot_s$ est essentiellement surjectif et cela finit la preuve de la proposition.

□

Maintenant étudions le comportement de morphismes étales par rapport à l'application de réduction.

Proposition 4.1.9. *Soit $\phi : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ un morphisme étale. Alors*

$$\phi_\eta(\mathfrak{Z}_\eta) = \pi^{-1}(\phi_s(\mathfrak{Z}_s)).$$

En particulier, $\phi_\eta(\mathfrak{Z}_\eta)$ est un domaine analytique fermé de $\mathfrak{X}_\eta$.

Démonstration. Notons que si $\phi : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale, alors on peut le factoriser par $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{U} \to \mathfrak{X}$, où $\mathfrak{U}$ est un ouvert du schéma formel $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{U}_s$ est surjectif (il suffit de prendre $\mathfrak{U} = \mathrm{Im}\,\phi$ qui est ouvert d'après 4.1.3 et le fait que ϕ est plat). Notons que $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{U}_s$ est étale puisque $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ est étale et $\mathfrak{U}_s \to \mathfrak{X}_s$ est étale comme une immersion ouverte. Donc $\pi^{-1}(\phi_s(\mathfrak{Z}_s)) = \pi^{-1}(\mathfrak{U}_s) = \mathfrak{U}_\eta$ et il suffit donc de montrer que $\mathfrak{Z}_\eta \to \mathfrak{U}_\eta$ est surjectif. Soit $x \in \mathfrak{U}_\eta$, alors x correspond à un morphisme $\mathcal{M}(k(x)) \to \mathfrak{U}_\eta$ par 3.3.18, ce dernier donne un morphisme $\mathrm{Spf}(k^\circ(x)) \to \mathfrak{U}$, où $k^\circ(x) = \{y \in k(x), \|y\| \leq 1\}$ est un anneau des entiers de $k(x)$. On pose $\widetilde{k}(x)$ le corps résiduel de $k^\circ(x)$. Posons $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Spf}(k^\circ(x))$. On a donc un morphisme $A_s \to \mathfrak{U}_s$, ce qui donne un morphisme $A_s \to \mathfrak{Z}_s$ puisque $\mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{U}_s$ est surjectif. Il s'agit donc de montrer que le morphisme $A_s \to \mathfrak{Z}_s$ se relève à en morphisme $A \to \mathfrak{Z}$. Par la localité on peut supposer que $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}\, C = \mathrm{Spf}(k^\circ\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I)$, $\mathfrak{U}_s = \mathrm{Spec}\, C_s = \mathrm{Spec}(\widetilde{k}[x_1, \ldots, x_n]/\widetilde{I})$ et, comme $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{U}$ est étale, on peut aussi supposer que $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\,(C[T]/P)\langle f^{-1}\rangle$ et $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\,(C_s[T]/\widetilde{P})_{\tilde{f}}$ comme dans la proposition précédente (P est un polynome réduit). Soit $(\widetilde{a_1}, \ldots \widetilde{a_n})$ le $\widetilde{k(x)}$-point de $\mathfrak{U}_s$ correspondent à $A_s \to \mathfrak{U}_s$, il se relève à $k^\circ(x)$-point $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathfrak{U}$. Soit $(\widetilde{a_1}, \ldots \widetilde{a_n}, \widetilde{b})$ le point correspondent à $A_s \to \mathfrak{Z}_s$. Soit $P_a(t) = P(a_1, \ldots, a_n, t)$, on a $\widetilde{P_a}(\tilde{b}) = 0$, donc, puisque $k^\circ(x)$ est Hensélien (par [Ber2] 2.3.3 et 2.4.3), on peut relever $\tilde{b}$ en b tel que $P_a(b) = P(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$. On obtient ainsi un $k^\circ(x)$-point de $\mathfrak{Z}$ (la condition $f(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0$ est aussi satisfaite car $\tilde{f}(\widetilde{a_1}, \ldots, \widetilde{a_n}, \widetilde{b}) \neq 0$). Cela donne un morphisme $\mathcal{M}(k(x)) \to \mathfrak{Z}_\eta$, donc $\mathfrak{Z}_\eta \to \mathfrak{U}_\eta$ est surjectif. □

4.2 Morphismes étales d'espaces analytiques

Étudions d'abord quelques propriétés d'espaces affinoïdes et analytiques.

Définition 4.2.1. Soit $\phi : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ un morphisme d'espaces affinoïdes. On dit que c'est une *immersion fermée* si $A \to B$ est un épimorphisme admissible.

Définition 4.2.2. Un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques s'appelle une *immersion fermée* si pour tout $x \in X$ il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset X$ tels que $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de x et $\phi^{-1}(V_i) \to V_i$ sont des immersions fermées d'espaces affinoïdes.

Lemme 4.2.3. *Un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est une immersion fermée ssi pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, $\phi^{-1}(V) \to V$ est une immersion fermée d'espaces affinoïdes.*

Démonstration. [Ber2] 1.3.7 □

Définition 4.2.4. On dit qu'un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est une *immersion G-localement fermé* s'il existe un quasi-réseau τ de domaines analytiques sur Y tel que pour tout $V \in \tau$ il existe un domaine analytique $U \subset X$ tel que ϕ induit une immersion fermée $V \to U$.

Soit $\phi : Y \to X$ une immersion G-localement fermée, soient U, V comme dans la définition ci-dessus. Si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{U_G}$ correspondant à V, alors on peut considérer $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ comme un $\mathcal{O}_{V_G}$-module. Tous ces faisceaux sont compatibles sur les intersections et ils définissent un $\mathcal{O}_{Y_G}$-module cohérent. On l'appelle un *faisceau conormal* et on le note $\mathcal{N}_{Y_G/X_G}$.

Définition 4.2.5. On dit qu'un morphisme d'espaces analytiques $\phi : Y \to X$ est *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_{Y/X} : Y \to Y \times_X Y$ est une immersion fermée.

Remarque 4.2.6. Si $\phi : Y \to X$ est séparé alors l'intersection de deux domaines affinoïdes est affinoïde : en effet si U et V sont des domaines affinoïdes alors $U \cap V = \Delta^{-1}_{Y/X}(U \times V)$ et $\Delta^{-1}_{Y/X}(U \times V) \to U \times V$ est une immersion fermée d'espaces affinoïdes et donc $U \cap V$ est affinoïde.

Définition 4.2.7. Soit $\phi : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ un morphisme d'espaces affinoïdes. On dit qu'il est *fini* si B est un A-module de Banach de type fini.

Définition 4.2.8. Un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est dit *fini* si pour tout $x \in X$ il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset X$ tels que $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de x et $\phi^{-1}(V_i) \to V_i$ sont des morphismes finis d'espaces affinoïdes.

Lemme 4.2.9. *Un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est fini ssi pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, $\phi^{-1}(V) \to V$ est un morphisme fini d'espaces affinoïdes.*

Démonstration. [Ber2] 1.3.7 □

Définition 4.2.10. On dit qu'un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est *fini* au point $y \in Y$ s'il existe des voisinages ouverts V et U de y et $\phi(y)$ respectivement tels que ϕ induit un morphisme fini $V \to U$. On dit que ϕ est *quasi-fini* si'il est fini en tout point $y \in Y$.

Lemme 4.2.11. *Si un morphisme de bons espaces analytiques $\phi : Y \to X$ est fini en point $y \in Y$, alors $\mathcal{O}_{Y,y}$ est une $\mathcal{O}_{X,\phi(y)}$-algèbre finie.*

Démonstration. [Ber2] 3.1.6 □

Définition 4.2.12. On dit qu'un morphisme quasi-fini $\phi : Y \to X$ de bons espaces analytiques est *plat* au point $y \in Y$ si $\mathcal{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X,\phi(y)}$. On dit que ϕ est *plat* s'il est plat en tout point $y \in Y$.

Lemme 4.2.13. *Un morphisme fini d'espaces analytiques $\phi : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ est plat en point $y \in Y$ ssi $B_{\mathfrak{p}_y}$ est plat sur $A_{\mathfrak{p}_{\phi(y)}}$, où $\mathfrak{p}_y$ et $\mathfrak{p}_{\phi(y)}$ sont les idéaux correspondants aux semi-normes définies par y et $\phi(y)$. En particulier, ϕ est plat ssi B est plat sur A.*

Démonstration. [Ber2] 3.2.1 □

Dans le cas général on définit les morphismes plats comme suit.

Lemme 4.2.14. *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme fini d'espaces analytiques, soient $y \in Y$ et $x = \phi(y)$. Alors les conditions suivantes sont équivalents :*

(i) il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset X$ tels que $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de x et $\phi^{-1}(V_i) \to V_i$ est plat en y pour tout i ;

(ii) pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, $\phi^{-1}(V) \to V$ est plat en y.

Démonstration. [Ber2] 3.2.3 □

Définition 4.2.15. On dit qu'un morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est *plat* en point $y \in Y$ s'il existe des voisinages ouverts V et U de y et $\phi(y)$ respectivement tels que ϕ induit un morphisme fini $V \to U$ qui vérifie les conditions équivalentes du lemme ci-dessus. On dit que ϕ est *plat* s'il est plat en tout point $y \in Y$.

Proposition 4.2.16. *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme plat quasi-fini d'espaces analytiques. Alors ϕ est une application ouverte.*

Démonstration. [Ber2] 3.2.7 □

Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. Considérons le morphisme diagonal $\Delta_{Y/X} : Y \to Y \times_X Y$ (le produit $Y \times_X Y$ est bien défini par 3.3.6). D'après [Ber2] 1.4 c'est une immersion G-localement fermée (la collection τ de domaines affinoídes $V \subset Y \,|\, \exists U \subset X$ un domaine affinoïde $|\, \phi(V) \subset U$ est un réseau, pour tels U, V on a que $V \times_U V$ est un domaine affinoïde de $Y \times_X Y$ et $\Delta_{Y/X}$ induit une immersion fermée $V \to V \times_U V$). On peut donc définir un faisceau conormal de $\Delta_{Y/X}$ qu'on appelle le *faisceau de différentielles* de ϕ et on le note par Ω_{Y_G/X_G}.

Définition 4.2.17. On dit qu'un morphisme quasi-fini $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques est *non-ramifié* si $\Omega_{Y_G/X_G} = 0$. On dit que ϕ est *étale* s'il est non-ramifié et plat. On dit qu'il est *non-ramifié* (resp. *étale*) en $y \in Y$ si'il existe des voisinages ouverts V et U de y et $\phi(y)$ respectivement tels que ϕ induit un morphisme non-ramifié (resp. étale) $V \to U$.

Lemme 4.2.18. *Un morphisme quasi-fini $\phi : Y \to X$ de bons espaces analytiques est non-ramifié (resp. étale) au point $y \in Y$ ssi $\mathcal{O}_{Y,y}/m_x\mathcal{O}_{Y,y}$ ($x = \phi(y)$) est une extension finie et séparable de $k(x)$ (resp. et $\mathcal{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$), où l'on note par m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $k(x)$ est son corps résiduel.*

Démonstration. [Ber2] 3.3.6 □

Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme quasi-fini. D'après la définition de la G-topologie sur un espace analytique, $\Omega_{Y_G/X_G} = 0$ si et seulement si pour chaque domaine affinoide $V \subset X$ on a $\Omega_{(\phi^{-1}(V)_G)/V_G} = 0$. D'après 4.2.14 on obtient donc :

Proposition 4.2.19. Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme quasi-fini d'espaces analytiques, soient $y \in Y$ et $x = \phi(y)$. Alors les conditions suivantes sont équivalents :

(i) ϕ est étale en y ;

(ii) il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset X$ tels que $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de x et $\phi^{-1}(V_i) \to V_i$ est étale en y pour tout i ;

(iii) pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, $\phi^{-1}(V) \to V$ est étale en y.

Proposition 4.2.20. *Les morphismes étales sont stables par composition, par changements de base et par extensions du corps de base.*

Démonstration. [Ber2] 3.3.8 □

Proposition 4.2.21. *Soeint $\psi : Z \to Y$ et $\phi : Y \to X$ des morphismes quasi-finis. Si $\phi \circ \psi$ est étale et ϕ est non-ramifié, alors ψ est étale.*

Démonstration. [Ber2] 3.3.9 □

On note par $\acute{E}t(X)$ la catégorie de morphismes étales $U \to X$. D'après la proposition précédente tous les morphismes dans cette catégorie sont étales. Maintenant définissons le site $X_{\acute{e}t}$. On pose $\mathrm{Cat}(X_{\acute{e}t}) = \acute{E}t(X)$ et l'ensemble de recouvrements de $(U \to X) \in \acute{E}t(X)$ est donné par les familles $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i \in I}$ tels que $U = \bigcup_{i \in I} f_i(U_i)$. On dira qu'un faisceau $F \in X_{\acute{e}t}{}^{\sim}$ est un faisceau étale sur X.

