

# Mémoire de Magistère

Alena Pirutka

13 juin 2008

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Curriculum Vitae du magistère</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Introduction au domaine de recherche : variétés presque rationnelles et leurs points rationnels</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Exemples</b>	<b>5</b>
2.1	Corps finis . . . . .	5
2.2	Le cas des courbes . . . . .	6
2.3	Le cas des quadriques . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Variétés rationnellement connexes</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Paramétrage de morphismes</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Idée de la démonstration de 4.2</b>	<b>10</b>
<b>III</b>	<b>Cycles évanescents sur des schémas formels</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Éléments de théorie spectrale</b>	<b>12</b>
8.1	Anneaux de Banach . . . . .	12
8.2	Algèbres de Tate . . . . .	16
8.3	Algèbres affinoïdes . . . . .	18
8.4	L'anneau $k\langle\zeta_1, \dots, \zeta_n\rangle$ . . . . .	20
8.5	Anneaux topologiquement de présentation finie sur $k$ . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Schémas formels et espaces analytiques associés</b>	<b>23</b>
9.1	Schémas formels, constructions de base . . . . .	23
9.2	Sites . . . . .	26
9.3	Espaces analytiques . . . . .	27
9.4	Application de réduction . . . . .	31

<b>10</b>	<b>Morphismes étales et quasi-étales</b>	<b>34</b>
10.1	Morphismes étales de schémas formels . . . . .	34
10.2	Morphismes étales d'espaces analytiques . . . . .	36
10.3	Topologie quasi-étale sur un espace analytique . . . . .	39
10.4	Faisceaux moux sur des espaces analytiques . . . . .	41
10.5	Théorème de comparaison . . . . .	42
<b>11</b>	<b>Foncteur de cycles évanescents</b>	<b>47</b>
11.1	Construction et propriétés basiques . . . . .	47
11.2	Foncteur des cycles évanescents : le cas des schémas . . . . .	49
11.3	Théorème de comparaison pour les cycles évanescents . . . . .	52
<b>IV</b>	<b>Les représentations du groupe symétrique</b>	<b>56</b>
<b>12</b>	<b>Représentations linéaires des groupes finis</b>	<b>56</b>
12.1	Définitions et exemples . . . . .	56
12.2	Théorie des caractères . . . . .	58
12.3	Représentation régulière et nombre de représentations irréductibles . . . . .	60
12.4	Représentations restreintes et induites . . . . .	61
<b>13</b>	<b>Représentations du groupe symétrique</b>	<b>63</b>
13.1	Tableaux d'Young . . . . .	63
13.2	Modules de Specht . . . . .	65
13.3	Tableaux standards et base de $S^\lambda$ . . . . .	68
13.4	Représentation naturelle de Young . . . . .	71
13.5	La décomposition de $M^\mu$ . . . . .	72
13.6	Loi de la ramification ("Branching rule") . . . . .	74
<b>14</b>	<b>La formule des crochets</b>	<b>77</b>
<b>15</b>	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>

## Première partie

# Curriculum Vitae du magistère

### Année 2007-2008, troisième année de magistère

M2 de mathématiques à l'université de Paris 6, mention TB. Mémoire sous la direction de Joseph Ayoub, *Cycles évanescents sur des schémas formels* (note : 16)

Début d'une thèse de mathématiques "Étude de variétés séparablement rationnellement connexes : R-équivalence et approximation faible" sous la direction de Jean-Louis Colliot-Thélène, Université Paris Sud.

Conférences suivies :

- mai 2008 : États de la Recherche "Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques", Strasbourg
- janvier 2008 : GAG Géométrie algébrique et géométrie complexe, Luminy

### Année 2006-2007, deuxième année de magistère

Inscription pédagogique au M2 de l'université de Paris 6.

Cours de M2 suivis :

- Cours d'introduction (Paris 6) (note : 20)
- Géométrie algébrique (D.Harari, Paris 11), exposé sur le théorème de Chevalley (note : 19.5)
- Géométrie algébrique complexe I (C.Voisin) (note : 14)
- Géométrie algébrique complexe II (C.Voisin) (note : 15)
- Cycles algébriques avec applications aux formes quadratiques (N.Karpenko) (note : 19)
- Motifs de Voevodsky (B. Klingler, Paris 7) (note : 17)
- Champs algébriques (mini-cours de K. Behrend et A. Kresch à l'IHP) (note : 19)

Cours de M1 : Topologie algébrique (B. Oliver) (note : 18)

### Année 2005-2006, première année de magistère

L3 de mathématiques, mention AB. Cours de L3 suivis :

- Algèbre 1 (F. Loeser) (note : 12)
- Topologie et analyse différentielle (B. Perthame) (note : 10)
- Intégration et probabilités (G. David) (note : 14.5)
- Analyse complexe (G. Skandalis) (note : 13)

M1 de mathématiques, mention B. Cours de M1 suivis :

- Géométrie différentielle (F. Paulin) (note : 15.5)
- Algèbre 2 (M. Rosso) (note : 10)
- Systèmes dynamiques (F. Le Roux) (note : 10)
- Bouillon mathématique (Don Zagier) (note : 15)
- Exposé de maîtrise sur les représentations du groupe symétrique sous la direction de Thierry Lévy, avec Nicolas De Saxcé (note : 16)
- Groupe de lecture (O. Glass, Th. Lévy) (note : 18)

## Deuxième partie

# Introduction au domaine de recherche : variétés presque rationnelles et leurs points rationnels

Dans ce texte je voudrais introduire les notions de variétés rationnellement connexes et de  $R$ -équivalence, annoncer quelques résultats connus ainsi que quelques conjectures et donner un exemple de méthode utilisée pour obtenir des résultats à ce sujet.

## 1 Introduction

Une des questions fondamentales en arithmétique est la suivante :

*Étant donné un système d'équations polynomiales sur un corps  $k$ , décrire ses solutions, et en particulier déterminer s'il en existe, sur le corps  $k$  lui-même ou sur des extensions de  $k$ .* (\*)

En particulier, on s'intéresse aux solutions sur  $\mathbb{Q}$  d'un système d'équations à coefficients rationnels. Pour étudier cette question, on va utiliser le langage des variétés algébriques<sup>1</sup> :

**Définition 1.1.** Soit  $k$  un corps. On appelle *variété algébrique affine* sur  $k$  une partie de  $\mathbb{A}_k^n = \bar{k}^n$  définie par des équations polynomiales, i.e. l'ensemble

$$V(f_1, \dots, f_m) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}^n \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, m\}$$

pour  $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ .

Une *variété algébrique projective* sur  $k$  est une partie de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par des équations polynomiales homogènes :

$$V_+(g_1, \dots, g_s) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid g_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, s\}$$

pour  $g_1, \dots, g_s \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$  homogènes.

Reformulons la question (\*) avec les notations précédentes. Si  $X$  une variété algébrique affine (projective) sur  $k$  et  $K/k$  une extension de corps, on note  $X(K)$  la partie de  $\mathbb{A}_K^n$  (resp.  $\mathbb{P}_K^n$ ) qui correspond aux points à coordonnées dans  $K$ . On appelle les éléments de  $X(k)$  les *points rationnels* de  $X$ . Le problème est donc de décrire  $X(k)$  ou, autrement dit, à décrire les points rationnels de  $X$ , et en particulier à savoir si  $X(k)$  est non vide.

Introduisons quelques autres notions concernant les variétés algébriques. Les morphismes de variétés (algébriques affines ou projectives) sont les applications données par des fonctions polynomiales en des coordonnées. Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de variétés et  $y \in Y$  est un point alors on peut voir la fibre  $X_y$  comme une variété sur  $\bar{k}$ . En effet on ajoute les équations qui signifient que la valeur de  $f$  est égale à  $y$  aux équations définissant  $X$ . Si  $y \in Y(K)$  où  $K/k$  est une extension de corps, alors  $X_y$  est une variété définie sur  $K$ .

---

<sup>1</sup>On identifie ici une  $k$ -variété  $X$  avec l'ensemble de ses points  $X(\bar{k})$ . Cela n'est pas tout à fait correct, par exemple, on ne distingue pas ainsi les variétés définies par l'équation  $f(x) = 0$  et l'équation  $f(x)^2 = 0$ . Néanmoins l'approche présentée nous suffira pour ce texte.

On peut munir les variétés algébriques affines (resp. projectives) d'une topologie que l'on appelle *la topologie de Zariski*. C'est la topologie induite par la topologie de Zariski sur  $\mathbb{A}_k^n$  (resp.  $\mathbb{P}_k^n$ ). Cette dernière est la topologie dont les parties fermées sont les variétés algébriques affines (resp. projectives). On appelle une variété *quasi-projective* un ouvert d'une variété projective.

Dans la suite, on va considérer des variétés *irréductibles*, i.e. qui ne sont pas réunions de deux fermés stricts non vides. Dans le cas contraire, il existe une décomposition  $X = \bigcup Y_i$  avec  $Y_i$  fermés irréductibles de  $X$  tels que  $Y_i \not\subseteq Y_j$  si  $i \neq j$ . On appelle les  $Y_i$  les *composantes irréductibles* de  $X$ . La *dimension*  $\dim X$  de la variété  $X$  est la longueur maximale  $n$  d'une chaîne  $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_n$  de fermés irréductibles de  $X$ . On dit que la variété algébrique affine (resp. projective)  $X$  définie par les équations  $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$  (resp. par les équations homogènes  $f_1, \dots, f_m \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ) sur un corps parfait  $k$  est *lisse* au point  $P \in X$  si

$$\text{rang} \|(df_i/\partial x_j)(P)\| = n - \dim X,$$

où l'on voit la matrice  $\|(df_i/\partial x_j)(P)\|$  comme une matrice à coefficients dans  $\bar{k}$ . On dit que  $X$  est *lisse* si elle est lisse en tout point  $P \in X$ .

## 2 Exemples

Considérons quelques exemples.

### 2.1 Corps finis

Soit  $k$  un corps fini. Soit  $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$  un polynôme homogène. Supposons que  $d = \deg f \leq n$ . Soit  $X = V_+(f)$  une hypersurface de l'espace projectif.

**Théorème 2.1 (Chevalley-Warning).** *L'ensemble des points rationnels de  $X$  est non vide. Plus précisément,*

$$\#X(k) \equiv 1 \pmod{p},$$

où  $p$  est la caractéristique de  $k$ .

*Démonstration.* Posons

$$N = \#\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}, f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

On a  $\#X(k) = \frac{N-1}{q-1}$ , où  $q$  est le cardinal de  $k$ . Il suffit de voir donc que  $N \equiv 0 \pmod{p}$ .

Posons  $F = 1 - f^{q-1}$ . Alors  $f(\underline{x}) = 0$  ssi  $F(\underline{x}) = 0$  et  $f(\underline{x}) \neq 0$  ssi  $F(\underline{x}) = 1$  pour  $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ . Écrivons  $F(x_0, \dots, x_n) = \sum_i c_i x_0^{\alpha_{i,0}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}}$ . On obtient

$$N \equiv \sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} F(\underline{x}) \equiv \sum_i \sum_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}} c_i x_0^{\alpha_{i,0}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}} \pmod{p}.$$

Cela implique que  $N \equiv 0 \pmod{p}$ . En effet,

$$\sum_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}} x_0^{\alpha_{i,0}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}} \equiv 0 \pmod{p} \text{ si } \min_j \alpha_{i,j} < q-1,$$

et on a  $\alpha_{i,0} + \dots + \alpha_{i,n} \leq d(q-1) < (n+1)(q-1)$ , ce qui implique que  $\min_j \alpha_{i,j} < q-1$ .  $\square$

Ce théorème vaut aussi pour des corps suivants :

**Théorème 2.2 (Tsen).** *Soit  $k$  une extension de type fini de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos. Alors toute hypersurface de  $\mathbb{P}_k^n$  définie sur  $k$  de degré au plus  $n$  admet un point rationnel.*

## 2.2 Le cas des courbes

Comme autre exemple, étudions les  $\mathbb{Q}$ -points d'une conique plane. Considérons l'équation :

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

où  $b^2 - 4ac \neq 0$ .