Notons que tout morphisme $\phi : Y \to X$ d'espaces analytiques induit un morphisme de sites $Y_{\acute{e}t} \to X_{\acute{e}t}$ par 4.2.20 (un morphisme $(U \to X) \in \acute{E}t(X)$ donne un morphisme $(U \times_X Y \to Y) \in \acute{E}t(Y)$). Comme dans 3.2, pour un tel morphisme ϕ on peut définir le foncteur *d'image directe* $\phi_* : Y_{\acute{e}t}{}^{\sim} \to X_{\acute{e}t}{}^{\sim}$ en posant $\phi_* F(U) = F(U \times_X Y)$.

De même on définit le foncteur *d'image inverse* $\phi^* : X_{\acute{e}t}{}^{\sim} \to Y_{\acute{e}t}{}^{\sim}$ en posant $\phi^* F$ est un faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto \phi^p(V) \overset{\text{def}}{=} \varinjlim(F(U))$ où l'on prend la limite sur tous les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

avec $U \to X$ étale. Cette définition admet un sens et ϕ^* est adjoint à gauche de ϕ_*.

Dans la suite on aura besoin de la construction suivante, qui est une généralisation de la catégorie $\acute{E}t(X)$.

Définition 4.2.22. Un *germe d'espace analytique* (où *k-germe*) est une paire (X, S) où X est un espace analytique et $S \subset |X|$, i.e. S est un sous-ensemble de l'espace topologique sous-jacent $|X|$. Si $S = \{x\}$ on note le germe correspondant par (X, x).

Les k-germes forment une catégorie où un morphisme de (Y, T) à (X, S) est un morphisme $\phi : Y \to X$ tel que $\phi(T) \subset S$. La catégorie *k-Germs* est la catégorie de fractions de cette catégorie par le système de morphismes $\phi : Y \to X$ tels que ϕ induit un isomorphisme de Y avec un voisinage ouvert de S dans X. Ce système admet un calcul de fractions (à droite) et donc $\mathrm{Hom}_{k-Germs}((Y,T),(X,S)) = \varinjlim(\phi : V \to X), \phi(T) \subset S$ où on prend la limite sur tous V appartenant au système fondamental de voisinages de T dans Y ([Ber2] 3.4). On appelle un tel morphisme $\phi : V \to X$ un représentant du morphisme $(Y, T) \to (X, S)$.

Définition 4.2.23. Soit (X, S) un k-germe. La catégorie $\acute{E}t(X, S)$ est la catégorie des morphismes $(Y, T) \to (X, S)$ qui possédent un représentant étale $\phi : V \to X$ tel que $T = \phi^{-1}(S)$.

Notons qu'on a une équivalence $\acute{E}t(X, |X|) \simeq \acute{E}t(X)$. Si $x \in X$, $F\acute{e}t(X, x)$ désigne la sous-catégorie pleine de $\acute{E}t(X, x)$ formée par des morphismes $(Y, T) \to (X, x)$ qui ont le représentant $\phi : V \to X$ avec $V \to \phi(V)$ fini.

Théorème 4.2.24. *Soit X un espace analytique, soit $x \in X$. Alors on a une équivalence de catégories $F\acute{e}t(X, x) \xrightarrow{\sim} F\acute{e}t(\mathcal{H}(x))$ où $F\acute{e}t(\mathcal{H}(x))$ désigne la catégorie des schémas finis et étales sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{H}(x)$.

Démonstration. [Ber2] 3.4.1 □

Définissons la topologie étale sur un k-germe (X, S). Les recouvrements de $(U, T) \to (X, S) \in \acute{E}t(X, S)$ sont donnés par les familles $((U_i, T_i) \xrightarrow{f_i} (U, T))_{i \in I}$ telles que $T = \bigcup_i f_i(T_i)$. On note par $(X, S)_{\acute{e}t}$ le site ainsi obtenu. On a un morphisme de sites $i_{(X,S)} : (X, S)_{\acute{e}t} \to X_{\acute{e}t}$. Si F est un faisceau sur X (i.e. un faisceau sur le site $X_{\acute{e}t}$), on note $F_{(X,S)} = i^*_{(X,S)} F$.

Soit (X, S) est un k-germe. Si $x \in S$, alors on a le morphisme de sites $i_x : \mathcal{H}(x)_{\acute{e}t} \to (X, S)_{\acute{e}t}$ (par 3.3.18). Plus précisément, ce morphisme vient d'un morphisme $\acute{E}t(X, x) \to \acute{E}t(\mathcal{H}(x))$ obtenu par composition $\acute{E}t(X, x) \to \acute{E}t(X(x)) \to \acute{E}t(k(x)) \to \acute{E}t(\mathcal{H}(x))$, où l'on note par $\acute{E}t(X(x))$, $\acute{E}t(k(x))$ et $\acute{E}t(\mathcal{H}(x))$ les catégories des schémas étales sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$, $\operatorname{Spec} k(x)$ et $\operatorname{Spec} \mathcal{H}(x)$ respectivement.

Définition 4.2.25. Soit F est un faisceau sur (X, S). On appelle le *fibre* F_x de F en x l'image inverse $i_x^* F$.

Remarque 4.2.26. D'après 3.2.7 on peut idéntifier F_x avec un $G_{\mathcal{H}(x)}$-module discret correspondant.

Soit (X, S) un k-germe. A un ouvert $U \subset S$ on associe un ouvert $U_X \subset X$ tel que $U_X \cap S = U$. La correspondance $U \mapsto U_X$ ainsi obtenue définit un foncteur de la catégorie des ouverts de S vers $\acute{E}t(X, S)$, $U \mapsto ((U_X, S) \to (X, S))$, et ce foncteur ne dépend pas du choix des U_X (à un isomorphisme près). On obtient ainsi le morphisme de sites $\pi : (X, S)_{\acute{e}t} \to S$, où S est le site correspondant à la topologie usuelle sur S. En particulier, il existe un morphisme $X_{\acute{e}t} \to |X|$ que l'on note aussi par π.

Théorème 4.2.27. *Soit F un faisceau des groupes abéliens sur (X, S), soit $x \in S$. Alors $(\mathrm{R}^q \pi_* F)_x \simeq \mathrm{H}^q(G_{\mathcal{H}(x)}, F_x)$, $q \geq 0$.*

Démonstration. [Ber2] 4.2.4 □

4.3 Topologie quasi-étale sur un espace analytique

Démontrons d'abord la propriété suivante, qui sera basique pour la définition de la topologie quasi-étale dans la suite.

Théorème 4.3.1. *Soit $\phi : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ un morphisme étale de schémas formels $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k^\circ$-$Fsch$. Alors pour chaque $z \in \mathfrak{Z}_\eta$ il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset \mathfrak{Z}_\eta$ tels que $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de y et pour tout i on peut identifier V_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur $\mathfrak{X}_\eta$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'assertion pour ϕ de la forme $\mathrm{Spf}(B\langle f^{-1}\rangle) \to \mathrm{Spf}A$, où (comme dans 4.1.7) $B = A[T]/P \xrightarrow{\sim} A\langle t\rangle/P$, où P est un polynôme réduit et $f \in B$ tel que l'image $\widetilde{P'}$ de $g \overset{\text{def}}{=} P'$ dans $\widetilde{B}_{\widetilde{f}} = (\widetilde{A}[T]/\widetilde{P})_{\widetilde{f}}$ est inversible . Posons $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}B$, alors $\mathfrak{Z}_\eta = \{z \in \mathfrak{U}_\eta \,|\, |f(z)| = 1\}$ par 3.4.3.

Comme $\widetilde{P'}$ est inversible dans $\widetilde{B}_{\widetilde{f}}$, $|g(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}_\eta$. En effet, il existe $\tilde{b} \in \widetilde{B}$ tel que $\tilde{g}\tilde{b}\tilde{f}^l = \tilde{f}^{m+l}$ pour certains $m, l \in \mathbb{N}$. Comme $\mathfrak{Z}_\eta = \{z \in \mathfrak{U}_\eta \,|\, |f(z)| = 1\}$, alors pour tout $z \in \mathfrak{Z}_\eta$ on a $|g(z)| \cdot |b(z)| = |gb(z)| = 1$. Comme $|\ |$ est borné et multiplicative, $|g(z)| \leq \|g\| \leq 1$ et $|b(z)| \leq \|b\| \leq 1$, donc $|g(z)| = |b(z)| = 1$.

Par 4.2.18 le morphisme $\mathfrak{U}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$ est étale en point $z \in \mathfrak{U}_\eta$ ssi g est inversible dans l'anneau local correspondant, i.e. ssi $g(z) \neq 0$ par 2.3.11. Or $|g(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}_\eta$, alors $\mathfrak{Z}_\eta \subset \{z \in \mathfrak{U}_\eta \,|\, g(z) \neq 0\}$ peut être identifié avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur $\mathfrak{X}_\eta$.

Par le même procédé comme dans 4.1.7, dans le cas général on peut trouver des sous-schémas formels affines $\mathfrak{X}_1, \ldots \mathfrak{X}_n \subset \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_n \subset \mathfrak{Z}$ tels que $y \in \mathfrak{Z}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{Z}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{Z}_n$ est un voisinage de y et ϕ induit des morphismes étales de la forme $\mathrm{Spf}(B\langle f^{-1}\rangle) \to \mathrm{Spf}A$ comme ci-dessus (d'après la preuve de [Ber2] 1.3.3, cela découle de la structure du reseau τ sur un espace analytique obtenu par recollement.) Par ce qui précéde, on peut identifier $\mathfrak{Z}_{i,\eta}$ avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur $\mathfrak{X}_{i,\eta}$. Mais pour tout i on peut trouver un voisinage V_i de y dans $\mathfrak{Z}_{i,\eta}$ tel que l'on peut identifier V_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur $\mathfrak{X}_\eta$ tout entier par [Ber2] 3.4.2. Comme $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de y dans $\mathfrak{Z}_\eta$, on obtient le résultat.

□

Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques.

Définition 4.3.2. On dit que ϕ est *quasi-étale* si pour chaque point $y \in Y$ il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset Y$ tels que $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de y et pour tout i on peut idéntifier V_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur X.

Par exemple, un plongement canonique d'un domaine analytique est quasi-étale. Par 4.3.1, si $\phi \colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale de schémas formels $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Z} \in k^\circ\text{-}Fsch$, alors $\phi_\eta : \mathfrak{Z}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$ est quasi-étale.

Remarque 4.3.3. Si $\phi : Y \to X$ est quasi-étale, alors il en découle de 3.3.4 qu'il existe des domaines affinoïdes $V_1, \ldots, V_n \subset Y$, tels que $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ est un voisinage de y et pour tout i on peut idéntifier V_i avec un domaine affinoïde dans un espace k-analytique paracompact séparé (i.e. de Hausdorff) et étale sur X.

Proposition 4.3.4. *(i) Les morphismes quasi-étales sont stables par composition, par changement de base et par extension du corps de base.*

(ii) Si Y et Z sont quasi-étales sur X, alors $\phi : Z \to Y$ est quasi-étale pour tout X-morphisme ϕ.

Démonstration. Ces propriétés sont vraies pour les morphismes étales. Donc le fait que les morphismes quasi-étales sont stables par changement de base et par extension de corps de base découle de 2.3.8.

Soient $Z \xrightarrow{\psi} Y$ et $Y \xrightarrow{\phi} X$ quasi-étales. Montrons que $Z \to X$ est quasi-étale. Soient $z \in Z$, $y \in Y$, $x \in X$ tels que $y = \psi(z)$ et $x = \phi(y)$. Il existe des domaines affinoïdes $Z_1, \ldots, Z_m \subset Y$ tels que $Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$ est un voisinage de y et pour tout i on peut idéntifier Z_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique $\mathcal{Z}_i$ étale sur Y et il existe des domaines affinoïdes $Y_1, \ldots, Y_n \subset Y$ tels que $Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ est un voisinage de y et pour tout i on peut idéntifier

Y_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique $\mathcal{Y}_i$ étale sur X. D'après 3.3.9, quitte à raffiner Z_i, on peut supposer que pour chaque Z_i il existe $Y_{j(i)}$ tel que $\psi(Z_i) \subset Y_{j(i)}$. On a donc $\mathcal{Z}_i$ est étale sur $Y_{j(i)}$ et $Y_{j(i)}$ est un domaine affinoïde dans $\mathcal{Y}_{j(i)}$. D'après [Ber2] 3.4.1 et 3.2.2 on peut supposer que l'on peut idéntifier $\mathcal{Z}_i$ avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur $\mathcal{Y}_i$. D'après 2.3.8 on peut donc idéntifier Z_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur X. Le résultat en découle.