Remarquons que l'équation  $y^2 = ax^2 + bx + c$  peut ne pas avoir de solutions rationnelles. Par exemple,  $y^2 = -x^2 - 1$  n'a pas de solutions, même sur  $\mathbb{R}$ ;  $y^2 = -x^2 + 3$  possède des solutions réelles, mais pas rationnelles, ce que l'on voit en réduisant modulo 3. Néanmoins s'il existe une solution rationnelle, il en existe une infinité. Considérons par exemple l'équation  $y^2 + 2x^2 = 3$ . Elle possède une solution rationnelle  $(1, 1)$ . Soit  $L_t$  la droite passant par des points  $(1, 1)$  et  $(1 + t, 0)$ . En faisant les calculs, on voit que  $L_t$  intersecte l'ellipse  $y^2 + 2x^2 = 3$  en 2 points, dont le premier est  $(1, 1)$ . Les coordonnées du deuxième point donnent un paramétrage des points rationnels par la formule

$$t \mapsto \left( \frac{-2t^2 + 2t + 1}{2t^2 + 1}, \frac{2t^2 + 4t - 1}{2t^2 + 1} \right).$$

## 2.3 Le cas des quadriques

Considérons ensuite le cas des quadriques lisses dans  $\mathbb{P}_k^3$  définies sur  $k$ . Soit  $Q$  une telle quadrique. On peut la définir par une équation du type

$$a_0x_0^2 + \dots + a_3x_3^2 = 0, \text{ où } a_0 \dots a_3 \neq 0.$$

On a les possibilités suivantes :

- (a) Sur  $\mathbb{C}$  on peut définir  $Q$  par l'équation  $y_0^2 + \dots + y_3^2 = 0$  en posant  $y_i = \sqrt{a_i x_i}$ .
- (b) De même, sur  $\mathbb{R}$  on a trois classes d'isomorphisme de quadriques données par les équations  $y_0^2 \pm \dots \pm y_3^2 = 0$ .
- (c) Sur  $\mathbb{Q}$  on a beaucoup plus de possibilités. Par exemple, si  $p_1 \dots p_m$  sont des nombres premiers deux à deux distincts, la classe d'isomorphisme de la quadrique  $Q(p_1, \dots, p_m) : x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - \prod p_i x_3^2 = 0$  détermine les nombres  $p_1 \dots p_m$ . Néanmoins, même si les quadriques  $Q(p_1, \dots, p_m)$  sont deux à deux non isomorphes, elles «ressemblent» beaucoup au plan projectif. Plus précisément, posons  $Q = Q(p_1, \dots, p_m)$ . Remarquons que  $P = (1 : 1 : 0 : 0)$  est un point de  $Q$ . Considérons la projection à partir du point  $P$  sur le plan  $x_0 = 0$ .

$$\pi : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto \left( \frac{x_1 - x_0 - x_3}{x_3} + 1 : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right).$$

L'application inverse est la suivante :

$$\rho : (u + 1 : v : 1) \mapsto (1 - t : 1 + ut : vt : t), \quad t = \frac{2(1 + u)}{1 - u^2 + v^2 - \prod p_i}.$$

Remarquons que  $\pi$  et  $\rho$  ne sont pas inverses l'un de l'autre. En effet,  $\pi$  n'est pas définie en  $P$  et envoie les droites  $L_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (1 : 1 : \pm t \sqrt{\prod p_i} : t)$  sur un seul point  $(0 : \pm \sqrt{\prod p_i} : 1)$ . De même,  $\rho$  n'est pas définie aux points  $(0 : \pm \sqrt{\prod p_i} : 1)$  et envoie la droite  $M = (0 : u : 1)$  sur le point  $P$ . Néanmoins  $\pi$  et  $\rho$  donnent un isomorphisme entre les ouverts  $Q \setminus L_{\pm}$  et  $\mathbb{P}^2 \setminus M_{\pm}$ . Cela justifie que  $Q$  «rassemble» un plan projectif.

Cet exemple nous amène à la définition suivante :

**Définition 2.3.** Soit  $k$  un corps. Soient  $X, Y$  des variétés sur  $k$ . On dit qu'elles sont *birationnelles* s'il existe des ouverts non vides  $X_0 \subset X$  et  $Y_0 \subset Y$  tels que  $X_0$  est isomorphe à  $Y_0$  sur  $k$  (i.e. l'isomorphisme  $X_0 \simeq Y_0$  est donné par des polynômes à coefficients dans  $k$ ). Si l'on peut trouver des ouverts isomorphes sur  $K$  pour une extension

$K$  de  $k$  on dit que  $X$  et  $Y$  sont  $K$ -birationnelles. On dit que une variété est *rationnelle* si elle birationnelle à l'espace projectif. On dit que une variété  $X$  est *unirationnelle* s'il existe un morphisme dominant, i.e. d'image dense, d'un ouvert de l'espace projectif dans  $X$ .

### 3 Variétés rationnellement connexes

Pour généraliser les exemples donnés au paragraphe précédent et pour essayer de répondre à la question (\*) on peut espérer trouver des variétés pour lesquelles on peut avoir des résultats analogues aux théorèmes de Tsen et Chevalley-Warning. Il est intéressant d'étudier à quel point la géométrie de ces variétés conditionne leur arithmétique.

La géométrie de l'espace projectif est assez riche, on peut donc supposer qu'il est possible d'établir certains résultats pour des variétés qui «ressemblent» à l'espace projectif. On peut par exemple considérer les variétés rationnelles. Le problème de cette approche est qu'en dimension supérieure les variétés rationnelles forment une classe très particulière de variétés. En particulier la variété  $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  donnée par une équation à coefficients rationnels  $q(x, y) = f(z)$  avec  $q$  un polynôme quadratique est rationnelle sur  $\mathbb{R}$  seulement si  $f$  à un petit degré. En plus, il est en général assez difficile de déterminer si une variété donnée est rationnelle ou pas. Néanmoins on peut utiliser une autre propriété de l'espace projectif : le fait qu'il possède beaucoup de courbes rationnelles. Cela nous amène à l'étude des variétés rationnellement connexes. Ce sont des variétés qui possèdent dans certain sens beaucoup de courbes rationnelles définies sur une clôture algébrique de  $k$ .

Supposons désormais pour simplifier que  $\text{car } k = 0$ .

**Définition 3.1.** Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $k$ . On dit que  $X$  est *rationnellement connexe* si elle vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Il existe un ouvert non vide  $U \subset X$  tel que pour tous  $x_1, x_2 \in U$  il existe un morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  défini sur  $\bar{k}$  tel que  $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1)$ .
2. Pour tous  $x_1, x_2 \in X$  il existe un morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  défini sur  $\bar{k}$  tel que  $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1)$ .
3. Pour tous  $x_1, \dots, x_n \in X$  il existe un morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  défini sur  $\bar{k}$  tel que  $x_1, \dots, x_n \in f(\mathbb{P}^1)$ .

**Remarque 3.2.** La classe des variétés rationnellement connexes contient les variétés unirationnelles. La question de savoir si ces classes sont différentes reste ouverte.

Voici la réponse à une partie de la question (\*) dans le cas d'un corps de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, en particulier pour  $\mathbb{C}(t)$  (cf. [Gr-Ha-St]).

**Théorème 3.3 (Graber, Harris, Starr, 2003).** Soit  $k$  une extension de type fini de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit  $X$  une variété rationnellement connexe sur  $k$ . Alors  $X(k) \neq \emptyset$ .

### 4 R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes

La relation d'équivalence suivante à été introduite dans [Ma]. Elle consiste à organiser les points rationnels d'une variété en classes à l'aide de courbes rationnelles.

**Définition 4.1.** Soit  $k$  un corps. Soit  $X$  une variété projective sur  $k$ . Deux points  $x, x' \in X(k)$  sont dits *directement R-équivalents* s'il existe un morphisme  $p : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$

défini sur  $k$  tel que  $p(0 : 1) = x$  et  $p(1 : 0) = x'$ . La relation d'équivalence ainsi engendrée est la  $R$ -équivalence. On note  $X(k)/R$  l'ensemble des classes de  $R$ -équivalence.

La géométrie des variétés rationnellement connexes est caractérisée par le fait que celles-ci contiennent beaucoup de courbes rationnelles. C'est pourquoi il peut être intéressant d'étudier la  $R$ -équivalence sur les variétés rationnellement connexes. La question de la finitude de  $X(k)/R$ , ainsi que des questions proches, ont été beaucoup étudiées ces dernières années et l'on connaît plusieurs résultats sur des corps différents ([Ma], [SD] pour les hypersurfaces cubiques, [CT-Sa] [CT-Co],[CT], [CT-Sk] pour les surfaces rationnelles, etc.). Néanmoins beaucoup de questions restent ouvertes.

Voici un des résultats récents (cf. [Ko99]) :

**Théorème 4.2.** *Soit  $k$  un corps  $p$ -adique, i.e. une extension algébrique finie de  $\mathbb{Q}_p^2$  ou  $\mathbb{R}$ , et soit  $X$  une  $k$ -variété projective lisse rationnellement connexe. Alors la  $R$ -équivalence sur  $X(k)$  est une relation ouverte. En particulier, l'ensemble  $X(k)/R$  est fini.*

**Remarque 4.3.** 1. Précisons la topologie considérée sur  $X(k)$ . Remarquons d'abord que  $\mathbb{P}_k^n$  possède une topologie définie sur les parties affines  $A_i = \{(x_0 : \dots : x_n), | x_i \neq 0\} \simeq k^n$  par la topologie<sup>3</sup> de  $k^n$ . On voit  $X(k)$  comme une partie de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par des équations homogènes, ce qui donne un fermé de l'espace projectif puisque les polynômes sont des applications continues pour la topologie considérée sur  $\mathbb{P}_k^n$ . On munit ainsi  $X(k)$  de la topologie induite et on l'appelle la  $k$ -topologie. Puisque  $X(k)$  est en fermé dans  $\mathbb{P}_k^n$  et  $\mathbb{P}_k^n$  est compact,  $X(k)$  est compact.

2. Ce théorème à été démontré pour les corps locaux (pas forcément de caractéristique zéro), ce qui nécessite d'employer la notion de variété séparablement rationnellement connexe. Ici, pour simplifier, on se restreint au cas où  $\text{car } k = 0$ . En ce qui concerne d'autres résultats en caractéristique non nulle, par exemple dans le cas des corps finis, on a démontré ([Ko-Sza]) que si  $X$  est une  $k$ -variété projective lisse séparablement rationnellement connexe sur un corps fini  $k$  et si l'ordre de  $k$  est plus grand qu'une certaine constante qui dépend seulement de la géométrie de  $X$  ( $\dim X$  et  $\deg X$ ) alors  $X(k)/R$  est réduit à un point.