Pour démontrer (ii) notons que $\phi = pr_2 \circ \Gamma_\phi$, où pr_2 est la projection $Z \times_X Y \to Y$, qui est quasi-étale par le changement de base, Γ_ϕ est le graphe $Z \to Z \times_X Y$, il est obtenu d'un morphisme quasi-étale $Y \to Y \times_X Y$ par le changement de base. Le résultat en découle. □

Soit X un espace analytique. On note $Q\acute{e}t(X)$ la catégorie des morphismes quasi-étales $U \to X$. Par la proposition ci-dessus on peut définir la topologie de Grothendick sur $Q\acute{e}t(X)$ comme suit. Un recouvrement de $(U \to X) \in Q\acute{e}t(X)$ est une famille $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$ telle que tout point de U a un voisinage de la forme $f_{i_1}(V_1) \cup \ldots \cup f_{i_n}(V_n)$ pour certains domaines affinoïdes $V_1 \subset U_{i_1}, \ldots V_n \subset U_{i_n}$. On note $X_{q\acute{e}t}$ le site ainsi obtenu et par $X_{q\acute{e}t}\tilde{}$ la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $X_{q\acute{e}t}$. On note X_G le site obtenu en considérant la G-topologie sur X, $X_{\acute{e}t}$ est le site étale. On a ainsi des mophismes de sites : $\mu : X_{q\acute{e}t} \to X_{\acute{e}t}$ et $X_{q\acute{e}t} \to X_G$.

De la même manière comme dans 4.2 le morphisme μ induit le morphisme $\mu^* : X_{\acute{e}t}\tilde{} \to X_{q\acute{e}t}\tilde{}$ et le morphisme $\phi : Y \to X$ induit les morphismes $\phi : Y_{q\acute{e}t} \to X_{q\acute{e}t}$ et $\phi^* : X_{q\acute{e}t}\tilde{} \to Y_{q\acute{e}t}\tilde{}$.

4.4 Faisceaux moux sur des espaces analytiques

Définition 4.4.1. Un faisceau F sur un espace topologique X est dit *mou* si pour tout fermé $V \subset X$ l'application $F(X) \to F(V)$ est surjective.

D'après [God] on a les descriptions suivantes de faisceaux moux :

Théorème 4.4.2. *Soit X un espace topologique paracompact, soit F un faisceau sur X.*
(i) Si chaque point de X admet un voisinage (ouvert) U tel que $F|_U$ est mou alors F est mou.
(ii) Si F est un faisceau mou, alors F induit un faisceau mou sur tout sous-espace fermé de X. Si X est normé, alors F induit un faisceau mou sur tout sous-espace localement fermé de X.
(iii) Si F est un faisceau mou de groupes abéliens, alors $\mathrm{H}^q(X, F) = 0$, $q \geq 1$.

Démonstration. [God] II.3.4.1, II.3.4.2, II.4.4.3(b) □

Maintenant considérons le cas d'espaces analytiques.

Définition 4.4.3. On dit qu'un faisceau étale de groupes abéliens sur un espace analytique est *mou* si pour tout $x \in X$ F_x est un $G_{\mathcal{H}(x)}$-module flasque (au sens de 3.2.6) et pour tout U paracompact et étale sur X la restriction de F à la topologie usuelle de l'espace topologique sous-jacent $|U|$ est mou.

Exemple 4.4.4. Un exemple important d'un faisceau mou est un faisceau injectif. Le fait, qu'il est mou découle de [Ber2] 4.2.5 (un faisceau injectif est acyclique, donc les conditions (1) et (2) de [Ber2] 4.2.5 sont vérifiés, ce qui dit qu'un faisceau injectif est mou.)

Lemme 4.4.5. *Soit F un faisceau étale de groupes abéliens sur un espace analytique X. Si F est mou et X est paracompact, alors $\mathrm{H}^q(X, F) = 0$, $q \geq 1$.*

Démonstration. Soit $\pi : X_{ét} \to |X|$ un morphisme de sites construit au paragraphe précédent. Par [SGA4] V.5.3 on a la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(|X|, R^q\pi_*F) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X, F)$. Comme F est mou, $(R^q\pi_*F)_x = 0$ pour tout point $x \in X$, $q \geq 1$ (d'après 4.2.27). Cela implique que $R^q\pi_*F = 0$, on a donc $\mathrm{H}^q(X, F) = \mathrm{H}^q(|X|, \pi_*F)$. Cela donne que $\mathrm{H}^q(X, F) = 0$, $q \geq 1$, car $\mathrm{H}^q(|X|, \pi_*F) = 0$, $q \geq 1$ par 4.4.2 (vu que la restriction de F à la topologie usuelle de $|X|$ est mou). □

Lemme 4.4.6. *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. Si F un faisceau mou sur X, alors ϕ^*F est un faisceau mou sur Y dans les cas suivants :*

(i) ϕ est quasi-étale ;

(ii) ϕ est un morphisme canonique $\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} X\hat{\otimes}\hat{k}^a \to X$, où k^a désigne une clôture algèbrique de k.

Remarque 4.4.7. Si la valuation de k est non-triviale, alors la clôture separable k^s est dense dans k^a, i.e. $\hat{k^s} = \hat{k^a}$ ([BGR] 3.4.1/5).

Démonstration. (i) Notons que si $y \in Y$ et $x = \phi(y)$ alors on a l'inclusion $\mathcal{H}(y) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$. On peut supposer donc que $\mathcal{H}(y)^s \hookrightarrow \mathcal{H}(x)^s$, d'où $G_{\mathcal{H}(y)}$ est un sous-groupe fermé de $G_{\mathcal{H}(x)}$. De plus, on peut identifier $(\phi^*F)_y$ avec F_x par [Ber2] 4.3.1 et cette identification est compatible avec l'action de groupes $G_{\mathcal{H}(y)}$ et $G_{\mathcal{H}(x)}$. Comme F_x est un $G_{\mathcal{H}(x)}$-module flasque, on en déduit que $(\phi^*F)_y$ est un $G_{\mathcal{H}(y)}$-module flasque.
Montrons maintenant que la restriction de ϕ^*F à la topologie usuelle de $|Y|$ est mou. D'après 4.4.2 et le fait que $|Y|$ est localement paracompact (par 3.3.4), on peut supposer que $Y = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ où V_i sont des domaines affinoïdes dans Y et pour chaque i on peut identifier V_i avec un domaine affinoide dans un espace analytique paracompact U_i, tel que U_i est étale sur X. Par définition d'un faisceau mou la restriction de F à $|U_i|$ est mou, et donc 4.4.2 implique que la restriction de F à $|V_i|$ est mou car $|V_i|$ est un fermé de $|U_i|$. Cela donne que la restriction de ϕ^*F à la topologie usuelle de $|Y|$ est mou.

(ii) Soit $Z \to \bar{X}$ un morphisme étale. Comme la propriété d'être mou est locale, d'après [Ber2] 3.2.2 on peut supposer que $Z = \bar{Y}$ où Y est un espace analytique paracompact, localement compact étale sur X. Il est suffit de vérifier donc que pour tout sous-espace compact $T \subset \bar{Y}$ l'application $F(\bar{Y}) \to F(T)$ est surjective (par 4.4.2). Cela découle de [Ber2] 5.3.5.

□

4.5 Théorème de comparaison

Soit X est un espace analytique. Rapellons qu'on a noté μ le morphisme $X_{qét} \to X_{ét}$. Il induit le morphisme $\mu^* : X_{ét}^{\sim} \to X_{qét}^{\sim}$.

Théorème 4.5.1. *Soit $f : U \to X$ un morphisme quasi-étale, soit F un faisceau étale sur X. Alors*

(i) $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^*F(U)$, où f^* est un morphisme d'image inverse $X_{ét}^{\sim} \to U_{ét}^{\sim}$;

(ii) si F est un faisceau de groupes abéliens, alors $\mathrm{H}^q(U, f^*F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U_{qét}, \mu^*F)$, $q \geq 0$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème on procéde par plusieurs étapes.

Étape 1. Considérons un préfaisceau sur $X_{qét}$ qui à chaque morphisme quasi-étale $V \xrightarrow{g} X$ associe $g^*F(V)$.

Lemme 4.5.2. *Le préfaisceau $V \mapsto g^*F(V)$ est un faisceau sur $X_{qét}$.*

Démonstration. Soit $f : U \to X$ un morphisme quasi-étale. Soit $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i\in I}$ un recouvrement de U, g_i sont quasi-étales. Posons $f_i = f \circ g_i : U_i \to U \to X$ et f_{ij} les morphismes $U_{ij} \to U \to X$, $U_{ij} \overset{\text{def}}{=} U_i \times_U U_j$. Il s'agit de vérifier que la suite

$$(f^*F(U)) \to \prod_i (f_i^*F(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f_{ij}^*F(U_{ij})$$

est exacte.

Supposons d'abord que U est un espace affinoïde. Comme g_i sont quasi-étales, on peut supposer (quitte à raffiner le recouvrement) que la famille $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i\in I}$ est finie et pour chaque i on peut idéntifier U_i avec un domaine affinoïde dans un espace analytique V_i séparé et étale sur U. Notons que si $\mathcal{U}_i$ est un voisinage ouvert de U_i dans V_i alors le morphisme $\mathcal{U}_i \to U$ (i.e. le morphisme $\mathcal{U}_i \to V_i \to U$) est étale. Comme F est un faisceau étale, on a une suite exacte

$$(f^*F(U)) \to \prod_i (f^*F(\mathcal{U}_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f^*F(\mathcal{U}_{ij}),$$

où $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_i \times_U \mathcal{U}_j$. Par [Ber2] 4.3.5(1) on a que $f_i^*F(U_i) = \varinjlim f^*F(\mathcal{U}_i)$ et $f_i^*F(U_{ij}) = \varinjlim f^*F(\mathcal{U}_{ij})$ quand $\mathcal{U}_i \to U$. Donc la suite $(f^*F(U)) \to \prod_i (f_i^*F(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f_{ij}^*F(U_{ij})$ est exacte comme la limite inductive filtrant des suites exactes.

Dans le cas général on peut supposer que U est paracompact (d'aprés 3.3.4 et le fait que l'inclusion d'un ouvert dans l'espace analytique est étale). Ensuite, comme g_i sont quasi-étales et l'assertion est vérifiée pour un espace affinoïde, on peut supposer que $(U_i \to U)_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini par des domaines affinoïdes.

Comme les domaines affinoïdes sont fermés (cf. 3.3.8), dans ce cas le résultat découle de [Ber2] 4.3 et [God] II.1.3.1 (qui dit que si F est un faisceau sur X et M_i est un recouvrement fermé localement fini de X alors la suite $F(X) \to \prod_i (F(M_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(M_i \cap M_j)$ est exacte). $\square$

Étape 2.

Lemme 4.5.3. *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme étale d'epaces analytiques avec X un espace de Hausdorff. Soit C un compact dans Y. Supposons que ϕ est injective sur C et pour tout $y \in Y$ on a un isomorphisme $\mathcal{H}(\phi(y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y)$. Alors il existe un voisinage V de C dans Y tel que ϕ induit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \phi(V)$.*

Démonstration. D'après 4.2.24 ϕ est un isomorphisme local en tout point $y \in C$. On peut donc supposer que ϕ est un isomorphisme local en tout point $y \in Y$. Pour conclure il suffit donc de trouver un voisinage V de C dans Y tel que ϕ est injective sur V. Par la compacité on trouve des ouverts $V_1, \ldots, V_n \subset Y$, telles que $V_i \xrightarrow{\sim} \phi(V_i)$ et $C \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Par récurrence il suffit de considerer le cas $n = 2$ (i.e. de construire V au cas où $n = 2$).