**Corollaire 4.4.** *Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$ , rationnellement connexe. Alors les classes de  $R$ -équivalence sont précisément les composantes connexes de  $X(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Puisque les classes de  $R$ -équivalence sont ouvertes et fermées dans  $X(\mathbb{R})$  elles sont des unions de composantes connexes de  $X(\mathbb{R})$ . D'autre part,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est connexe, donc chaque classe de  $R$ -équivalence est connexe elle-aussi. Le résultat en découle.  $\square$

Ce résultat permet d'étudier la situation suivante plus générale : étant donné un morphisme à fibres rationnellement connexes  $f : X \rightarrow Y$  de variétés sur un corps  $p$ -adique  $k$ , que peut-on dire de la variation de l'ensemble  $X_y(k)/R$  quand  $y \in Y(k)$ ? La propriété suivante a été démontrée dans [Ko04] :

**Théorème 4.5.** *Soit  $k$  un corps  $p$ -adique ou  $\mathbb{R}$  et soit  $f : X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme*

<sup>2</sup>On peut voir les éléments du corps  $\mathbb{Q}_p$ , où  $p$  est un nombre premier, comme suit. Un élément  $r$  de  $\mathbb{Q}_p$  s'écrit de manière unique sous la forme  $r = \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ , les  $a_i$  sont des nombres entiers compris entre 0 et  $p-1$  et  $a_k \neq 0$ . On définit ainsi une valuation (une norme multiplicative) sur  $\mathbb{Q}_p$  en posant  $|r| = p^{-k}$ . Si  $E$  est une extension algébrique finie de  $\mathbb{Q}_p$ , cette valuation prolonge de manière unique et définit une topologie sur  $E$  qui le rend localement compact.

<sup>3</sup>La topologie sur  $\mathbb{R}$  est définie par la valeur absolue usuelle.



*projectif et lisse<sup>4</sup> de variétés lisses à fibres rationnellement connexes. L'application  $Y(k) \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $y \mapsto |X_y(k)/R|$  est semi-continue supérieurement.*

Il m'intéresserait de savoir si cette application est continue (i.e. localement constante). On ne connaît pas de résultats dans cette direction et il serait déjà intéressant d'en obtenir dans des cas particuliers, par exemple pour les surfaces de Châtelet.

Dans une autre direction, on peut se demander dans quels cas l'ensemble  $X(k)/R$  est réduit à un point. D'autre part, il serait intéressant de donner des exemples de variétés qui ont un nombre infini de classes de  $R$ -équivalence et, plus précisément, de variétés unirationnelles ou rationnelles qui ont un nombre infini de classes de  $R$ -équivalence. On connaît de tels exemples sur les corps  $\mathbb{Q}(t)$ ,  $\mathbb{R}(t)$ ,  $\mathbb{R}((t))$  (cf. [Ko04]) : ce sont des hypersurfaces quartiques en un nombre assez grand de variables. Il me semblerait intéressant de trouver des exemples qui sont des intersections de deux quadriques ou des exemples sur  $\mathbb{Q}$ .

## 5 Paramétrage de morphismes

Une des techniques utilisées pour étudier les variétés rationnellement connexes consiste à déformer les courbes rationnelles. Pour faire cela il est utile d'avoir un espace qui «paramètre» ces courbes. La construction suivante est la réponse à ce problème.

Soit  $k$  un corps. Considérons d'abord les morphismes de  $\mathbb{P}_k^1$  vers  $\mathbb{P}_k^N$ . Soit  $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ . Il peut s'écrire comme

$$f : (x : y) \mapsto (F_0(x, y) : F_1(x, y) : \dots : F_N(x, y)),$$

où  $F_0(x, y), F_1(x, y), \dots, F_N(x, y)$  sont des polynômes homogènes de même degré  $d$  (qu'on appelle le degré de  $f$ ) sans facteur commun dans  $k[x, y]^5$ . Il est équivalent de dire qu'ils n'ont pas de racines communes non nulles sur  $\bar{k}$ . D'après le Nullstellensatz, cela signifie que l'idéal engendré par  $F_0(x, y), F_1(x, y), \dots, F_N(x, y)$  dans  $k[x, y]$  contient une certaine puissance de l'idéal  $(x, y)$ , i.e. que l'application

$$\begin{aligned} (\bar{k}[x, y]_{m-d})^{N+1} &\rightarrow \bar{k}[x, y]_m \\ (g_0, \dots, g_{N+1}) &\mapsto \sum_{i=0}^N g_i F_i \end{aligned}$$

est surjective pour certain  $m$  (ici  $\bar{k}[x, y]_m$  signifie la partie graduée de degré  $m$  : les polynômes homogènes de degré  $m$ ).

Remarquons que cette application est linéaire en les coefficients des  $g_i$ . En effet, on peut voir les coefficients des  $g_i$  comme un élément de  $k^{(N+1)(m-d+1)}$  et les coefficients de polynômes de  $\bar{k}[x, y]_m$  comme un élément de  $k^{m+1}$ . L'application considérée est donc représentée par une  $(m+1) \times (N+1)(m-d+1)$ -matrice dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des coefficients des  $F_i$ . Il en découle que  $F_0(x, y), F_1(x, y), \dots, F_N(x, y)$  ont une racine commune non nulle sur  $\bar{k}$  si et seulement si pour tout  $m$  tous les mineurs de rang  $(m+1)$  d'une certaine matrice dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des coefficients des  $F_i$  s'annulent. Cela définit un fermé d'un espace projectif de coefficients des  $F_i$  (i.e. une variété projective) qui est l'intersection dénombrable de fermés (pour chaque  $m$ ). On obtient donc que les morphismes de  $\mathbb{P}_k^1$  vers  $\mathbb{P}_k^N$  de degré  $d$  sont paramétrés par le complémentaire, i.e. par une variété quasi-projective, que l'on note  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^N)$ .

<sup>4</sup>On dispose des notions de morphismes projectifs et de morphismes lisses. Les fibres d'un morphisme projectif (resp. lisse) sont des variétés projectives (resp. lisses).

<sup>5</sup>Remarquons qu'ici on paramètre les morphismes  $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^N$  et pas leurs images, c'est-à-dire que deux morphismes coïncident ssi ils ont des coefficients proportionnels.

Remarquons que que l'on dispose aussi d'un morphisme universel<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^N) &\rightarrow \mathbb{P}_k^N \\ (x : y, f) &\mapsto (F_0(x, y) : F_1(x, y) : \dots : F_N(x, y)) \end{aligned}$$

Finalement, les morphismes de  $\mathbb{P}_k^1$  vers  $\mathbb{P}_k^N$  sont paramétrés par l'union disjointe :

$$\text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^N) \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{d \geq 0} \text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^N).$$

Si maintenant  $X$  est une variété projective définie par des polynômes homogènes  $g_1, \dots, g_s \in k[x_0, x_1, \dots, x_N]$ , alors les morphismes de degré  $d$  sont paramétrés par un fermé  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, X)$  de  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^N)$  (ce qui donne encore une variété quasi-projective puisque ces dernières sont des intersections d'un ouvert et un fermé dans un espace projective) définie par des équations

$$g_i(F_0, \dots, F_N) = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Les morphismes de  $\mathbb{P}_k^1$  vers  $X$  sont paramétrés par l'union disjointe :

$$\text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, X) \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{d \geq 0} \text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, X).$$

On peut généraliser cette construction (cf. [Gr]) pour obtenir un espace paramétrant, par exemple, les morphismes  $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$  tels que  $f(1 : 0) = x$  pour un point  $x \in X$  fixé. On appelle cet espace  $\text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, X, (1 : 0) \mapsto x)$ . Plus généralement, on a un espace  $\text{Mor}(Y, X)$  paramétrant les morphismes d'une variété projective  $Y$  vers une variété quasi-projective  $X$ .

L'étude des espaces  $\text{Mor}(Y, X)$  forme une partie de la théorie de déformations. La propriété qui permet d'utiliser les méthodes de cette théorie dans le cas des variétés rationnellement connexes est la suivante :

*Soit  $X$  une variété rationnellement connexe sur un corps  $k$ . Alors il existe une composante  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}_k^1, X)$  possédant un point lisse.*

## 6 Idée de la démonstration de 4.2

Rappelons qu'il s'agit de montrer que pour une variété projective lisse rationnellement connexe  $X$  sur un corps  $k$ ,  $p$ -adique ou  $\mathbb{R}$ , on a :

- (a) chaque classe de  $R$ -équivalence est ouverte dans  $X(k)$ ,
- (b) l'ensemble des classes de  $R$ -équivalence est fini.

L'assertion (b) découle de (a) et du fait que  $X(k)$  est compact. Remarquons aussi que (a) implique que chaque classe de  $R$ -équivalence est ouverte et fermée dans  $X(k)$ , puisque c'est le complémentaire de la réunion de toutes les autres classes.

Démontrons (a). Soit  $U$  une classe de  $R$ -équivalence sur  $X(k)$  et soit  $x \in U$ . Il s'agit de montrer que  $U$  contient un voisinage de  $x$ . Pour voir cela on utilise que sur un corps  $k$ ,  $p$ -adique ou  $\mathbb{R}$ , pour tout point  $x$  d'une  $k$ -variété rationnellement connexe  $X$  il existe un morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  défini sur  $k$ , et pas seulement sur  $\bar{k}$ , tel que  $f(0 : 1) = x$  et  $f$  correspond à un point lisse de  $\text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, X)$  (cf. [Ko99], 1.4)<sup>7</sup>.

Posons  $y := f(1 : 0)$  et considérons  $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, X, (1 : 0) \mapsto y)$ . La théorie des espaces  $\text{Mor}$  (cf. [Ko96]) implique que dans notre situation on a non seulement

<sup>6</sup> On a la notion de produit de variétés. Si  $X, Y$  sont des variétés projectives (resp. quasi-projectives) sur un corps  $k$ , alors leur produit  $X \times Y$  l'est aussi.

<sup>7</sup> C'est un résultat spécifique pour une certaine classe de corps qu'on appelle les corps fertiles.

que  $f$  correspond à un point lisse  $[f]$  de  $\text{Mor}(\mathbb{P}_k^1, X)$ , mais aussi qu'il existe un ouvert  $V \subset M$  contenant  $[f]$  tel que le morphisme universel  $F : \mathbb{P}^1 \times V \rightarrow X$  soit lisse en dehors de  $\{(1 : 0)\} \times V$ . Le résultat découle donc du fait que les morphismes lisses induisent des applications ouvertes pour la  $k$ -topologie (cf. [Gra-Re]). On a donc que  $F((\mathbb{P}_k^1(k) \setminus (1 : 0)) \times V(k))$  contient un voisinage ouvert de  $x$ . Cela finit la preuve de 4.2.

Les problèmes présentés couvrent un vaste domaine de recherche auquel je voudrais me consacrer au cours de ma thèse, ainsi qu'aux questions proches (approximation faible, conjecture d'Ax, etc.). Beaucoup de résultats ont été obtenus grâce à des techniques assez récentes, mais beaucoup de problèmes restent ouverts et me semblent fournir un sujet de recherche très intéressant.

## Références

- [CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem 90 for  $K_2$ , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), pp. 1-20.
- [CT-Co] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), pp. 301–332.
- [CT-Sa] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La  $R$ -équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **10** (1977), pp. 175–230.
- [CT-Sa-SD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces I and II*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), pp. 37–107 et **374** (1987), pp. 72–168.
- [CT-Sk] J.-L. Colliot-Thélène, A. Skorobogatov,  *$R$ -equivalence on conic bundles of degree 4*, Duke Math. J. **54** (1987), pp. 671–677.
- [Gi] Ph. Gille, *La  $R$ -équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), pp. 199–235.
- [Gr] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1960/61, Exp. 221, Astérisque hors série **6**, Soc. Math. Fr. (1997).
- [Gr-Ha-St] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 57–67.
- [Gra-Re] H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Springer-Verlag, New York (1971).
- [Ko96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag (1996).
- [Ko99] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Annals of Math. **150** (1999), pp. 357–367.
- [Ko04] J. Kollár, *Specialization of zero cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), pp. 689–708.
- [Ko-Mi-Mo] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori *Rationally connected varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), pp. 429–448.
- [Ko-Sza] J. Kollár, E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), pp. 251–267.
- [Ma] Yu. Manin, *Cubic forms*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1972 (en Russe); Version angl. : North-Holland Publ., Co., London, 1974.
- [SD] H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Universal equivalence for cubic surfaces over finite and local fields*, Symposia Math. **24** (1981), 111–143.

## Troisième partie

# Cycles évanescents sur des schémas formels

## 7 Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier le formalisme de cycles évanescents dans le cas des schémas formels. Soient  $k$  un corps non-Archimédien et  $\mathbb{k}$  l'anneau des entiers de  $k$ . Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel localement de présentation finie sur  $k$ . On associe à  $\mathfrak{X}$  un espace analytique  $\mathfrak{X}_\eta$ , sa fibre générique, et un schéma sur le corps résiduel de  $k$ , sa fibre spéciale  $\mathfrak{X}_s$ . On construit un foncteur de cycles évanescents de la catégorie des faisceaux étales sur  $\mathfrak{X}_\eta$  vers la catégorie des faisceaux étales sur  $\mathfrak{X}_s$ . Si  $\widehat{\mathfrak{X}}$  est la completion formelle  $\widehat{\mathcal{X}}$  d'un schéma  $\mathcal{X}$  de présentation finie sur  $k$  on montre que les faisceaux de cycles évanescents de  $\widehat{\mathcal{X}}$  pour un faisceau torsion sont isomorphes aux faisceaux de cycles évanescents de  $\mathcal{X}$ . En particulier, cela montre que les cycles évanescents de  $\mathcal{X}$  ne dépendent que de  $\widehat{\mathcal{X}}$ .

## 8 Éléments de théorie spectrale

### 8.1 Anneaux de Banach

Dans cette section on introduira quelques notions sur les groupes et les anneaux normés et semi-normés.

**Définition 8.1.** Soit  $G$  un groupe abélien. Une *semi-norme* sur  $G$  est une fonction  $\| \cdot \| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- (i)  $\|0\| = 0$ ,
- (ii)  $\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$  pour tous  $a, b \in G$ .

Une semi-norme  $\| \cdot \|$  sur un groupe  $G$  est dite *non-archimédienne* si

$$(ii') \quad \|a - b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\} \text{ pour tous } a, b \in G.$$

Dans ce cas on appelle (ii') l'inégalité non-archimédienne.

Une semi-norme  $\| \cdot \|$  est une *norme* si  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ .

Notons que si  $G_1 \subset G$  est un sous-groupe d'un groupe semi-normé  $G$ , on peut définir une semi-norme sur  $G/G_1$  en posant  $\|a\| = \inf\{\|g\| \mid g \in G, \pi(g) = a\}$ , où  $\pi : G \rightarrow G/G_1$  est la projection canonique. La semi-norme sur  $G/G_1$  ainsi obtenue s'appelle la semi-norme résiduelle.

**Définition 8.2.** Soit  $\phi : G \rightarrow H$  un homomorphisme de groupes semi-normés. On dit qu'il est *borné* s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|\phi(f)\| \leq C\|f\|$  pour tout  $f \in G$ .

**Définition 8.3.** On dit que deux semi-normes  $\| \cdot \|$  et  $\| \cdot \|'$  sur un groupe  $G$  sont *équivalentes* s'il existe  $C, C' > 0$ , tels que  $C\|a\| \leq \|a\|' \leq C'\|a\|$  pour tout  $a \in G$ .

**Définition 8.4.** Soit  $\phi : G \rightarrow H$  un homomorphisme de groupes semi-normés. On dit qu'il est *admissible* si la semi-norme résiduelle sur  $G/\ker \phi$  est équivalente à la semi-norme sur  $\text{Im } \phi$  obtenue par restriction de la semi-norme sur  $H$ .

**Définition 8.5.** Soit  $A$  un anneau unitaire. Une *semi-norme* sur  $A$  est une semi-norme sur le groupe additif de  $A$  telle que

- (i)  $\|1\| \leq 1$ ,
  - (ii)  $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  pour tous  $a, b \in A$ .
- Une telle semi-norme est *multiplicative* si  $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$  pour tous  $a, b \in A$ .  
 Une *valuation* est une norme multiplicative.

Notons que si  $A$  est un anneau non nul et si la valuation n'est pas l'application nulle, alors (d'après (ii)) (i)  $\Leftrightarrow \|1\| = 1$ .

**Exemple 8.6.** Un anneau de valuation discrète est un anneau normé non-archimédien. En effet, si  $A$  est un tel anneau et  $v : A \rightarrow \mathbb{Z}$  est une valuation sur  $A$ , on obtient une norme non-archimédienne sur  $A$  en posant  $\|a\| = e^{-v(a)}$ . Dans la suite, sauf mention du contraire, une valuation signifie une norme multiplicative.

Pour les anneaux semi-normés on a la notion de suite de Cauchy, i.e. on dit qu'une suite  $(x_n)$ ,  $x_n \in A$  est de Cauchy si  $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ . On dit qu'un anneau semi-normé est complet si toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet anneau. Dans ce cas, on dira parfois que la semi-norme est complète. De la même manière comme en analyse classique, on peut définir la complétion  $\hat{A}$  de l'anneau normé  $A$ , cette complétion existe et est unique à un isomorphisme près.

**Définition 8.7.** Un *anneau de Banach* est un anneau normé, complet pour cette norme.

**Définition 8.8.** Soit  $A$  un anneau normé. Un  $A$ -module  $M$  est dit semi-normé (resp. normé) s'il est muni d'une semi-norme (resp. norme)  $\| \cdot \|$  telle qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|am\| \leq C\|a\|\|m\|$  pour tous  $a \in A, m \in M$ , où  $\| \cdot \|$  désigne la norme de  $A$ .

**Définition 8.9.** Soit  $A$  un anneau normé. Soient  $M, N$  des  $A$ -modules semi-normés. On définit une semi-norme sur  $M \otimes_A N$  en posant  $\|f\| = \inf \sum_i \|m_i\| \|n_i\|$ , où l'on prend l'inf sur toutes les décompositions  $f = \sum m_i \otimes n_i$ . La complétion de  $M \otimes_A N$  pour cette semi-norme s'appelle le *produit tensoriel complété*. On le note  $M \hat{\otimes}_A N$ .

Dans la suite on va essentiellement utiliser les anneaux normés suivants.

**Définition 8.10.** Un *corps de valuation* est un corps qui est un anneau de Banach, dont la norme est une valuation.

**Définition 8.11.** Soit  $K$  un corps de valuation. On dit que  $K$  est *quasi-complet* si la valuation sur  $K$  s'étend d'une manière unique sur chaque extension algébrique finie de  $K$ .

**Définition 8.12.** Un corps *non-archimédien* est un corps de valuation, tel que la valuation est non-archimédienne. En d'autres termes, c'est un corps  $K$  muni d'une application  $\| \cdot \| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- (i)  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
  - (ii)  $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$  pour tous  $a, b \in K$
  - (iii)  $\|a + b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$  pour tous  $a, b \in K$ ,
- et  $K$  est complet pour cette norme.

(En fait, la condition (ii) implique que  $\|1\| = 1$  et  $\|-a\| = \|a\|$ , d'où (iii)  $\Leftrightarrow \|a - b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$  pour tous  $a, b \in K$ ).

La condition (iii) ci-dessus peut être précisée de la manière suivante :

**Proposition 8.13.** *Soit  $K$  un corps non-archimédien. Soient  $a, b \in K$  tels que  $\|a\| \neq \|b\|$ . Alors  $\|a + b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\|b\| < \|a\|$ . Si  $\|a + b\| < \|a\|$ , alors  $\|a\| = \|(a + b) - b\| \leq \max\{\|a + b\|, \|b\|\} < \|a\|$ , ce qui n'est pas possible. Donc  $\|a + b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ .  $\square$

**Remarque 8.14.** En général, si  $A$  (resp.  $K$ ) est un anneau (resp. corps) muni d'une valuation  $\|\cdot\|$ , on dit que la valuation est *discrète* (cf. 8.6), si l'ensemble  $\{\|a\|, a \in A (a \in K), a \neq 0\}$  est discret dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Notons qu'il existe des corps munis d'une valuation non-Archimédienne non discrète. Par exemple, l'ensemble des séries formelles (qui est un corps)  $\{x = a_1 t^{r_1} + \dots + a_n t^{r_n} + \dots, a_i \in k, a_i \neq 0, r_i \in \mathbb{Q}, r_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty\}$ ,  $k$  est un corps, où l'on définit une valuation par  $\|x\| = 0$  si  $x = 0$  et  $\|x\| = 2^{-r_1}$  sinon (cf.[Mo] I.3.4).

**Définition 8.15.** Soit  $K$  un corps non-archimédien. Soit  $A$  une  $K$ -algèbre. Dans la suite dira qu'une application  $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  définit une *norme* sur  $A$  si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i)  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,
- (ii)  $\|cf\| = \|c\| \cdot \|f\|$  pour tous  $c \in K, f \in A$ , où  $\|c\|$  désigne la norme sur  $K$ ,
- (iii)  $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$  pour tous  $f, g \in A$ ,
- (iv)  $\|f + g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$  pour tous  $f, g \in A$ .

**Remarque 8.16.** Notons que si  $A$  est une  $K$ -algèbre comme dans la définition ci-dessus, alors  $(x_n) \in A$  est de Cauchy ssi  $\|x_{n+1} - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Cela découle de l'inégalité non-archimédienne :  $\|x_{n+t} - x_n\| \leq \max\{\|x_{n+t-1} - x_n\|, \|x_{n+t} - x_{n+t-1}\|\} \leq \dots \leq \max\{\|x_{n+1} - x_n\|, \dots, \|x_{n+t} - x_{n+t-1}\|\}$ .

**Définition 8.17.** Soient  $A$  un anneau de Banach et  $\|\cdot\|$  sa norme. Une semi-norme  $|\cdot|$  sur  $A$  est dite *bornée* s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|a| \leq C\|a\|$  pour tout  $a \in A$ . On note  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble de toutes les semi-normes multiplicatives bornées de  $A$  et on l'appelle le *spectre* de  $A$ . On munit  $\mathcal{M}(A)$  d'une topologie : c'est la topologie la moins fine telle que les applications de la forme  $|\cdot| \mapsto |f|, f \in A$  soient continues.