Comme X est de Hausdorff, alors l'image de $|X|$ par le morphisme $\delta : |X| \to |X| \times |X|$ est fermée. Soit $h = (\phi, \phi)$ le morphisme $|Y| \times |Y| \to |X| \times |X|$. On a donc $\{(y_1, y_2) \,|\, \phi(y_1) = \phi(y_2)\} = |Y| \times_{|X|} |Y| = h^{-1}(\delta(|X|))$ est fermé dans $|Y| \times |Y|$. Alors son complémentaire W est ouvert. Comme ϕ est injective sur C, $W \supset \{(y_1, y_2) \,|\, y_1 \in C\backslash V_1,\ y_2 \in C\backslash V_2\}$. Il existe donc des voisinages $C\backslash V_1 \subset W_1 \subset V_1$ et $C\backslash V_2 \subset W_2 \subset V_2$ tels que $|W_1| \times |W_2|$ ne rencontre pas $|Y| \times_{|X|} |Y| = \{(y_1, y_2) \,|\, \phi(y_1) = \phi(y_2)\}$, i.e. ϕ est injective sur $W_1 \cup W_2$. De plus, ϕ est injective sur $W_1 \cup (V_1 \cap V_2)$, car $W_1 \cup (V_1 \cap V_2) \subset V_1$. De même, ϕ est injective sur $W_2 \cup (V_1 \cap V_2)$ Alors l'ouvert $V = W_1 \cup W_2 \cup (V_1 \cap V_2)$ est un ouvert cherché : il contient C et ϕ est injective sur V. $\square$

Étape 3.

Lemme 4.5.4. *Soit $(U \xrightarrow{f} X) \in Q\acute{e}t(X)$. Alors il existe un recouvrement $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i\in I}$ de $U \to X$ dans $X_{q\acute{e}t}$ tel que $(fg_i)^*F(U_i) \xrightarrow{\sim} (\mu^*F)(U_i)$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soit $\mu^p F$ un préfaisceau sur $X_{q\acute{e}t}$ défini par $U \mapsto \varinjlim F(Y)$ où l'on prend la limite sur tous les X-morphismes $U \to Y$ où Y est étale sur X. Par définition de faisceau $\mu^* F$, il est un faisceau associé à μ^p. Pour conclure il suffit donc de montrer que $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^p F(U)$ pour tout $U \xrightarrow{f} X$ tel que U est affinoïde et l'on peut identifier U avec un domaine affinoïde dans un espace analytique $\mathcal{V}$ séparé et étale sur X (on obtient ainsi un recouvrement cherché).

Par [Ber2] 4.3 on a $f^*F(U) = \varinjlim F(V)$ où V parcours les voisinages ouverts de U dans $\mathcal{V}$. Pour montrer que $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^p F(U)$ il suffit donc de montrer que chaque X-morphisme $U \to Y$ avec $Y \to X$ étale s'étend à un X-morphisme $\mathcal{U} \to Y$ où $\mathcal{U}$ est un voisinage de U dans $\mathcal{V}$.

Pour cela notons que le morphisme $pr_2 : Y \times_X \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ vérifie les conditions du lemme de l'étape précédent, où l'on prend C l'image de U dans $Y \times_X \mathcal{V}$ (le morphisme $U \to Y \times_X \mathcal{V}$ vient de X-morphismes $U \to Y$ et $U \to \mathcal{V}$, les conditions du lemme 4.5.3 sont vérifiées car U est un domaine affinoïde dans $\mathcal{V}$). Donc il existe un voisinage ouvert W de C dans $Y \times_X \mathcal{V}$ tel que $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} pr_2(W)$. On a donc un X-morphisme $\mathcal{U} \to Y$ qui vient de morphisme $W \to Y \times_X \mathcal{V} \to Y$. Le morphisme $\mathcal{U} \to Y$ prolonge le morphisme $U \to Y$ et $\mathcal{U}$ un voisinage de U dans V. Cela fini la preuve du lemme.

□

Étape 4. Les étapes 1 et 3 impliquent l'assertion (i) du théorème. Notons cependant que le fait que $f^pF(U) = \mu^p(U) = \varinjlim F(V)$, où l'on prend la limite sur tous X-morphismes $U \to V$ avec $V \to X$ étale, n'implique pas directement (i) car f^*F est un faisceau sur $U_{\acute{e}t}$ mais μ^*F est un faisceau sur $U_{q\acute{e}t}$.

Étape 5. Démonrons maintenant l'assertion (ii). Notons d'abord qu'un recouvrement de U par des ouverts est un recouvrement pour la topologie étale et pour la topologie quasi-étale. Soit $\mathcal{V}$ un tel recouvrement. Par [SGA4] V.3.3 il induit donc les suites spectrales de Leray $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(f^*F)) \implies H^{p+q}(U_{\acute{e}t}, f^*F)$ et $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(\mu^*F)) \implies H^{p+q}(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F)$, où $\mathcal{H}^q(f^*F)$ (resp. $\mathcal{H}^q(\mu^*F)$) désigne le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(V_{\acute{e}t}, f^*F|_V)$ (resp. $V \mapsto H^q(V_{q\acute{e}t}, \mu^*F|_V)$, les $\check{H}^\bullet$ désignent les groupes de cohomologie de Čech associés au recouvrement $\mathcal{V}$. On peut donc supposer que U est suffisamment petit et donc qu'il est paracompact (par 3.3.4).

Ensuite, considérons un recouvrement $\mathcal{W}$ de U par des domaines affinoïdes. Comme U est paracompact, on peut supposer qu'il est localement fini. Ce recouvrement est un recouvrement de U pour la topologie quasi-étale. Il induit donc la suite spectrale de Leray qui converge vers $\mathrm{H}^\bullet(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F)$. Par [Ber2] 4.3.7 on a aussi la suite spectrale pour la topologie étale $\check{H}^p(\mathcal{W}, \mathcal{H}^q(f^*F)) \implies H^{p+q}(U_{\acute{e}t}, f^*F)$. Pour conclure il suffit donc de montrer l'assertion au cas où U est affinoïde et l'on peut l'idéntifier U avec un domaine affinoïde dans un espace analytique paracompact V étale sur X.

Notons que l'assertion est vrai au cas $q = 0$ par (i). Considérons la résolution injective $F \to I^\bullet$ du faisceau F sur $X_{\acute{e}t}$. On a donc les résolutions $f^*F \to fI^\bullet$ et $\mu^*F \to \mu^*I^\bullet$. Comme un faisceau injectif est mou, les f^*I^j sont moux par 4.4.6. Comme U est paracompact, f^*I^j sont acycliques et donc on peut calculer la cohomologie de $H^q(U, f^*F)$ comme les groupes de cohomologie du complexe $f^*I^\bullet(U)$. Par (i) ce complexe coïncide avec le complexe $\mu^*I^\bullet(U)$. Pour conclure il suffit donc de démontrer que l'on peut calculer les groupes de cohomologie $H^q(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F)$ à l'aide de la résolution $\mu^*F \to \mu^*I^\bullet$. Pour cela il suffit de montrer que les μ^*I^j sonc acycliques.

Montrons alors que si F est injective alors $H^q(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F) = 0$, $q \geq 1$. Pour cela utilisons la cohomologie de Čech. Si on a un récouvrement quasi-étale de U, alors on peut le raffiné en recouvrement fini $\mathcal{U} = (U_i \to U)_{i \in I}$, où pour chaque i, U_i est affinoïde et on peut l'identifier avec un domaine affinoïde dans un espace analytique V_i étale sur U. Pour montrer que $H^q(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F) = 0$, $q \geq 1$ il sufffit donc de montrer que $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mu^*F) = 0$, $q \geq 1$. Considérons le complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{U}, F)$ correspondant.

Rappelons que l'on peut idéntifier U avec un domaine affinoïde dans un espace analytique paracompact V qui est étale sur X. Soient $\mathcal{V}_i$ des voisinages de U_i dans V, $i \in I$. Quitte à changer V par l'union de $\mathcal{V}_i$, on peut supposer que $\mathcal{V}_i \to V$ est un recouvrement étale de V. Or V est étale sur X, $F|_V$ est injectif, donc le complexe de Čech $C^\bullet(\mathcal{V}, F)$ associé à un recouvrement $\mathcal{V}$ de V est exact. Le complexe $C^\bullet(\mathcal{U}, F)$ est donc exact aussi comme la limite inductive filtrant de complexes exacts $C^\bullet(\mathcal{V}, F)$ (quand $\mathcal{V}_i \to U_i$). Cela montre que si F est injective alors $H^q(U_{q\acute{e}t}, \mu^* F) = 0$, $q \geq 1$, ce qui finit la preuve du théorème.

$\square$

Passons à quelques consequances de ce théorème.

Corollaire 4.5.5. *Soit $F \in X_{\acute{e}t}\tilde{}$. Alors*
(i) $F \xrightarrow{\sim} \mu_* \mu^* F$;
(ii) le foncteur $\mu^* : X_{\acute{e}t}\tilde{} \to X_{q\acute{e}t}\tilde{}$ est pleinement fidèle.

Démonstration. (i) Soit $(U \xrightarrow{f} X) \in \acute{E}t(X)$. Alors $f^* F(U) = F(U)$. D'autre part, $f^* F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^* F(U) = \mu_* \mu^* F(U)$, car le morphisme $\mu_* : X_{q\acute{e}t}\tilde{} \to X_{\acute{e}t}\tilde{}$ est le morphisme de restriction. On a donc $F \xrightarrow{\sim} \mu_* \mu^* F$. Pour démontrer (ii) écrivons l'egalité obtenue par adjonction : $\mathrm{Hom}(\mu^* F, \mu^* G) \simeq \mathrm{Hom}(F, \mu_* \mu^* G) \simeq \mathrm{Hom}(F, G)$. $\square$

Corollaire 4.5.6. *Soit X un espace analytiques. Soit F un faisceau étale abelien sur X. Pour $q \geq 0$ on note $\mathcal{H}^q(F)$ le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(V, F|_V)$ sur $X_{q\acute{e}t}$ où $F|_V$ désigne le faisceau $f^* F$ pour $V \xrightarrow{f} X$ quasi-étale. Soit $\mathcal{V} = (V_i \to X)_{i \in I}$ un recouvrement quasi-étale. Alors il existe une suite spectrale $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{\acute{e}t}, F)$.*

Démonstration. L'assertion découle de l'existence de la suite spectrale de Leray et de (ii) du théorème (i.e. $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(F)) \simeq \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(\mu^* F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{q\acute{e}t}, \mu^* F) \simeq H^{p+q}(X_{\acute{e}t}, F)$). $\square$

Corollaire 4.5.7. *Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme compact d'espaces analytiques, soit F un faisceau étale sur Y. Alors $\mu^*(\phi_* F) \xrightarrow{\sim} \phi_*(\mu^* F)$. Si F un faisceau étale abelien sur Y, alors $\mu^*(R^q \phi_* F) \xrightarrow{\sim} R^q \phi_*(\mu^* F)$, $q \geq 0$.*

Démonstration. Soit $f : X' \to X$ un morphisme quasi-étale. D'après le théorème on a $\mu^* \phi_* F(X') = f^* \phi_* F(X')$.

Comme ϕ est compact, $f^* \phi_* F(X') \xrightarrow{\sim} \phi'_*(f'^* F)(X')$, où ϕ' est un morphisme induit $Y' := Y \times_X X' \to X'$ et f' est un morphisme $Y \times_X X' \to Y$. En effet, si f est étale, alors $f^* \phi_* F(X') = \phi_* F(X') = F(Y \times_X X')$, $\phi'_* f'^* F(X') = \phi'_* F(X') = F(Y \times_X X')$, d'où on obtient le résultat. Dans le cas général, d'après l'étape 1 on peut supposer que X' est un domaine affinoïde dans l'espace analytique $\mathcal{X}'$ étale sur X :

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_X X' & \longrightarrow & Y \times_X \mathcal{X}' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & \mathcal{X}' & \longrightarrow & X \end{array}$$

D'après [Ber2] 4.3.6 on a donc $f^* \phi_* F(X') = \varinjlim F(\mathcal{U} \times_X Y)$ où $\mathcal{U}$ parcours les voisinages ouverts de X' dans $\mathcal{X}'$. Comme ϕ est compact, ϕ' et $\phi'' : Y \times_X \mathcal{X}' \to \mathcal{X}'$ le sont aussi, donc $\phi'_*(f'^* F)(X') = (f'^* F)(Y \times_X X') = \varinjlim F(\mathcal{U} \times_X Y)$ d'après [Ber2] 4.3.6 encore. On a donc $f^* \phi_* F(X') \xrightarrow{\sim} \phi'_*(f'^* F)(X')$. On obtient donc $\mu^* \phi_* F(X') \xrightarrow{\sim} f'^* F(Y \times_X X') \xrightarrow{\sim} \mu^* F(Y \times_X X') = \phi_* \mu^* F(X')$.