**Théorème 8.18.** *Le spectre  $\mathcal{M}(A)$  est un espace séparé compact non vide.*

*Démonstration.* [Ber1] 1.2.1  $\square$

**Définition 8.19.** Soient  $x \in \mathcal{M}(A)$  et  $|\cdot|$  la semi-norme correspondante. Soit  $\mathfrak{p}_x$  le noyau de  $|\cdot|$ . C'est un idéal premier fermé de  $A$  et par l'inégalité (ii) dans 8.1, le valeur  $|f|$  ne dépend que de la classe de  $f$  dans  $A/\mathfrak{p}_x$ . On peut étendre la valuation ainsi obtenue sur l'anneau intègre  $A/\mathfrak{p}_x$  à son corps de fractions  $k(x)$ . On note  $\mathcal{H}(x)$  la complétion de  $k(x)$  pour cette valuation et on note  $f(x)$  l'image de  $f \in A$  dans  $\mathcal{H}(x)$ . Le morphisme ainsi obtenu

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : A &\rightarrow \prod_{x \in \mathcal{M}(A)} \mathcal{H}(x) \\ f &\mapsto \hat{f} = (f(x))_{x \in \mathcal{M}(A)} \end{aligned}$$

s'appelle la *transformation de Gel'fand*.

**Définition 8.20.** Un homomorphisme borné  $A \rightarrow K$ , où  $K$  est un corps de valuation s'appelle un *caractère* de  $A$ . On dit que deux caractères  $\chi' : A \rightarrow K'$  et  $\chi'' : A \rightarrow K''$

sont *équivalents* si'il existe un caractère  $\chi: A \rightarrow K$  et des inclusions  $i': K' \hookrightarrow K$  et  $i'': K'' \hookrightarrow K$  telles que  $i' \circ \chi' = i'' \circ \chi''$ .

**Remarque 8.21.** Le spectre  $\mathcal{M}(A)$  s'identifie à l'ensemble de classes d'équivalence de caractères sur  $A$ . En effet, le point  $x \in \mathcal{M}(A)$  donne un caractère  $\chi_x: A \rightarrow \mathcal{H}(x)$  (ou  $A \rightarrow k(x)$ ),  $f \mapsto f(x)$ , si  $x \neq y$  alors les caractères  $\chi_x$  et  $\chi_y$  ne sont pas équivalents. Inversement, si  $\chi: A \rightarrow K$  est un caractère, alors en le composant avec la valuation sur  $K$  on obtient un élément de  $\mathcal{M}(A)$ .

Posons  $\|\hat{f}\| = \max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f(x)|$ , où  $|f(x)|$  est la valeur en  $f(x)$  de la valuation sur  $\mathcal{H}(x)$  obtenue par l'extension de la semi-norme correspondante à  $x$ .

Soit  $A$  un anneau de Banach, soit  $f \in A$ . On pose  $\rho(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|}$ . ([Ber1] 1.3).

**Théorème 8.22.** *Pour tout  $f \in A$  un élément d'un anneau de Banach  $A$  on a :  $\rho(f) = \|\hat{f}\|$ .*

*Démonstration.* [Ber1] 1.3.1 □

Soit  $k$  un corps non-archimédien. On ne suppose pas que la valuation sur  $k$  est non-triviale (la valuation triviale est donné par :  $\|a\| = 1$ , si  $a \neq 0$ ,  $\|0\| = 0$ ). L'anneau des entiers de  $k$  est

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in k \mid \|a\| \leq 1\}.$$

**Proposition 8.23.** (i)  $k$  possède l'unique idéal premier non nul (qui est donc maximal)  $k = \{a \in k \mid \|a\| < 1\}$ ;

(ii) soit  $\mathfrak{p}$  un idéal non nul de  $k$ . Alors il existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que soit  $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| \leq t\}$ , soit  $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| < t\}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal non nul de  $k$ , soit  $a \in \mathfrak{p}$ . Soit  $b \in k$  tel que  $\|b\| \leq \|a\|$ . Alors  $\|\frac{b}{a}\| < 1$  ( $b = a \cdot \frac{b}{a}$ , la norme est multiplicative et  $\|b\| \leq \|a\|$ ), donc  $\frac{b}{a} \in k$  et  $b = a \cdot \frac{b}{a} \in \mathfrak{p}$ . Donc  $a \in \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p}$  pour chaque  $b \in k$  tel que  $\|b\| \leq \|a\|$ . Donc pour démontrer (ii) il suffit de prendre  $t = \sup_{a \in k} \|a\|$ .

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $k$ . Alors il existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que soit  $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| \leq t\}$ , soit  $\mathfrak{p} = \{a \in k \mid \|a\| < t\}$ . Si  $\mathfrak{p}$  est différent de  $k$ , alors  $t < 1$  et il existe  $a \notin \mathfrak{p}$ ,  $a \in k$ . Comme  $\|a\| < 1$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n \in \mathfrak{p}$ , ce qui implique  $a \in \mathfrak{p}$  puisque  $\mathfrak{p}$  est premier. On obtient ainsi une contradiction, donc  $k$  possède l'unique idéal premier non nul  $k = \{a \in k \mid \|a\| < 1\}$ . □

On pose  $\tilde{k} \stackrel{\text{def}}{=} k/k -$  le corps résiduel de  $k$  (si la valuation est triviale,  $\tilde{k} = k = k$  et  $k = \{0\}$ ).

**Remarque 8.24.** Notons que l'anneau  $k$  n'est pas en général noethérien, par exemple, lorsque la valuation n'est pas discrète (cf. 8.14).

Dans la suite on va utiliser le résultat suivant :

**Théorème 8.25.** *Une valuation de  $k$  admet une unique extension à une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ . Cette valuation est complète pour chaque sous-extension finie de  $\bar{k}/k$ .*

*Démonstration.* [BGR] 3.2.4/2 □

Si  $\|\cdot\|$  est une valuation sur  $k$ , on dénote aussi son prolongement sur  $\bar{k}$  par  $\|\cdot\|$ . Dans la suite on va noter par  $k$  un corps non-archimédien (sans le préciser).

## 8.2 Algèbres de Tate

Dans cette section on s'intéresse aux séries à coefficients dans  $k$  ou  $k$ .

**Lemme 8.26.** *La série  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ,  $a_{\nu} \in k$  est convergente ssi  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_{\nu}\| = 0$ .*

*Démonstration.* Si la série  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ,  $a_{\nu} \in k$  est convergente alors  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_{\nu}\| = 0$ . Donc il suffit de démontrer l'inverse. Comme la valuation est non-archimédienne, on a :  $\|\sum_{\nu=i}^j a_{\nu}\| \leq \max_{\nu=i \dots j} \|a_{\nu}\|$ . Comme  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_{\nu}\| = 0$ , cela montre que  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  est de Cauchy et donc convergente car  $k$  est complet.  $\square$

Maintenant considérons des séries à coefficients dans  $k$ . Posons

$$\mathbb{B}^n(\bar{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}^n; \|x_i\| \leq 1\}.$$

**Lemme 8.27.** *La série  $S = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu_1 \dots \nu_n} \zeta_1^{\nu_1} \dots \zeta_n^{\nu_n} \in k[[\zeta_1, \dots, \zeta_n]]$  converge dans  $\mathbb{B}^n(\bar{k})$  ssi  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_{\nu}\| = 0$ .*

*Démonstration.* Si  $S$  est convergente en point  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{B}^n(\bar{k})$  alors  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_{\nu}\| = 0$  par 8.26. Inversement, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n(\bar{k})$ . Alors il existe une sous-extension  $k'$  de  $\bar{k}/k$  telle que  $x_i \in k'$  pour tout  $i = 1 \dots n$ . Par 8.25,  $k'$  est complet et donc  $S(x)$  est convergente dans  $k' \subset \bar{k}$  par 8.26 ( $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_{\nu}\| = 0$  implique  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_{\nu}\| \|x^{\nu}\| = 0$ ).

**Définition 8.28.** La sous-algèbre des séries convergentes  $T_n \stackrel{\text{def}}{=} k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle \subset k[[\zeta_1, \dots, \zeta_n]]$  s'appelle l'algèbre de Tate.

Il est facile de vérifier que  $T_n$  est une  $k$ -algèbre. On peut la munir de façon naturelle d'une norme.

**Proposition 8.29.** *Soit  $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu} \zeta^{\nu} \in k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ . L'application  $\|\cdot\| : T_n \rightarrow \mathbb{R}_+$  :*

$$\|f\| = \max \|c_{\nu}\|$$

*définit une norme sur  $T_n$ . On l'appelle la norme de Gauß.*

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,  $\|cf\| = \|c\| \cdot \|f\|$  pour  $c \in k$  et  $\|f + g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}$  pour tous  $f, g \in T_n$ . Pour démontrer que  $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$  pour tous  $f, g \in T_n$  il suffit de prendre  $f$  et  $g$  tels que  $\|f\| = \|g\| = 1$  (quitte à diviser tous les coefficients de  $f$  par un coefficient de norme maximale et de même pour  $g$ .)

Notons que  $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$  vient de l'inégalité non-archimédienne  $\|a + b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$  pour tous  $a, b \in k$ . Montrons que  $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\| = 1$ . Supposons le contraire:  $\|fg\| < 1$ . Notons que  $f, g \in k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ , où  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$  est la sous-algèbre de  $T_n$  formée par les séries à coefficients dans  $k$ .

Comme  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_{\nu}\| = 0$  pour  $h = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu} \zeta^{\nu} \in k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ , la projection canonique  $\pi : k \rightarrow \bar{k} = k/k$  donne l'épimorphisme  $\pi : k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle \rightarrow \bar{k}\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ ,  $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu} \zeta^{\nu} \mapsto \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \pi(c_{\nu}) \zeta^{\nu}$ . En plus,  $\pi(h) = 0 \Leftrightarrow \|h\| < 1$ . D'où  $0 = \pi(fg) = \pi(f)\pi(g) \neq 0$  car  $\bar{k}\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$  est intègre. On obtient une contradiction et donc  $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$ .  $\square$



**Proposition 8.30.**  $T_n$  muni de la norme de Gauß est complète. C'est donc une algèbre de Banach.

*Démonstration.* Soit  $\sum_{\beta=0}^{\infty} f_i$ ,  $f_i = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{i\nu} \zeta^\nu \in T_n$  est de Cauchy. De même comme dans la preuve de 8.26, on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\| = 0$ . On a donc  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|c_{i\nu}\| = 0$  pour chaque  $\nu$ . Donc les limites  $c_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i\nu}$  existent. Montrons que la série  $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu \zeta^\nu$  est convergente. Par 8.27 il suffit de démontrer que  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_\nu\| = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\| = 0$  on a  $\|c_{i\nu}\| < \varepsilon$  pour tout  $i \geq N$  et  $\varepsilon$ . Comme les séries  $f_0, \dots, f_{N-1}$  sont convergentes, les valuations de tous ses coefficients sauf un nombre fini sont plus petites que  $\varepsilon$ . Comme  $c_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i\nu}$ , alors  $\|c_\nu\| < \varepsilon$  pour tous  $\nu$  sauf un nombre fini. Donc  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|c_\nu\| = 0$ ,  $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu \zeta^\nu$  converge et  $f = \sum_{\beta=0}^{\infty} f_i$ .  $\square$

**Proposition 8.31.**  $T_n$  est un anneau noethérien et factoriel.

*Démonstration.* [BGR] 5.2.6/1  $\square$

**Proposition 8.32.** Soit  $\mathfrak{a} \subset T_n$  un idéal. Alors  $\mathfrak{a}$  est fermé dans  $T_n$ . De plus, il est strictement fermé dans  $T_n$ , i.e. pour chaque  $f \in T_n$  il existe  $a_0 \in \mathfrak{a}$  tel que  $\|f - a_0\| = \inf_{a \in \mathfrak{a}} \|f - a\|$ .

*Démonstration.* [BGR] 5.2.7/2 et 5.2.7/8  $\square$

Les propriétés ci-dessus se démontrent à l'aide de la division de Weierstraß dans  $T_n$  ([BGR] 5.2). C'est l'analogie de la division euclidienne dans les anneaux de polynômes.

On peut généraliser la construction ci-dessus de la façon suivante :

**Définition 8.33.** Soient  $r_1, \dots, r_n > 0$ . On pose

$$k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu \mid a_\nu \in k, \|a_\nu\| r^\nu \rightarrow 0 \text{ si } |\nu| \rightarrow \infty\},$$

où  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$ ,  $\zeta^\nu = \zeta_1^{\nu_1} \dots \zeta_n^{\nu_n}$ ,  $r^\nu = r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n}$ . On note  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle$  pour simplifier les notations.

De même que pour  $T_n$  on peut munir  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  d'une norme en posant  $\|f\| = \max_{\nu} \|a_\nu\| r^\nu$ . De plus,  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  est complète pour cette norme, donc c'est une  $k$ -algèbre de Banach. Mais  $k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle$  ne coïncide pas avec l'ensemble des séries convergentes sur un polydisque fermé ([BGR] 6.1.5).

**Proposition 8.34.**  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  est un anneau noethérien. Si  $\mathfrak{a} \subset k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  un idéal, alors  $\mathfrak{a}$  est fermé dans  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$ .

*Démonstration.* [Ber1] 2.1.3  $\square$

**Remarque 8.35.** Par le même procédé, on peut définir l'anneau  $A\langle r^{-1}\zeta \rangle$  pour  $A$  une algèbre de Banach quelconque.

### 8.3 Algèbres affinoïdes

Dans cette section on s'intéresse aux algèbres de la forme  $k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle/\mathfrak{a}$  (en particulier,  $T_n/\mathfrak{a}$ ) où  $\mathfrak{a} \subset k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle$  est un idéal.

Si  $A = k\langle r^{-1}\zeta \rangle/\mathfrak{a}$  est une telle  $k$ -algèbre,  $\pi : k\langle r^{-1}\zeta \rangle \rightarrow k\langle r^{-1}\zeta \rangle/\mathfrak{a}$  est la projection canonique, définissons  $\| \cdot \| : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  :

$$\|\pi(h)\| = \inf_{a \in \mathfrak{a}} \|h - a\|, \quad h \in k\langle r^{-1}\zeta \rangle.$$

**Proposition 8.36.** *L'application définie ci-dessus est une norme sur  $A$ , telle que  $A$  est complète pour  $\| \cdot \|$ . Donc c'est une  $k$ -algèbre de Banach. De plus, si  $A$  est de la forme  $k\langle \zeta \rangle/\mathfrak{a}$ , alors pour chaque  $f \in A$  il existe  $\bar{f} \in k\langle \zeta \rangle$  tel que  $\pi(\bar{f}) = f$  et  $\|f\| = \|\bar{f}\|$ .*

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $\| \cdot \|$  définit une norme sur une  $k$ -algèbre  $A$  (le fait que  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$  pour  $f \in A$  découle de 8.34). Si  $A$  est de la forme  $k\langle \zeta \rangle/\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}$  est strictement fermé dans  $k\langle \zeta \rangle$  (par 8.32). Alors pour chaque  $f \in A$  il existe  $\bar{f} \in k\langle \zeta \rangle$  tel que  $\pi(\bar{f}) = f$  et  $\|f\| = \|\bar{f}\|$ .

Il reste à montrer que  $A$  est complète pour  $\| \cdot \|$ . Cela découle du fait que  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  est complet et qu'on peut relever une suite de Cauchy de  $A = k\langle r^{-1}\zeta \rangle/\mathfrak{a}$  en une suite de Cauchy dans  $k\langle r^{-1}\zeta \rangle$  car  $(x_n) \in A$  est de Cauchy ssi  $\|x_{n+1} - x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  par 8.16.  $\square$

**Définition 8.37.** Une  $k$ -algèbre de Banach  $A$  s'appelle une *algèbre  $k$ -affinoïde* s'il existe un épimorphisme admissible  $k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle \twoheadrightarrow A$  pour certains  $r_1, \dots, r_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si l'on peut trouver un épimorphisme admissible  $T_n \twoheadrightarrow A$ , on dit que  $A$  est une algèbre *strictement  $k$ -affinoïde*. On dit que  $A$  est une  $k$ -algèbre affinoïde si c'est une algèbre  $K$ -affinoïde pour certain corps non-archimédien  $K$  sur  $k$ . Dans la suite on écrira souvent une "algèbre affinoïde" au lieu d'une "algèbre  $k$ -affinoïde".

Notons que l'on peut voir l'algèbre affinoïde  $k\langle r_1^{-1}\zeta_1, \dots, r_n^{-1}\zeta_n \rangle/\mathfrak{a}$  comme l'algèbre des fonctions définies sur le lieu des zéros de  $\mathfrak{a}$  sur un polydisque fermé de polyrayon  $(r_1, \dots, r_n)$ .

**Définition 8.38.** Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde. L'espace  $\mathcal{M}(A)$  s'appelle un *espace  $k$ -affinoïde*.

Notons que cette définition a un sens car si  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde,  $A$  est une algèbre de Banach. Parfois on dira simplement un "espace affinoïde" pour un "espace  $k$ -affinoïde". Un morphisme borné d'algèbres affinoïdes  $\phi : A \rightarrow B$  induit un morphisme  $\phi^* : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  en posant  $\phi^*(x)(f) \stackrel{\text{def}}{=} |\phi(f)|$  pour  $x \in \mathcal{M}(B)$  où l'on note  $| \cdot |$  la semi-norme correspondante à  $x$ .

Pour avoir des propriétés fonctorielles, on considère la catégorie des algèbres affinoïdes comme la catégorie où les objets sont les algèbres affinoïdes et les morphismes sont les homomorphismes bornés.

**Remarque 8.39.** Notons que tout morphisme d'anneaux  $\phi$  entre des algèbres strictement affinoïdes  $A$  et  $B$  est borné pour n'importe quel choix de normes de Banach. En effet, un tel morphisme est automatiquement continu par [BGR] 6.1.3/1, donc  $\|\phi(a)\| < \varepsilon$  si  $\|a\| \leq \delta$ , d'où l'on déduit que  $\|\phi(a)\| < \frac{\varepsilon}{\delta}\|a\|$ , donc  $\phi$  est borné. Cela n'est pas vrai en général pour les algèbres affinoïdes ([Ber1] 2.1.13). Ce n'est pas vrai non plus que si  $\phi : A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'algèbres affinoïdes tel que chaque caractère sur  $B$  induit un caractère sur  $A$ , alors  $\phi$  est borné (par [Ber1] 2.1.13 encore).

**Proposition 8.40.** *Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Soit  $B$  une  $A$ -algèbre finie. Supposons que  $A \rightarrow B$  est un morphisme injectif. Alors l'application induite  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est surjective et quasi-finie (i.e. ses fibres sont finies).*

*Démonstration.* [Ber1] 2.1.16 □

**Définition 8.41.** Soit  $V \subset X$  un fermé dans un espace affinoïde  $X$ . On dit que  $V$  est un *domaine affinoïde* de  $X$  s'il existe un homomorphisme borné d'algèbres affinoïdes  $\phi : A \rightarrow A_V$  avec la propriété universelle suivante : pour tout homomorphisme borné d'algèbres affinoïdes  $f : A \rightarrow B$  tel que l'image de  $\mathcal{M}(B)$  est incluse dans  $V$  il existe un unique homomorphisme borné  $\tilde{f} : A_V \rightarrow B$  tel que  $f = \tilde{f} \circ \phi$ .

**Théorème 8.42.** *Soit  $V$  un domaine affinoïde dans un espace affinoïde  $X$ . Alors  $\mathcal{M}(A_V) \xrightarrow{\sim} V$ . En particulier, le morphisme  $A \rightarrow A_V$  est uniquement déterminé par  $V$ .*

*Démonstration.* [Ber1] 2.2.4 □

**Exemple 8.43.** Donnons quelques exemples fondamentaux de domaines affinoïdes (dans les exemples ci-dessous la propriété universelle découle de [Ber1] 2.1.5).

1. Soit  $X$  un espace affinoïde, soient  $p, q > 0$ . Un sous-espace fermé de  $X$  de la forme  $X(f) = \{x \in X \mid |f(x)| \leq p\}$  s'appelle un *domaine de Weierstraß* de  $X$ . Un sous-espace fermé de la forme  $X(f, g^{-1}) = \{x \in X \mid |f(x)| \leq p, |g(x)| \geq q\}$  s'appelle un *domaine de Laurent* de  $X$ .  
Si  $X = \mathcal{M}(A)$  alors un domaine de Laurent est représenté par l'homomorphisme  $A \rightarrow A\langle p^{-1}f, qg^{-1} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} A\langle p^{-1}T, qS \rangle / (T - f, gS - 1)$ .
2. Si  $\phi : A \rightarrow B$  est un morphisme borné d'algèbres affinoïdes,  $\phi^* : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  le morphisme induit,  $V$  est un domaine affinoïde dans  $\mathcal{M}(A)$ , alors  $\phi^{*-1}(V)$  est un domaine affinoïde dans  $\mathcal{M}(B)$ , représenté par le morphisme  $B \rightarrow B \hat{\otimes}_A A_V$ .
3. Si  $U, V$  sont des domaines affinoïdes dans  $X = \mathcal{M}(A)$ , alors  $U \cap V$  est un domaine affinoïde, représentée par le morphisme  $A \rightarrow A_U \hat{\otimes}_A A_V$ .
4. Si  $V$  est un domaine affinoïde dans l'espace affinoïde  $U$ , qui est un domaine affinoïde dans  $X$ , alors  $V$  est un domaine affinoïde dans  $X$ .

Pour construire les espaces analytiques "globaux" on aura besoin du résultat suivant :

**Théorème 8.44 (Tate).** *Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un recouvrement fini d'un espace affinoïde  $X = \mathcal{M}(A)$  par les domaines affinoïdes  $V_i = \mathcal{M}(A_{V_i})$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de Banach de type fini. Alors le complexe de Čech*

$$0 \rightarrow M \rightarrow \prod_i M \otimes_A A_{V_i} \rightarrow \prod_{i,j} M \otimes_A A_{V_i \cap V_j} \rightarrow \dots$$

*est exact.*

*Démonstration.* [Ber1] 2.2.5 □

**Définition 8.45.** Soit  $V \subset X$  un fermé dans un espace affinoïde  $X$ . On dit que  $V$  est un *domaine spécial* de  $X$  si  $V$  peut s'écrire comme une union finie de domaines affinoïdes de  $X$ .

Soit  $X = \mathcal{M}(A)$  un espace affinoïde. On peut le munir d'une structure d'espace annelé comme suit. Pour  $U \subset X$  on pose  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varprojlim A_V$ , où l'on prend la limite

sur tous les domaines spéciaux  $V \subset U$  et  $A_V$  est une algèbre affinoïde correspondante à  $V$ . On définit ainsi un préfaisceau sur  $X$  qui est en fait un faisceau par le théorème de Tate 8.44. On note  $\mathcal{O}_{X,x}$  la fibre de  $\mathcal{O}_X$  en point  $x$ .