De même comme dans la preuve du théorème, pour démontrer le reste il suffit de voir que si F un faisceau abelien injectif, alors $R^q \phi_*(\mu^* F) = 0$, $q \geq 1$. Cela découle de la preuve de *(ii)* du théorème. $\square$

5 Foncteur de cycles évanescents

5.1 Construction et propriétés basiques

Soit $\mathfrak{X} \in k^\circ\text{-}Fsch$. Soit $\sigma : \mathfrak{Z}_\mathfrak{s} \mapsto \mathfrak{Z}$ l'inverse du foncteur de la catégorie des schémas formels étales sur $\mathfrak{X}$ vers la catégorie des schémas étales sur $\mathfrak{X}_s$ de 4.1.7. Ce dernier est une équivalence, donc σ est bien défini.

Lemme 5.1.1. *La composition de σ avec un foncteur $\mathfrak{Z} \mapsto \mathfrak{Z}_\eta$ défini un morphisme de sites $\nu : \mathfrak{X}_{\eta,\, q\acute{e}t} \to \mathfrak{X}_{s,\, \acute{e}t}$, $\mathfrak{Z}_s \mapsto \mathfrak{Z}_\eta$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que

(i) si $\phi : \mathfrak{Z}_s \to \mathfrak{X}_s$ est étale, alors $\nu(\phi) : \mathfrak{Z}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$ est quasi-étale.

(ii) Si $(\mathfrak{Z}_{s,\, i} \xrightarrow{f_{s,i}} \mathfrak{Z}_s)_{i\in I}$ est un recouvrement de $\mathfrak{Z}_s$, i.e. $\bigcup_i f_{s,i}(\mathfrak{Z}_{s,\, i}) = \mathfrak{Z}_s$, alors $\bigcup_i f_{\eta,\, i}(\mathfrak{Z}_{\eta,\, i}) = \mathfrak{Z}_\eta$.

On voit que (i) découle de 4.3.1 et (ii) découle de 4.1.9. □

On obtient ainsi un foncteur $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \nu_*\mu^* : \mathfrak{X}_{\eta,\, \acute{e}t}{}^\sim \to \mathfrak{X}_{\eta,\, q\acute{e}t}{}^\sim \to \mathfrak{X}_{s,\, \acute{e}t}{}^\sim$, qui est exacte à gauche (car ν_* est exacte à gauche et μ^* est exacte, cf.[Ka] 17.5.2). Pour un corps K on note Θ_K le foncteur obtenu de la même manière.

Si $f : Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques et F un faisceau sur X on note $F(Y)$ (resp. $H^q(Y, F)$) pour $f^*F(Y)$ (resp. $H^q(Y, f^*F)$).

Proposition 5.1.2. *Soit F un faisceau étale sur $\mathfrak{X}_\eta$.*

(i) Si $\mathfrak{Z}_s$ est étale sur $\mathfrak{X}_s$, alors $\Theta(F)(\mathfrak{Z}_s) = F(\mathfrak{Z}_\eta)$.

(ii) Si F est un faisceau de groupes abéliens, alors $R^q\Theta(F)$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Z}_s \mapsto H^q(\mathfrak{Z}_\eta, F)$.

(iii) Si F est un faisceau mou de groupes abéliens, alors $\Theta(F)$ est flasque.

(iv) Si $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale dans k°-$Fsch$ F est un faisceau de groupes abéliens, alors $R^q\Theta(F)|_{\mathfrak{Z}_s} \xrightarrow{\sim} R^q\Theta(F|_{\mathfrak{Z}_\eta})$.

(v) Si F est un faisceau de groupes abéliens, alors il existe une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_s, R^q\Theta(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_\eta, F)$.

Démonstration. (i) Par construction de ν on a $\Theta(F)(\mathfrak{Z}_s) = \nu_*\mu^*(F)(\mathfrak{Z}_s) = \mu^*(F)(\mathfrak{Z}_\eta) =$[par 4.5.1]$=F(\mathfrak{Z}_\eta)$

(ii) D'après [SGA4] V.5.1.1 le faisceau $R^q\Theta(F) = R^q\nu_*\mu^*(F)$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Z}_s \mapsto H^q(\mathfrak{Z}_{\eta,\, q\acute{e}t}, \mu^*F) = H^q(\mathfrak{Z}_\eta, F)$ par 4.5.1.

(iii) Par 3.2.6 il faut montrer que $\check{H}^q(\mathcal{V}, \Theta(F)) = 0$, $q \geq 1$ pour un recouvrement étale $\mathcal{V} = (\mathfrak{Z}_{s,\, i} \to \mathfrak{Z}_s)_{i\in I}$ dans $\mathfrak{X}_{s,\, \acute{e}t}{}^\sim$. Par (i) $\check{H}^q(\mathcal{V}, \Theta(F)) = \check{H}^q(\mathcal{V}_\eta, F)$ où $\mathcal{V}_\eta$ est un recouvrement quasi-étale $(\mathfrak{Z}_{\eta,\, i} \to \mathfrak{Z}_\eta)$. D'après 4.5.6 on a une suite spectrale $\check{H}^p(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{Z}_\eta, F)$, ce qui implique que $\check{H}^p(\mathcal{V}_\eta, F) = H^p(\mathfrak{Z}_\eta, F)$, puisque $\mathfrak{Z}_{\eta,\, i}$ sont paracompacts par construction et donc $\mathcal{H}^q(F) = 0$, $q \geq 1$ par 4.4.6. Comme $\mathfrak{Z}_\eta$ est paracompact aussi, $H^p(\mathfrak{Z}_\eta, F) = 0$ d'après 4.4.6 encore et on obtient ainsi (iii).

(iv) Cela découle directement de (ii).

(v) Comme $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \nu_*\mu^*$, on a une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_s, R^q\Theta(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\eta,\, q\acute{e}t}, \mu^*F)$. D'après 4.5.1(ii) $H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\eta,\, q\acute{e}t}, \mu^*F) = H^{p+q}(\mathfrak{X}_\eta, F)$, le résultat en découle.

□

Définissons maintenant le foncteur de cycles évanescents. Soit $\mathfrak{X} \in k^\circ\text{-}Fsch$. Notons $\bar{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X}\hat{\otimes}(\hat{k^s})^\circ$. C'est un schéma formel sur $(\hat{k^s})^\circ$, où k^s désigne la clôture séparable de k. Notons $\mathfrak{X}_{\bar{s}} = \mathfrak{X}_s \otimes \widetilde{k^s}$ sa fibre spéciale, $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}} = \mathfrak{X}_\eta\hat{\otimes}\hat{k^s}$ la fibre générique. Soit F un faisceau étale sur $\mathfrak{X}_{\eta,\, \acute{e}t}$. Notons $\bar{F} \in \mathfrak{X}_{\bar{\eta},\, \acute{e}t}{}^\sim$ l'image inverse de F (on a le morphisme $\operatorname{Cat}\mathfrak{X}_{\eta,\, \acute{e}t} \to \operatorname{Cat}\mathfrak{X}_{\bar{\eta},\, \acute{e}t}$ qui vient d'un morphisme $(U \to \mathfrak{X}_\eta) \mapsto (U\hat{\otimes}\hat{k^s} \to \mathfrak{X}_{\bar\eta})$).

Définition 5.1.3. *Le foncteur de cycles evanescents* $\Psi_\eta : \mathfrak{X}_{\eta,\acute{e}t}\tilde{} \to \mathfrak{X}_{\bar s\,\acute{e}t}\tilde{}$ est le foncteur $F \mapsto \Psi_\eta(F) = \Theta_{\hat{k^s}}(\bar F)$.

Introduisons quelques notations. Soit K un corps sur k, on suppose que la valuation de K prolonge la valuation de k. On note $\mathfrak{X}_{s_K}$ et $\mathfrak{X}_{\eta_K}$ la fibre spéciale et la fibre générique respectivement du schéma formel $\mathfrak{X}_K = \mathfrak{X}\hat{\otimes}_{k^\circ}\hat{K}^\circ$ sur $\hat{K}^\circ$ (on a $\mathfrak{X}_{s_K} = \mathfrak{X}_s \otimes \widetilde{K}$ et $\mathfrak{X}_{\eta_K} = \mathfrak{X}_\eta\hat{\otimes}\hat{K}$). Si F est un faisceau sur $\mathfrak{X}_\eta$, on note F_K l'image inverse de F sur $\mathfrak{X}_{\eta_K}$.

Posons $G_\eta \overset{\text{def}}{=} G(k^s/k)$ le groupe de Galois de l'extension k^s/k, $G_s \overset{\text{def}}{=} G(\tilde{k^s}/\tilde{k})$. Le groupe G_η agit (à gauche) sur $\mathfrak{X}_{\bar\eta,\acute{e}t}$ par transport de structure. Cette action induit l'action de G_η sur $\bar F$. Plus précisément, si $g \in G_\eta$, on pose $g.\bar F(U) \overset{\text{def}}{=} \bar F(g.U)$, où $U \to \mathfrak{X}_{\bar\eta}$ est étale. Cette action induit l'action de G_η sur $\Psi_\eta(F) = \Theta_{\hat{k^s}}(\bar F)$ compatible avec l'action de G_s sur $\mathfrak{X}_{\bar s}$ (ou l'on voit G_s comme un quotient de G_η d'après [Ber2] 2.4.4), i.e. si $g \in G_\eta$ et $\tilde g \in G_s$ un élément correspondant, on a $g.\Psi_\eta(F) \overset{\text{def}}{=} \Theta_{\hat{k^s}}(g.\bar F) = \tilde g.\Psi_\eta(F)$, où on pose $\tilde g.\Psi_\eta(F)(U) \overset{\text{def}}{=} \Psi_\eta(F)(\tilde g.U)$ pour $U \to \mathfrak{X}_{\bar s}$ étale.

Définition 5.1.4. Soit G un groupe profini qui agit sur un faisceau $F \in \mathfrak{X}_{\bar s,\acute{e}t}\tilde{}$. On dit que l'action de G est *continue* si pour tout $\mathfrak{U}_s$ quasi-compact et étale sur $\mathfrak{X}_s$ le groupe G agit continûment sur l'ensemble discret $F(\mathfrak{U}_{\bar s})$, i.e. l'application $G \times F(\mathfrak{U}_{\bar s}) \to F(\mathfrak{U}_{\bar s})$ est continue (cf.[SGA7]).

Remarque 5.1.5. On appelle *groupe profini* un groupe topologique qui est limite projective de groupes finis (munis chacun de la topologue discrète). Par exemple, si K est un corps, alors le groupe de Galois $G(K^s/K)$ est profini, car par construction c'est la limite projective des groupes de Galois $G(L_i/K)$ des extensions galoisiennes finies L_i/K continues dans K^s/K.

Lemme 5.1.6. *Soit F un faisceau étale abélien sur $\mathfrak{X}_\eta$. Alors $\Psi_\eta(F) = \varinjlim \bar{i}_K^*(\Theta_K(F_K))$ où l'on prend la limite sur toutes sous-extensions finies de k^s/k et $\bar{i}_K$ désigne le morphime canonique $\mathfrak{X}_{\bar s} \to \mathfrak{X}_{s_K}$. En particulier, l'action de G_η sur $\Psi_\eta(F)$ est continue.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}_s$ quasi-compact et étale sur $\mathfrak{X}_s$. Alors l'espace analytique $\mathfrak{U}_\eta$ est compact, donc $F(\mathfrak{U}_\eta\hat{\otimes}\hat{k^s}) = \varinjlim F(\mathfrak{U}_\eta\hat{\otimes}K)$ par [Ber2] 5.3.4, ce qui donne le résultat car pour tout schéma étale sur $\mathfrak{X}_{\bar s}$ il existe un recouvrement étale par des schémas $\mathfrak{U}_{\bar s}$, où $\mathfrak{U}_s$ est affine (et donc quasi-compact) et étale sur $\mathfrak{X}_s$. L'action de G_η sur $\Psi_\eta(F)$ est continue, car G_η agit sur $\bar{i}_K^*(\Theta_K(F_K))$ via $\mathrm{Gal}(K/k)$. □

On obtient ainsi que Ψ_η est un foncteur de la catégorie $\mathfrak{X}_{\eta,\acute{e}t}\tilde{}$ vers la catégorie des G_η-faisceaux étales sur $\mathfrak{X}_{\bar s}$ (i.e. la catégorie des faisceaux étales sur $\mathfrak{X}_{\bar s}$ munis d'une action continue de G_η, compatible avec l'action de G_s sur $\mathfrak{X}_s$). Notons $S_{G_\eta}(\mathfrak{X}_{\bar s})$ la catégorie des G_η-faisceaux étales de groupes abéliens sur $\mathfrak{X}_{\bar s}$. Alors Ψ_η définit un foncteur $S(\mathfrak{X}_\eta) \to S_{G_\eta}(\mathfrak{X}_{\bar s})$, ce qui donne les foncteurs dérivés $R^q\Psi_\eta : S(\mathfrak{X}_\eta) \to S_{G_\eta}(\mathfrak{X}_{\bar s})$.

Proposition 5.1.7. *Soit F un faisceau étale de groupes abéliens sur $\mathfrak{X}_\eta$. Alors*

(i) $R^q\Psi_\eta(F) = \varinjlim R^q(\Theta_K(F_K))$ où l'on prend la limite sur tous sous-extensions finies de k^s/k ;

(ii) si F est mou alors le faisceau $\Psi_\eta(F)$ est flasque ;

(iii) si $\phi : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale dans k°-Fsch, alors $R^q\Psi_\eta(F)|_{\mathfrak{Z}_s} \xrightarrow{\sim} R^q\Psi_\eta(F|_{\mathfrak{Z}_\eta})$, $q \geq 0$;

(iv) il existe une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_{\bar s}, R^q\Psi_\eta(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\bar\eta}, F)$.

Démonstration. D'après [Ber2] 5.3.5. $H^q_c(F(\mathfrak{U}_\eta\hat{\otimes}\hat{k^s})) = \varinjlim H^q_c(F(\mathfrak{U}_\eta\hat{\otimes}K))$ pour $\mathfrak{U}_s$ quasi-compact et étale sur $\mathfrak{X}_s$. On montre donc (i) par le même procédé comme dans le lemme ci-dessus. Si F est mou, alors $\overline{F}$ l'est aussi par 4.4.2, donc (ii) découle de 5.1.2(ii). On vérifie (iii) et (iv) de même comme dans de 5.1.2. □

Soit $\mathfrak{X} \in k^\circ\text{-}Fsch$. Dans la suite de ce paragraphe on suppose que le morphisme canonique $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spf}(k^\circ)$ se factorise en $\mathfrak{X} \to \mathfrak{T} \to \mathrm{Spf}(k^\circ)$, où $\mathfrak{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Spf}(k^\circ\langle S\rangle)$ est la completion formelle de la droite affine (2.4.7). Introduisons quelques notations.

- $t \in \mathfrak{T}_\eta$ est le point correspondant à la norme sur $k\langle S\rangle$ (la norme est donnée par le maximum des valuations de coefficients).
- $s' \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)$, i.e. s' est le point générique de $\mathfrak{T}_s = \tilde{k}[S]$.
- $\mathcal{H}(t)$ est le corps résiduel complété correspondant à t. On a alors un morphisme canonique $\mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t)) \to \mathrm{Spf}(k\langle S\rangle)$. Par [Ber1] 2.4.4(ii) on a $\pi^{-1}(s') = t$ et $\widetilde{\mathcal{H}(t)} = \tilde{k}(S) = k(s')$, où $\tilde{k}(S)$ est le corps de fractions de $\tilde{k}[S]$.
- $\mathfrak{X}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{T}} \mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t)^\circ) = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(k^\circ\langle S\rangle)} \mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t)^\circ)$. On a $\mathfrak{X}' \in \mathcal{H}(t)^\circ\text{-}Fsch$.
- $\mathfrak{X}'_{s'}$ est la fibre spéciale de $\mathfrak{X}'$, on voit que $\mathfrak{X}'_{s'} = \mathfrak{X}_s \times_{\mathfrak{T}_s} \tilde{k}(S) = (\mathfrak{X}_s)_{s'}$ est la fibre du morphisme $\mathfrak{X}_s \to \mathfrak{T}_s$ en point s (le morphisme $\mathfrak{X}_s \to \mathfrak{T}_s$ vient du morphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$).
- $\mathfrak{X}'_{\eta'}$ est la fibre générique de $\mathfrak{X}'$, on voit que $\mathfrak{X}'_{\eta'} = \mathfrak{X}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathcal{H}(t) = (\mathfrak{X}_\eta)_t$ est la fibre du morphisme $\mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{T}_\eta$ en point t.
- Θ' est le foncteur $\widetilde{\mathfrak{X}'_{\eta',\acute{e}t}} \to \widetilde{\mathfrak{X}'_{\eta',q\acute{e}t}} \to \widetilde{\mathfrak{X}'_{s',\acute{e}t}}$.
- $\Psi_{\eta'}$ est le foncteur de cycles evanescents $F \mapsto \Theta_{\widehat{\mathcal{H}(t)^s}}(F)$.
- $\lambda : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est le morphisme canonique, il induit les morphismes $\lambda_s : \mathfrak{X}'_{s'} \to \mathfrak{X}_s$ et $\lambda_\eta : \mathfrak{X}'_{\eta'} \to \mathfrak{X}_\eta$.
- Si F est un faiceau étale sur $\mathfrak{X}_\eta$, on pose $F' \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^*_\eta F \in \mathfrak{X}'_{\eta',\acute{e}t}$.
- $\lambda_{\bar{s}} : \mathfrak{X}'_{\bar{s}'} = (\mathfrak{X}_{\bar{s}})_{s'} \to \mathfrak{X}_{\bar{s}}$ est le morphisme induit par l'inclusion $k^s \hookrightarrow \mathcal{H}(t)^s$.

Proposition 5.1.8. *Soit F un faisceau étale de groupes abéliens sur $\mathfrak{X}_\eta$. Soit $q \geq 0$. Alors il existe un isomorphisme canonique $\lambda^*_s(R^q\Theta(F)) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(F')$.*

Démonstration. De la même manière comme dans 4.4.6 on voit que si F est un faisceau mou, alors $\lambda^*_\eta F$ l'est aussi (en effet, on peut voir $\mathfrak{X}'_{\eta'}$ comme un fermé dans $\mathfrak{X}_\eta$, car c'est une fibre de morphisme $\mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{T}_\eta$, donc la restriction de $\lambda^*_\eta F$ en $|\mathfrak{X}'_{\eta'}|$ est un faisceau mou). Par 5.1.2(ii) et les faisceaux $\Theta(F)$ et $\Theta'(F')$ sont flasques. Il en résulte qu'il suffit de prouver l'assertion pour $q = 0$.

Notons ensuite que l'assertion est locale par rapport à $\mathfrak{X}$, donc on peut le supposer affine. Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma affine étale sur $\mathfrak{X}'_{s'}$. Par la localité on peut supposer que $\mathfrak{Z}$ est de la forme $\mathfrak{U}'_{s'}$, où $\mathfrak{U}$ est un schéma formel affine étale sur $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{U}'_{s'} = (\mathfrak{U}_s)_{s'}$, on a que le faisceau $\lambda^*_s(\Theta(F))$ est associé au préfaisceau $\lambda^p_s(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = \varinjlim \Theta(F)(\mathfrak{U}_s \times_{\mathfrak{T}_s} \mathfrak{V}_s)$, où $\mathfrak{V}_s$ parcours les voisinages ouverts de s' dans $\mathfrak{T}_s$. Par construction de Θ on a alors : $\lambda^p_s(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = \varinjlim F(\mathfrak{U}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathfrak{V}_\eta)$. Or l'on peut voir $\mathfrak{U}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathfrak{V}_\eta$ comme un domaine analytique dans $\mathfrak{U}_\eta$ et l'intersection de tous ces domaines est $\mathfrak{U}'_{\eta'} = (\mathfrak{U}_\eta)_t$, on a $\lambda^p_s(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = F((\mathfrak{U}_\eta)_t) = \lambda^*_\eta F(\mathfrak{U}'_{\eta'}) = \Theta'(F')(\mathfrak{U}'_{s'})$, d'où on obtient le résultat.

□

5.2 Foncteur des cycles évanescents : le cas des schémas

Dans cette section on s'interesse au foncteur de cycles évanescents dans le cas de schémas sur l'anneau local Hensélien et on établit le lien avec le foncteur construit pour des schémas formels.

Soit $\mathcal{S}$ le spectre d'anneau local Hensélien : $S = \mathrm{Spec}\, k^\circ$, où k° est l'anneau d'éntiers de corps de valuation k (ici, comme dans [SGA7], on suppose que la valuation est discrète, au sens de 2.1.6. Néanmoins on peut procéder de la même manière dans la situation plus générale). Le schéma $\mathcal{S}$ a deux points : le point générique η et le point fermé s, qu'on appelle le point spécial (si la valuation est triviale, alors $s = \eta$) On a : $s = \operatorname{Spec} \widetilde{k}$ et $\eta = \operatorname{Spec} k$. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$-schéma, on note $\mathcal{X}_\eta$ et $\mathcal{X}_s$ la fibre générique et la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, i.e. les fibres de morphisme structural $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$ en points η et s respectivement.

Par [Ber2] 2.4.3 le corps k est quasi-complet (puisque k° est Hensélien), donc la valuation de k s'étend sur sa clôture séparable k^s.

Lemme 5.2.1. $(k^s)^\circ$ *est un anneau local Hensélien qui coïncide avec la clôture intégrale de* k° *dans* k^s.

Démonstration. Le fait que $(k^s)^\circ$ est Hensélien découle de [Ber2] 2.4.3, puisque k^s est quasi-complet. Notons ensuite L la clôture intégrale de k° dans k^s. Soit $\| \ \|$ la valuation sur k^s. Soit $x \in L$. Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in k^\circ$ tels que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Si $\|x\| > 1$, alors on a $1 = (a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-n}) \in (k^s)^{\circ\circ}$, contradiction. Donc $L \subset (k^s)^\circ$. Soit $y \in (k^s)^\circ$. Il existe $b_0, \ldots, b_{m-1} \in k$ tels que $y^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$. D'après [BGR] 3.2.1/2 on a que $\|b_i\| \leq 1$, d'où $y \in L$, donc $L = (k^s)^\circ$. $\square$

On pose $\overline{\mathcal{S}} = \operatorname{Spec}(k^s)^\circ = \{\bar{s}, \bar{\eta}\}$. Pour un $\overline{\mathcal{S}}$-schéma $\mathcal{X}$ on note $\mathcal{X}_{\bar{\eta}}$ et $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ la fibre générique et la fibre spéciale de $\overline{\mathcal{S}}$-schéma $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \overline{\mathcal{S}}$ respectivement. On a les morphismes canoniques suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \overline{\mathcal{X}} & \xleftarrow{\bar{i}} & \mathcal{X}_{\bar{s}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{X} & \xleftarrow{i} & \mathcal{X}_s \end{array}$$

Soit $F \in \mathcal{X}_{\eta,\,ét}{}^{\sim}$ un faisceau étale. On note $\overline{F}$ l'image inverse de F sur $\mathcal{X}_{\bar{\eta},\,ét}$.

Définition 5.2.2. *Le foncteur de cycles évanescents* $\Psi_\eta : \mathcal{X}_{\eta,\,ét}{}^{\sim} \to \mathcal{X}_{\bar{s},\,ét}{}^{\sim}$ est défini comme $\Psi_\eta(F) = \bar{i}^*(\bar{j}_* \overline{F})$.

Notons que si la valuation sur k est triviale, alors $\Psi_\eta(F) = \overline{F}$.

D'après [SGA7] XIII 1.1.3 le foncteur Ψ_η est à valeur dans la catégorie des faisceaux étales sur $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ munis d'une action continue de $G_\eta := Gal(k^s/k)$ compatible avec l'action de $G_s := Gal(\widetilde{k^s}/\widetilde{k})$ sur $\mathcal{X}_{\bar{s}}$.

Pour la suite on fixe un élément non nul $a \in k^{\circ\circ}$ (si la valuation est triviale on pose $a = 0$). Soit $\widehat{k}$ la completion de k. C'est un corps non-Archimédien et l'on vérifie que $\widehat{k^\circ} = (\widehat{k})^\circ = \varprojlim k^\circ/(a^n)$.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur k°. On construit deux espaces analytiques comme suit.