**Remarque 8.46.** Par [Ber1] 2.3 la fibre  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau local d'idéal maximal  $m_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid |f(x)| = 0\}$  (si  $|f(x)| \neq 0$ ,  $f$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ ). De plus, on a le résultat suivant :

**Proposition 8.47.** *L'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau Hensélien.*

*Démonstration.* [Ber2], 2.1.5 □

Dans la suite on va considérer les espaces affinoïdes comme les espaces localement annelés. Maintenant définissons la catégorie des espaces affinoïdes (i.e. définissons les morphismes). Notons que l'application  $A \mapsto X = \mathcal{M}(A)$  définit un foncteur de la catégorie des algèbres affinoïdes vers la catégorie des espaces localement annelés. Ce foncteur est fidèle, mais il n'est pas pleinement fidèle par 8.39. Pour éviter ce problème on définit morphisme d'espaces affinoïdes  $X \rightarrow Y$ , où  $X = \mathcal{M}(A)$ ,  $Y = \mathcal{M}(B)$  comme un morphisme d'espaces localement annelés qui vient d'un morphisme borné  $B \rightarrow A$ . On obtient ainsi une catégorie.

**Définition 8.48.** Si  $K$  est une extension de  $k$ , alors l'application  $A \rightarrow A \hat{\otimes} K$  définit un foncteur de la catégorie des espaces  $k$ -affinoïdes vers la catégorie des espaces  $K$ -affinoïdes. On l'appelle *l'extension du corps de base*.

## 8.4 L'anneau $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$

On a déjà introduit l'anneau  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$  comme la sous-algèbre de  $T_n$  formée par des séries à coefficients dans  $k$  (i.e. par les séries  $s$ , telles que  $\|s\| \leq 1$ ). On écrira parfois  $k\langle \zeta \rangle$  pour  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$  (ici  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ ).

Dans la suite on va s'intéresser aux quotients de la forme  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle / \mathfrak{a}$ , où  $\mathfrak{a}$  est l'idéal de  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ . Étudions d'abord quelques propriétés de  $k$  et  $k\langle \zeta_1, \dots, \zeta_n \rangle$ . Pour cela introduisons la notion d'anneau adique.

**Définition 8.49.** *Un anneau topologique* est un anneau muni d'une topologie telle que l'addition et la multiplication sont continues pour cette topologie.

Soit  $A$  un anneau, soit  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal. Il existe une unique topologie sur  $A$  telle que une base de voisinages de zéro est donnée par  $\mathfrak{a}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Plus précisément,  $U \subset A$  est ouvert ssi pour chaque  $x \in U$  il existe  $n$  tel que  $x + \mathfrak{a}^n \in U$ . La topologie ainsi obtenue s'appelle *la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique*. Notons que les  $\mathfrak{a}^n$  sont ouverts et fermés pour cette topologie.

**Définition 8.50.** Un anneau topologique *adique* est un anneau topologique tel qu'il existe un idéal  $\mathfrak{a} \subset A$  tel que la topologie sur  $A$  coïncide avec la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique. Dans ce cas on appelle  $\mathfrak{a}$  *l'idéal de définition*.

On a les mêmes notions pour les modules.

**Définition 8.51.** Soit  $A$  un anneau topologique. Un  *$A$ -module topologique*  $M$  est un  $A$ -module muni d'une topologie telle que l'addition et la multiplication  $A \times M \rightarrow M$  sont continues, où l'on munit  $A \times M$  de la topologie produit. Si  $\mathfrak{a} \subset A$  est un idéal, alors la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique sur  $M$  est une topologie telle que une base de voisinages de zéro dans  $M$  est donnée par les  $\mathfrak{a}^n M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Une topologie sur  $M$  s'appelle *adique* si

elle coïncide avec une topologie  $\mathfrak{a}$ -adique pour un idéal  $\mathfrak{a} \subset A$ .

**Lemme 8.52.** *Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module et  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal. Considérons les topologies  $\mathfrak{a}$ -adiques sur  $A$  et sur  $M$ . Alors*

- (i)  $A$  est séparé ssi  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$
- (ii)  $M$  est séparé ssi  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$

*Démonstration.* Démontrons (i), (ii) se démontre de la même manière. Soient  $x \neq y \in A$ . Comme  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ , il existe  $n$  tel que  $x - y \notin \mathfrak{a}^n$ , d'où les voisinages cherchés  $x + \mathfrak{a}^n$  et  $y + \mathfrak{a}^n$  de  $x$  et  $y$  respectivement. De la même manière on démontre le sens inverse.  $\square$

Si la valuation sur  $k$  est non-triviale, on fixe pour la suite un élément non nul  $a \in k$ . Sinon posons  $a = 0$ . Considérons la topologie  $(a)$ -adique sur  $k$ . D'après 8.23  $(a) = \{x \in k \mid \|x\| \leq \|a\|\}$ . On déduit de cette description que pour chaque  $b \in k$ , pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $m, l \in \mathbb{N}$ , tels que  $(b)^l \subset (a)^n \subset (b)^m$ . Donc la topologie  $(a)$ -adique sur  $k$  ne dépend pas du choix de  $a \in k$ .

Pour avoir une autre description de  $k\langle\zeta\rangle$  rappelons la notion de complétion d'un module topologique.

**Définition 8.53.** Soit  $A$  un anneau topologique, soit  $M$  un  $A$ -module topologique. La *complétion* de  $M$  est un  $A$ -module topologique  $M^*$ , complet et séparé, muni d'un homomorphisme continu  $\phi : M \rightarrow M^*$  avec la propriété universelle suivante : pour chaque  $A$ -module topologique  $M'$ , complet et séparé, et pour chaque homomorphisme continu d'anneaux topologiques  $f : M \rightarrow M'$  il existe un unique homomorphisme continu  $f^* : M^* \rightarrow M'$  tel que  $f = f^* \circ \phi$ .

Notons que la condition "séparé" assure qu'une limite d'une suite de Cauchy est unique.

Si  $A$  est un anneau  $\mathfrak{a}$ -adique et si  $M$  un  $A$ -module topologique, muni d'une topologie  $\mathfrak{a}$ -adique, alors on a la description explicite suivante de complétion  $\mathfrak{a}$ -adique  $\hat{M}$  :

**Lemme 8.54.**  $\hat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$ . La topologie sur  $\hat{M}$  est la plus fine telle que les projections canoniques  $\pi_n : \hat{M} \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M$  sont continues, où l'on munit  $M/\mathfrak{a}^n M$  de la topologie discrète. Autrement dit, un sous-espace de  $\hat{M}$  est ouvert ssi il est union de certaines fibres de  $\pi_n$  (où l'on varie  $n \in \mathbb{N}$ ). Et donc la base de voisinages de  $0 \in \hat{M}$  est donnée par les idéaux  $\ker \pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* [M] 23.H.3  $\square$

Vu comme  $k$ -module,  $k\langle\zeta\rangle$  possède une topologie  $(a)$ -adique, qui est complète (car  $T_n$  est complet) et séparé (par 8.52). En fait, on peut voir  $k\langle\zeta\rangle$  comme une complétion  $(a)$ -adique d'un anneau de polynômes  $k[\zeta]$  (où l'on voit  $k[\zeta]$  comme  $k$ -module et l'on considère la topologie  $(a)$ -adique sur  $k[\zeta]$ ). En effet, soit  $\phi : k[\zeta] \hookrightarrow k\langle\zeta\rangle$  l'inclusion canonique. Soit  $M'$  un  $k$ -module topologique, complet et séparé. Soit  $f : k[\zeta] \rightarrow M'$  un homomorphisme continu. Soit  $s \in k\langle\zeta\rangle$ . Alors on peut voir  $s$  comme la limite d'une suite de Cauchy  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  avec  $s_n \in k[\zeta]$ . Comme  $f$  est continue,  $f(s_n)$  est une suite de Cauchy dans  $M'$ . Or  $M'$  est complet et séparé, il existe une unique  $f^*(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n)$  et l'on obtient ainsi l'application cherchée  $f^*$ . Donc  $k\langle\zeta\rangle$  est une complétion  $(a)$ -adique de l'anneau  $k[\zeta]$ . Par [M] 23.H.3 on a :

**Lemme 8.55.**  $k\langle\zeta\rangle = \varprojlim k/(a^m)[\zeta]$ .

## 8.5 Anneaux topologiquement de présentation finie sur $k$

Dans la suite on va travailler avec les anneaux de la forme  $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ , où  $\mathfrak{a} \subset k\langle\zeta\rangle$  un idéal. Étudions quelques propriétés d'anneaux de cette forme. Notons d'abord que l'on peut munir  $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$  de la topologie  $(\mathfrak{a})$ -adique.

**Proposition 8.56.** *Soit  $\mathfrak{a} \subset k\langle\zeta\rangle$  un idéal de type fini. Alors  $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$  est complet et séparé pour la topologie  $(\mathfrak{a})$ -adique.*

*Démonstration.* C'est une conséquence de [A] 10.13. Plus précisément, posons  $A \stackrel{\text{def}}{=} k\langle\zeta\rangle$ . Montrons d'abord que si  $M$  est un  $A$ -module de type fini, alors  $M \rightarrow \widehat{M} = \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$  est surjective. Cela découle du fait, que si l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow A^r \rightarrow M \rightarrow 0,$$

alors, par la construction de  $\varprojlim$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & A^r & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{N} & \longrightarrow & A^r & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notons que  $A^r = \widehat{A^r}$  comme  $A$  est complet. La deuxième ligne est exacte, car les applications  $N/\mathfrak{a}^{n+1}N \rightarrow N/\mathfrak{a}^n N$  sont surjectives. D'après [H] 9.1. cela implique que  $\varprojlim$  est exacte.

Donc  $M \rightarrow \widehat{M}$  est surjective.

De plus, si  $M$  est de présentation finie, i.e. si  $N$  est de type fini, il en découle que  $M \rightarrow \widehat{M}$  est injective, car dans ce cas  $N \rightarrow \widehat{N}$  est surjective d'après ce qui précède. Donc si  $M$  est de présentation finie, alors  $M \rightarrow \widehat{M}$  est un isomorphisme. En prenant  $M = k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$ , on obtient le résultat vu que  $\mathfrak{a}$  est de type fini.  $\square$

**Définition 8.57.** Un anneau *topologiquement de présentation finie sur  $k$*  est un anneau de la forme  $k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$  pour un idéal  $\mathfrak{a} \subset k\langle\zeta\rangle$  de type fini.

Pour la brièveté on écrira dans la suite "anneau de présentation finie" pour un anneau "topologiquement de présentation finie".

**Lemme 8.58.** *Soit  $A$  un anneau de présentation finie sur  $k$ . Alors le quotient  $A/kA$  est de type fini sur  $\tilde{k}$ .*

*Démonstration.* Soit  $k\langle\zeta\rangle \twoheadrightarrow A$  un épimorphisme, alors il induit une surjection  $\tilde{k}[\zeta] \twoheadrightarrow A/kA$ . Plus précisément, si  $A = k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$  pour un idéal  $\mathfrak{a} \subset k\langle\zeta\rangle$  de type fini, alors  $A/kA = k\langle\zeta\rangle/(\mathfrak{a} + k\langle\zeta\rangle) \simeq \tilde{k}[\zeta]/\tilde{\mathfrak{a}}$  est de type fini sur  $\tilde{k}$ .  $\square$

## 9 Schémas formels et espaces analytiques associés

### 9.1 Schémas formels, constructions de base

Pour définir les schémas formels comme des espaces annelés, introduisons d'abord le procédé de la localisation complète.