1. La completion formele $\widehat{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ le long de sous-schéma $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X}/a\mathcal{O}_\mathcal{X})$ est par définition un schéma formel de $\widehat{k}^\circ$-$Fsch$, défini localement comme $\widehat{\operatorname{Spec} A} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spf} \widehat{A}$. Sa fibre générique est un espace analytique, que l'on note $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$.
2. Notons que $\mathcal{X}_\eta$ est un schéma localement de présentation finie sur k d'après la construction ci-dessus, d'où $\mathcal{X}_\eta \otimes_k \widehat{k}$ est un schéma localement de présentation finie sur $\widehat{k}$. On peut donc l'associer un espace analytique $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{X}_\eta \otimes_k \widehat{k})^{\text{an}}$ (comme c'est fait dans 3.3).

Proposition 5.2.3. *Si* $\mathcal{X}$ *est séparé et de présentation finie sur* k°*, alors il existe un morphisme canonique* $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ *qui identifie* $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$ *avec un domaine analytique fermé dans* $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$.

Démonstration. Si $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$, où A est engendré par $f_1, \ldots, f_n$ sur k° alors on peut identifier $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$ avec un domaine affinoïde $\{x \in \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}} \mid |f_i(x)| \leq 1,\, 1 \leq i \leq n\}$ (en effet, on peut voir $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$ comme $\mathcal{M}(\widehat{k}\langle f_1, \ldots f_n\rangle)$ et $\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$ – comme $\mathcal{M}(\widehat{k}[f_1, \ldots f_n])$. Dans le cas général on prend un recouvrement fini $(\mathcal{X}_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{X}$ par des sous-schémas affines comme ci-dessus. Comme $\mathcal{X}$ est séparé, $\mathcal{X}_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ est aussi affine, $X_{ij} \to \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j$ est une immersion fermée et si $f_1, \ldots f_n$ et $g_1, \ldots g_m$ engendrent $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{X}_j$ sur k°, alors $f_1, \ldots f_n, g_1, \ldots g_m$ engendrent $\mathcal{X}_{i,j}$ sur k°. On a donc que $\widehat{\mathcal{X}}_{i,j,\eta}$ est identifié avec $\widehat{\mathcal{X}}_{i,\eta} \cap \widehat{\mathcal{X}}_{j,\eta}$, donc, par le recollement, $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est identifié avec un domaine analytique fermé dans $\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$. □

Remarque 5.2.4. (i) D'après la définition de $\cdot^{\mathrm{an}}$, il existe un morphisme canonique $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$, où $\mathcal{X}$ est un schéma de présentation finie sur k° (pas forcement séparé), qui vient d'un morphisme d'espaces annelés $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \mathcal{X}_\eta \otimes_k \widehat{k}$.

(ii) Notons que le corps résiduel $\widetilde{k}$ de k est isomorphe au corps résiduel de $\widehat{k}$. En effet, d'après [M] 23.I/54, le corps résiduel de $\widehat{k}$ est la completion de $\widetilde{k}$ et donc est isomorphe à $\widetilde{k}$. Il en découle qu'on a l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{X}}_s \simeq \mathcal{X}_s$.

(iii) Un morphisme $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de schémas sur $\mathcal{S}$ induit un morphisme $\widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{Y}} \to \widehat{\mathcal{X}}$. Si le morphisme ϕ est étale, alors $\widehat{\phi}$ l'est aussi. En effet, d'après (ii) et 4.1.6 il suffit de vérifier la platitude. Par la localité on se ramene à montrer que si $A \to B$ un morphisme plat de k°-algèbres, alors $A/a^n \to B/a^n$ l'est aussi, ce qui découle de [M] 2.3.C, i.e. par le changement de base, vu que $B/a^n = A/a^n \otimes_A B$.

Proposition 5.2.5. *Si un morphisme $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est propre, alors il induit un isomorphisme $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \simeq \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$.*

Démonstration. Notons d'abord que le morphisme $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est bien défini (car la composé $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$ coïncide avec la composé $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$). Notons ensuite que l'on peut supposer que $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$, A est de présentation finie sur k°, car le résultat est local en $\mathcal{X}$. D'après 2.3.8 $\mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est donc un domaine analytique dans $\mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$. D'après la proposition précédente $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta$ est aussi un domaine analytique dans $\mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$. Donc le morphisme $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est un $\mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}}$-morphisme. Il en découle qu'il suffit de montrer qu'il est surjectif.

Pour faire cela on peut supposer que ϕ est projectif. En effet, comme ϕ est propre, par le lemme de Chow il existe un $\mathcal{X}$-schéma projectif $\mathcal{Z}$ et un $\mathcal{X}$-morphisme projectif et surjectif $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{Z}}_\eta & \xrightarrow{\ 1\ } & \widehat{\mathcal{Y}}_\eta \\
{\scriptstyle 2}\big\downarrow & & {\scriptstyle 4}\big\downarrow \\
\mathcal{Z}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta & \xrightarrow{\ 3\ } & \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta
\end{array}$$

Les morphismes 1 et 3 sont surjectifs d'après la construction. Si le morphisme 2 est surjectif, cela implique que le morphisme 4 l'est aussi. On peut donc supposer que ϕ est projectif, d'où il suffit de demontrer que $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est un est surjectif si ϕ est une immersion fermée et si Y est un X-espace projectif. Supposons que $Y = \operatorname{Spec} A/I$, i.e. que ϕ est une immersion fermée. Soit A est engendré par $f_1, \ldots, f_n$ sur k°. Alors on voit que $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \simeq \mathcal{M}(\widehat{k}\langle f_1, \ldots, f_n\rangle/I)$ et $\mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{M}(\widehat{k}[f_1, \ldots, f_n]/I \times_{\widehat{k}[f_1,\ldots,f_n]} \widehat{k}\langle f_1, \ldots, f_n\rangle) \simeq \widehat{\mathcal{Y}}_\eta$. On procéde de la même manière au cas où Y est un X-espace projectif et cela fini la preuve de la proposition. □

Corollaire 5.2.6. *(i) Si un morphisme $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est propre, alors le morphisme induit $\widehat{\phi}_\eta : \widehat{\mathcal{Y}}_\eta \to \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ l'est aussi.*

(ii) Si $\mathcal{X}$ est propre sur k°, alors $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$.

Remarque 5.2.7. Les morphismes propres d'espaces analytiques sont définis comme suit. Si Y, X sont des bons espaces analytiques, on dit que $\phi : Y \to X$ est *propre* s'il est séparé et compact (i.e. l'image inverse d'un compact est compact). Dans le cas général on dit que $\phi : Y \to X$ est *propre*, si pour tout morphisme $X' \to X$ de bon espace analytique X' vers X l'espace analytique $Y \times_X X'$ est bon et le morphisme $Y \times_X X' \to X'$ est propre. D'après [Ber2] 1.5.3 les morphismes propres d'espaces analytiques sont stables par le changement de base.

Démonstration. Le morphisme $\mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$ est propre par [Ber2] 2.6.9, donc le morphisme $\mathcal{Y}_\eta^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta \to \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ est propre par le changement de base, d'où on obtient (i). Soit $\mathcal{T} = \operatorname{Spec} k$. D'après 5.2.3 $\widehat{\mathcal{T}}_\eta \simeq \mathcal{T}_\eta^{\mathrm{an}}$, d'où on obtient (ii). $\square$

5.3 Théorème de comparaison pour les cycles évanescents

On conserve les notations du paragraphe précédent.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma localement de présentation finie sur k°. D'après 5.2.4 (ii) on a le morphisme des sites $\widehat{\mathcal{X}}_{\eta,\, \acute{e}t} \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\eta,\, \acute{e}t}$. Par [Ber2] 3.3.11 on a aussi le morphisme des sites $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\eta,\, \acute{e}t} \to \mathcal{X}_{\eta,\, \acute{e}t}$. Si $F \in \mathcal{X}_{\eta,\, \acute{e}t}\tilde{}$, on note F^{an} (resp. $\widehat{F}$) l'image inverse de F sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\eta,\, \acute{e}t}$ (resp. $\widehat{\mathcal{X}}_{\eta,\, \acute{e}t}$).

Lemme 5.3.1. *Soit $F \in \mathcal{X}_{\eta,\, \acute{e}t}\tilde{}$. Il existe un morphisme canonique de faisceaux $i^*(j_*F) \to \Theta(\widehat{F})$.*

En particulier, il existe un morphisme canonique de faisceaux $\Psi_\eta(F) \to \Psi_\eta(\widehat{F})$.

Démonstration. Notons que $i^*(j_*F)$ est un faisceau associé au préfaisceau $i^p(j_*F)$. Donc il suffit de construire un morphisme $i^p(j_*F) \to \Theta(\widehat{F})$. Soit $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}_s$ un morphisme étale. Par définition $i^p(j_*F)(\mathcal{Z}) = \varinjlim F(\mathcal{Y}_\eta)$, où l'on prend la limite sur tous $\mathcal{X}_s$-morphismes $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}_s$, où $\mathcal{Y}$ est un schéma étale sur $\mathcal{X}$. D'après 5.2.4 et 4.1.7 il existe un schéma formel $\mathfrak{Z}$ étale sur $\widehat{\mathcal{X}}$ tel que $\mathfrak{Z}_s = \mathcal{Z}$. Le morphisme $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}_s$ induit le morphisme $\mathfrak{Z} \to \widehat{\mathcal{Y}}$ sur $\widehat{\mathcal{X}}$, ce qui donne un morphisme $F(\mathcal{Y}_\eta) \to \widehat{F}(\mathfrak{Z}_\eta) = \Theta(\widehat{F})(\mathcal{Z})$. On obtient ainsi un morphisme $i^p(j_*F) \to \Theta(\widehat{F})$. $\square$

Théorème 5.3.2. *Soit F un faisceau torsion étale de groupes abéliens sur $\mathcal{X}_\eta$. Alors pour tout $q \geq 0$ on a un isomorphisme canonique $i^*(R^q j_* F) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta(\widehat{F})$.*

Remarque 5.3.3. D'après 5.3.1 le morphisme $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ est bien défini.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème on procéde par plusieurs étapes.

Étape 1. Notons qu'il suffit de montrer que $i^*(R^q j_* F)_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} R^q\Theta(\widehat{F})_{\bar{x}}$ pour tout point géometrique de $\mathcal{X}_s$. Supposons que l'assertion est vraie si $\bar{x}$ est un point géometrique de $\mathcal{X}_s$ au-dessus d'un point non-fermé $x \in \mathcal{X}_s$.

Montrons que $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ est alors un isomorphisme. Comme le résultat est local par rapport à $\mathcal{X}$, on peut supposer qu'il est projectif sur $\mathcal{S}$. Considérons la catégorie dérivé $D(\mathcal{X}_s)$. Comme elle est triangulée, il existe un triangle exact :

$$\Delta^{\cdot}[-1] \to i^*(Rj_*F) \to R\Theta(\widehat{F}) \to \Delta^{\cdot} \qquad (*)$$

Il s'agit de montrer que $\Delta^{\cdot}$ est quasi-isomorphe à zéro. D'après l'hypothése les faisceaux de cohomologie de $\Delta^{\cdot}$ sont concentrés en points fermés de $\mathcal{X}_s$. Il suffit de montrer donc que $R\Gamma(\mathcal{X}_s, \Delta^{\cdot}) = 0$. (En effet, si G est un faisceau sur $\mathcal{X}_s$ concentré en points fermés de $\mathcal{X}_s$, alors le support Z de G est fermé, donc c'est un nombre fini de points fermés. Soit $\mathcal{X}_s \setminus Z = U \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_s$. D'après [Mi] II.3.13 on a une suite exacte $0 \to j_! j^* G \to G \to i_* i^* G \to 0$. Comme $j^*G = 0$, donc $G \simeq i_* i^* G$, où $i : Z \to \mathcal{X}_s$. On en déduit que $\Gamma(\mathcal{X}_s, G) = \Gamma(\mathcal{X}_s, i_* i^* G) = \Gamma(Z, i^* G) = \bigoplus_{x_i \in Z} G_{\bar{x}_i}$.) De même, d'après le triangle exact $(*)$, cette égalité est équivalente à l'égalité $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_s, R\Theta(\widehat{F}))$.

Comme $\mathcal{X}$ est propre sur $\mathcal{S}$, on a un isomorphisme canonique $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta, F)$. En effet, d'après [Mi] VI.2.7 $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}, Rj_*F)$ et $R\Gamma(\mathcal{X}, Rj_*F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta, F)$

par construction. On a aussi un isomorphisme $R\Gamma(\mathcal{X}_s, R\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$. En effet, $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{X}_\eta^{\mathrm{an}}$ par 5.2.6(ii). En plus, $\widehat{\mathcal{X}}_s \simeq \mathcal{X}_s$ d'après 5.2.4(ii). Il s'agit donc de voir que $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_s, R\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_\eta, \widehat{F})$. Cela découle de 5.1.2(i) vu que $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_s, R\Theta(\widehat{F}))$ est les cohomologies de complexe $\Theta(\widehat{F})(\widehat{\mathcal{X}}_s) \to \Theta(I^\bullet)(\widehat{\mathcal{X}}_s)$, où $I^\bullet$ est la résolution injective de $\widehat{F}$, et $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_\eta, \widehat{F})$ est les cohomologies de complexe $\widehat{F}(\widehat{\mathcal{X}}_\eta) \to I^\bullet(\widehat{\mathcal{X}}_\eta)$. On déduit donc le résultat final du lemme de l'étape suivant.

Étape 2.

Lemme 5.3.4. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma compactifiable sur un corps quasi-complet k. Soit F un faisceau torsion de groupes abéliens. Alors pour tout $q \geq 0$ on a un isomorphisme canonique $H_c^q(\mathcal{X}, F) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$.*

Remarque 5.3.5. On dit qu'un schéma $\mathcal{X}$ sur un corps k est *compactifiable* s'il existe une immersion ouverte $\mathcal{X} \to \overline{\mathcal{X}}$ avec $\overline{\mathcal{X}}$ un schéma propre sur k. En particulier, si $\mathcal{X}$ est propre, alors $\mathcal{X}$ est compactifiable. Par le théorème de Nagata, tout schéma séparé et de type fini sur k est compactifiable.

Démonstration. Si k est complet, alors l'assertion du lemme est le théorème 7.1.1, [Ber2]. Il suffit donc de montrer que $H_c^q(\mathcal{X}, F) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\mathcal{X} \otimes_k \widehat{k}, F)$. Si k est séparablement fermé, $\widehat{k}$ l'est aussi et le résultat découle du fait que les groupes de cohomologie à support compact de schémas sont préservés par l'extensions séparablement fermées du corps de base (cf. [Mi] VI.2.6). Dans le cas général $G_k \simeq G_{\widehat{k}}$ par [Ber2] 2.4.2, où $G_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} Gal(k^s/k)$ et de même pour $G_{\widehat{k}}$. Ainsi on termine la preuve du lemme en appliquant la suite spéctrale de Hochschild-Serre ([Mi] III.2.20) $H^p(G_k, H^q(\mathcal{X} \otimes k^s, F')) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}, F)$.

□

Étape 3. Pour conclure il suffit de montrer que le morphisme $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ induit un isomorphisme en points géometriques de $\mathcal{X}_s$ au-dessus d'un point non-fermé $x \in \mathcal{X}_s$. Notons que l'assertion est locale par rapport à $\mathcal{X}$, on peut donc supposer que $\mathcal{X}$ est de présentation finie sur k°. La dimension $d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim \mathcal{X}_\eta$ est donc finie (où l'on voit la fibre $\mathcal{X}_\eta$ comme un schéma sur un corps $k(\eta) = k$). On procède par récurrence sur d. Si d=0, alors le résultat découle de première étape. En effet, tout algèbre finie sur un anneau local Hensélien est un produit d'anneaux locaux, on peut donc supposer que $\mathcal{X}_s$ est un corps, extension finie séparable de k, donc l'étape 1 s'applique. Supposons que $d \geq 1$ et que l'assersion est vraie pour tout schéma sur le spectre d'anneau local Hensélien tel que la dimension de sa fibre générique est plus petite que d.

Étape 4. On rappelle qu'on a noté $\mathcal{S}$ le spectre d'anneau local Hensélien : $S = \operatorname{Spec} k^\circ$, où k° est l'anneau d'éntiers du corps de valuation k.

Lemme 5.3.6. *Soit $\mathcal{X}$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{S}}$. Soit $x \in \mathcal{X}_s$ un point qui n'est pas fermé. Posons $\mathcal{T} = \mathbb{A}^1_{\mathcal{S}}$. Alors il existe une projection $\mathcal{X} \to \mathcal{T}$ telle que l'image de x dans $\mathcal{T}_s$ par le morphisme induit $\mathcal{X}_s \to \mathcal{T}_s$ est le point générique s' de $\mathcal{T}_s$.*

Démonstration. On a $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} k^\circ[x_1, \ldots, x_m]/I$ et $\mathcal{X}_s = \operatorname{Spec} \widetilde{k}[x_1, \ldots, x_m]/I$. Un point non-fermé $x \in \mathcal{X}_s$ correspond à un idéal premier non-maximal $\mathfrak{p}$ de $\widetilde{k}[x_1, \ldots, x_m]$ tel que $\mathfrak{p} \supset I$. Comme $\widetilde{k}[x_1, \ldots, x_m]/\mathfrak{p}$ n'est pas un corps, il existe un élément non nul non-inversible $y \in \widetilde{k}[x_1, \ldots, x_m]/\mathfrak{p}$. Le morphisme $\phi : \widetilde{k}[t] \to \widetilde{k}[x_1, \ldots, x_m]/\mathfrak{p}$, $P \mapsto P(y)$ est alors injectif. En effet, si $a_r y^r + \ldots + a_1 y + a_0 = 0$, alors $y(-\frac{a_r}{a_0} y^{r-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0} y) = 1$, i.e. y est inversible et on obtient une contradiction. Soit z un élément de $k^\circ[x_1, \ldots, x_m]/I$ relevant y. Alors le morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{T}$ correspondant au morphisme $k^\circ[t] \to k^\circ[x_1, \ldots, x_m]/I$, $P \mapsto P(z)$ convient. □

Étape 5.

Lemme 5.3.7. *Le morphisme $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ induit un isomorphisme en points géometriques de $\mathcal{X}_s$ au-dessus d'un point non-fermé $x \in \mathcal{X}_s$.*

Démonstration. Comme le résultat est local par rapport à $\mathcal{X}$, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{S}}$. On conserve les notations : $\mathcal{T} = \mathbb{A}^1_{\mathcal{S}}$, s' est le point générique de $\mathcal{T}_s$, on note aussi s' le point de $\mathcal{T}$ correspondant. D'après l'étape précédente il suffit de montrer que l'application $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ induit un isomorphisme entre les images inverses des faisceaux sur $(\mathcal{X}_s)_{s'}$. La construction suivante nous sert pour diminuer la dimension de $\mathcal{X}_\eta$.

Considérons $\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'}$ la Hensélisation d'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{T},s'}$. Soit η' le point générique de $\mathcal{S}' \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'}$, soit s' son point spécial ($\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'}$ un anneau local et d'après [Mi] I.4 son corps résiduel est isomorphe au corps résiduel de $\mathcal{O}_{\mathcal{T},s'}$, donc le point spécial de $\mathcal{S}'$ est s').

Posons $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{S}'$. Notons que la fibre $(\mathcal{X}')_{s'}$ du morphisme $\mathcal{X}' \to \mathcal{S}'$ en point s' est isomorphe au $(\mathcal{X}_s)_{s'}$ (cela découle du fait que les corps résiduels de $\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{T},\, s'}$ sont isomorphes). Le morphisme canonique $\lambda : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ induit les morphismes $\lambda_s : (\mathcal{X}')_{s'} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X}_s)_{s'} \to \mathcal{X}_s$ et $\lambda_\eta : \mathcal{X}'_{\eta'} \to \mathcal{X}_\eta$. Si on écrit $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} k^\circ[x_1, \dots, x_m]/I$ (avec les notations de l'étape précédente), on obtient : $\mathcal{X}_\eta = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_m]/I$ et $\mathcal{X}'_{\eta'} = \operatorname{Spec}(k^\circ[x_1, \dots, x_m]/I \times_{k^\circ[t]} k(S'))$. On obtient donc que la dimension de $\mathcal{X}'_{\eta'}$ sur $k(S')$ est plus petite que la dimension de $\mathcal{X}_\eta$ sur k.

Notons i' et j' les morphismes $\mathcal{X}'_{s'} \to \mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}'_{\eta'} \to \mathcal{X}'$ respectivement :

$$\begin{tikzcd}
{\mathcal{X}'}_{\eta'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\lambda_\eta"'] & \mathcal{X}' \arrow[d, "\lambda"'] & {\mathcal{X}'}_{s'} \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "\lambda_s"'] \\
\mathcal{X}_\eta \arrow[r, "j"] & \mathcal{X} & \mathcal{X}_s \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

On a alors : $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} i'^*(R^q j'_*(\lambda_\eta^* F))$, de même comme dans 5.1.8. D'après la recurrence $i'^*(R^q j'_*(\lambda_\eta^* F)) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$, donc $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$.

Ensuite procédons de la même manière au cas de schémas formels. Considérons le schéma formel $\widehat{\mathcal{T}}_\eta$. Soit t son point maximal (i.e. correspondant à la norme sur $\widehat{\mathcal{T}}_\eta$). Rappellons (3.3.18) qu'on a noté $\mathcal{H}(t)$ le corps résiduel complété du point t. Comme $\mathcal{T}_\eta = \operatorname{Spec} k[y]$, $\mathcal{H}(t)$ est le complété de corps de fractions de $\widehat{k}\langle y\rangle$. On obtient ainsi un morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{T},\, s'} \hookrightarrow \mathcal{H}(t)^\circ$, qui induit un isomorphisme de la complétion de $\mathcal{O}_{\mathcal{T},\, s'}$ et $\mathcal{H}(t)^\circ$. Comme $\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'}$ est un sous-anneau de la complétion de $\mathcal{O}_{\mathcal{T},\, s'}$, on obtient ainsi un morphisme $\mathcal{O}^h_{\mathcal{T},\, s'} \hookrightarrow \mathcal{H}(t)^\circ$, donc $\widehat{S'} = \operatorname{Spf}(\mathcal{H}(t)^\circ)$.

Notons que il découle de [BGR] 2.1.7/4 que $\widehat{\mathcal{X}'} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{X}} \times_{\widehat{\mathcal{T}}} \widehat{\mathcal{S}}'$. Soit alors $\widehat{\lambda} : \widehat{\mathcal{X}'} \to \widehat{\mathcal{X}}$ un morphisme induit par λ. Comme $\widehat{S'} = \operatorname{Spf}(\mathcal{H}(t)^\circ)$, on est dans la situation de 5.1.8. Il existe donc un isomorphisme canonique $\widehat{\lambda}_s^*(R^q\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(\widehat{\lambda}_\eta^*\widehat{F})$. Comme $\widehat{\lambda}_\eta^*\widehat{F} = \widehat{\lambda_\eta^* F}$ et $\widehat{\lambda}_s = \lambda_s$ (d'après 5.2.4), on a donc $\lambda_s^*(R^q\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$. D'après ce qui précéde on a donc $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} \lambda_s^*(R^q\Theta(\widehat{F}))$, i.e. l'application $i^*(R^q j_* F) \to R^q\Theta(\widehat{F})$ induit un isomorphisme d'images inverses de faisceaux sur $(\mathcal{X}_s)_{s'}$ ce qui finit la preuve du lemme et du théorème. □

□

Corollaire 5.3.8. Soit F un faisceau torsion étale de groupes abéliens sur $\mathcal{X}_\eta$. Alors pour tout $q \geq 0$ on a un isomorphisme canonique $R^q\Psi_\eta(F) \xrightarrow{\sim} R^q\Psi_\eta(\widehat{F})$. □

Références

[A] Atiyah, M. F. ; Macdonald, I. G.: Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachussets, 1969

[Ber1] Berkovich, V. G.: Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical society, 1990

[Ber2] Berkovich, V. G.: Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, Publ. Math. IHES **78** (1993), 5-161

[BGR] Bosch, S.; Güntzer, U.; Remmert, R.: Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 261, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984

[Bou] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique. Topologie générale, Chap.I-IV. Hermann, Paris, 1971

[EGAI] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971

[EGAIV] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Ibit., 32, 1967

[God] Godement, R. : Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris, 1958

[H] Hartshorne, R. : Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer, 1977

[Ka] Kashiwara, M.; Schapira, P. : Categories and Sheaves, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 332, Springer-Verlag, 2005

[M] Matsumura, H. : Commutative Algebra, W.A. Benjamin Co., New York, 1970

[Mi] Miln, J. : Etale Cohomology, Princeton U.P., 1980

[Mo] Monna, A. F. : Analyse non-archimédienne, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970

[SGA4] Artin, M.; Grothendieck, A.; Verdier, J.-L.: Théorie de topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973

[SGA7] Grothendieck, A.; Deligne, P.; Katz, N. : Groupes de monodromie en gèométrie algèbrique, Lecture Notes in Math. 288, 340, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973