Soit  $A$  un anneau  $\mathfrak{a}$ -adique, complet et séparé. Par 8.54  $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$  et donc le morphisme canonique  $A \rightarrow \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$  est un isomorphisme.

**Définition 9.1.** Soit  $f \in A$ . La *localisation complète* de  $A$  en  $f$  est l'anneau  $A\langle f^{-1} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}]$ .

Notons qu'on a une application canonique  $A \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle$ . De plus, les applications  $A[f^{-1}] \rightarrow A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}]$  donnent une application  $A[f^{-1}] \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle$ , ce qui montre que l'image de  $f$  dans  $A\langle f^{-1} \rangle$  est inversible. Ce morphisme canonique  $A[f^{-1}] \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle$  donne la description suivante :

**Proposition 9.2.** *L'anneau  $A\langle f^{-1} \rangle$  est la complétion de  $A[f^{-1}]$  pour la topologie sur  $A[f^{-1}]$  donnée par l'idéal  $\mathfrak{a}A[f^{-1}]$ . Si  $\mathfrak{a}$  est de type fini, alors la topologie sur  $A\langle f^{-1} \rangle$  coïncide avec la topologie  $\mathfrak{a}A\langle f^{-1} \rangle$ -adique.*

*Démonstration.* Comme  $A[f^{-1}]$  est plat sur  $A$ , alors  $A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \simeq A[f^{-1}]/\mathfrak{a}^n$ . Donc  $A\langle f^{-1} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A[f^{-1}]/\mathfrak{a}^n$  est la complétion  $\mathfrak{a}A[f^{-1}]$ -adique de  $A[f^{-1}]$ . Le fait que la topologie sur  $A\langle f^{-1} \rangle$  coïncide avec la topologie  $\mathfrak{a}A\langle f^{-1} \rangle$ -adique si  $\mathfrak{a}$  est de type fini découle du lemme ci-dessous.  $\square$

**Lemme 9.3.** *Soit  $B$  un anneau  $\mathfrak{b}$ -adique pour certain idéal  $\mathfrak{b} \in B$ . Si  $\mathfrak{b}$  est de type fini, alors  $\mathfrak{b}\hat{B}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{b}$  dans la complétion  $\mathfrak{b}$ -adique  $\hat{B}$  de  $B$ . Donc  $\hat{B}$  est un anneau adique avec l'idéal de définition  $\mathfrak{b}\hat{B}$ .*

*Démonstration.* Par 8.54 la base de voisinages de  $0 \in \hat{B}$  est donnée par  $\ker \pi_n$ , où  $\pi_n : \hat{B} \rightarrow B/\mathfrak{b}^n$ .

Montrons que  $\ker \pi_n$  est la clôture de  $\mathfrak{b}^n$  in  $\hat{B}$ . En effet,  $\mathfrak{b}^n$  est dense dans  $\ker \pi_n$  : pour chaque  $f \in \ker \pi_n$  et pour chaque  $m \in \mathbb{N}$  il existe  $f_m \in \mathfrak{b}^n$  (par exemple, un représentant de  $\pi_{n+m}(f) \in B/\mathfrak{b}^{n+m}$ ) tel que  $f - f_m \in \ker \pi_{n+m}$ . Comme  $\ker \pi_n$  est fermé dans  $\hat{B}$  par la définition de la topologie sur  $\hat{B}$ , c'est une clôture de  $\mathfrak{b}^n$  dans  $\hat{B}$ .

Soit  $\mathfrak{b} = (b_1, \dots, b_r)$ . Notons que  $\mathfrak{b}$  est dense dans  $\mathfrak{b}\hat{B}$ , car  $\mathfrak{b}\hat{B} \subset \ker \pi_1$  et  $\mathfrak{b}$  est dense dans  $\ker \pi_1$ . Donc il suffit de démontrer que chaque élément de l'adhérence de  $\mathfrak{b}$  appartient à  $\mathfrak{b}\hat{B}$ . Soit alors  $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$  avec  $f_i \in \mathfrak{b}^i$ . On écrit pour chaque  $i$ ,  $f_i = \sum_{j=1}^r f_{ij}b_j$

avec  $f_{ij} \in \mathfrak{b}^{i-1}$ , d'où  $f = \sum_{j=1}^r (\sum_{i=1}^{\infty} f_{ij})b_j$ , d'où  $f \in \mathfrak{b}\hat{B}$ . Donc  $\mathfrak{b}\hat{B}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{b}$

dans  $\hat{B}$ . Comme  $\ker \pi_n$  sont les clôtures de  $\mathfrak{b}^n$  in  $\hat{B}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et la base de voisinages de  $0 \in \hat{B}$  est donnée par  $\ker \pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , donc la topologie sur  $\hat{B}$  coïncide avec la topologie  $\mathfrak{b}\hat{B}$ -adique.  $\square$

Pour avoir une autre description de  $A\langle f^{-1} \rangle$  considérons l'anneau  $A\langle t \rangle = \{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \mid \lim c_i = 0 \}$  où  $t$  est une variable. De même que dans 8.30 et 8.4, on peut démontrer que  $A\langle t \rangle$  est complet et séparé pour la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique et que  $A\langle t \rangle = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[t]$ . Il existe donc un homomorphisme canonique  $A\langle t \rangle \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle$  qui envoie  $t$  en  $f^{-1}$ .

**Lemme 9.4.** *L'homomorphisme  $A\langle t \rangle \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle$  induit l'isomorphisme  $A\langle t \rangle / (1 - ft) \simeq A\langle f^{-1} \rangle$ .*

*Démonstration.* Considérons les suites exactes suivantes :

$$0 \rightarrow (1 - ft)A/\mathfrak{a}^n[t] \rightarrow A/\mathfrak{a}^n[t] \rightarrow A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \rightarrow 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $\varprojlim$  est exacte à gauche, cela donne une suite exacte à gauche :

$$0 \rightarrow \varprojlim (1 - ft)A/\mathfrak{a}^n[t] \rightarrow \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[t] \rightarrow \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \rightarrow 0,$$

qui est en fait exacte comme les applications

$(1 - ft)A/\mathfrak{a}^{n+1}[t] \rightarrow (1 - ft)A/\mathfrak{a}^n[t]$  sont surjectives ([H] 9.1). Comme  $(1 - ft)$  n'est pas un diviseur de zéro dans  $A/\mathfrak{a}^n[t]$ , cela donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow (1 - ft)A\langle t \rangle \rightarrow A\langle t \rangle \rightarrow A\langle f^{-1} \rangle \rightarrow 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Maintenant nous sommes prêts pour définir les schémas formels affines. Ce sont certains espaces annelés où tous les anneaux que l'on considère sont des anneaux topologiques. Soit  $A$  un tel anneau, complet et séparé, avec  $\mathfrak{a}$  l'idéal de définition. On suppose ici que  $\mathfrak{a}$  est de type fini. Notons

$$\mathrm{Spf}A = \{\text{idéaux premiers ouverts de } A.\}$$

Soit  $\mathfrak{p} \in A$  un idéal premier. Comme  $\mathfrak{p}$  est ouvert ssi il existe  $n$  tel que  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}^n \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ , alors  $\mathrm{Spf}A$  coïncide ensemblistement avec  $\mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}$ . La topologie de Zariski sur  $\mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}$  induit donc la topologie sur  $\mathrm{Spf}A$ . Comme d'habitude, on note  $D(f)$  le sous-ensemble de  $\mathrm{Spf}A$  où  $f$  ne s'annule pas. Introduisons le faisceau structurel  $\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}$  sur  $\mathrm{Spf}A$ . Comme les espaces  $D(f)$  forment une base d'ouverts sur  $\mathrm{Spf}A$ , il suffit de définir  $\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}(D(f))$  pour tout  $f \in A$ . Posons

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}A}(D(f)) \stackrel{\text{def}}{=} A\langle f^{-1} \rangle = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}].$$

Cela définit un préfaisceau sur la catégorie des ensembles de la forme  $D(f) \subset \mathrm{Spf}A$ , qui est en fait un faisceau car pour tout recouvrement  $(D(f_i))_i$  de  $D(f)$  la suite

$$A\langle f^{-1} \rangle \rightarrow \prod_i A\langle f_i^{-1} \rangle \rightrightarrows \prod_{i,j} A\langle (f_i f_j)^{-1} \rangle$$

est exacte comme la limite projective des suites exactes

$$A/\mathfrak{a}^n[f^{-1}] \rightarrow \prod_i A/\mathfrak{a}^n[f_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{i,j} A/\mathfrak{a}^n[(f_i f_j)^{-1}]$$

(vu que limite projective est exacte à gauche).

Pour  $x \in \mathrm{Spf}A$  on a :  $\mathcal{O}_x = \varprojlim_{x \in D(f)} A\langle f^{-1} \rangle$  est la fibre en point  $x$ . Comme dans le cas classique, on voit que c'est un anneau local ([EGAII] 1.10.1.6).

**Définition 9.5.** Soit  $A$  un anneau adique d'idéal de définition  $\mathfrak{a}$ . Posons  $X = \mathrm{Spf}A$  et  $\mathcal{O}_X$  le faisceau d'anneaux topologiques construit ci-dessus. L'espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  s'appelle un *schéma formel affine*. On le note par  $\mathrm{Spf}A$  aussi.

Notons que comme on a supposé que  $\mathfrak{a}$  est de type fini, alors par 9.2 on a que  $A\langle f^{-1} \rangle$ ,  $f \in A$  est encore un anneau  $\mathfrak{a}$ -adique. On voit aussi que l'on peut voir  $\mathrm{Spf}A\langle f^{-1} \rangle$  comme l'ensemble des idéaux premiers ouverts de  $A$  ne contenant pas  $f$ . On peut dire donc que pour un schéma formel affine  $X = \mathrm{Spf}A$  et  $U = D(f) \subset \mathrm{Spf}A$  un ouvert, l'espace annelé  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  est isomorphe au schéma formel affine  $\mathrm{Spf}A\langle f^{-1} \rangle$ .

Les morphismes des schémas formels affines  $\mathrm{Spf}A \rightarrow \mathrm{Spf}B$  sont les morphismes d'espaces localement topologiquement annelés. Comme dans le cas de schémas, ils correspondent bijectivement aux morphismes continus d'anneaux  $B \rightarrow A$ .



**Définition 9.6.** Un *schéma formel* est un espace localement topologiquement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  tel que chaque point  $x \in X$  admet un voisinage ouvert  $U$  tel que  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  est isomorphe à un schéma formel affine.

**Remarque 9.7.** Comme dans le cas des schémas on a les notions d’immersions fermées et de schémas séparés pour les schémas formels. Comme dans le cas classique tout sous-schéma fermé d’un schéma formel affine  $X = \mathrm{Spf}A$  est donné par  $\mathrm{Spf}A/I \rightarrow \mathrm{Spf}A$ . De même, cela donne que si  $X$  est séparé, alors l’intersection de deux ouverts affines de  $X$  est affine. ([EGAI] 1.10.14)

Dans la suite on travaillera avec des schémas formels de la forme suivante :

**Définition 9.8.** Un schéma formel  $(X, \mathcal{O}_X)$  est dit *localement de présentation finie* sur  $k$  si

- (i)  $X$  est localement isomorphe à  $\mathrm{Spf}A$  où  $A$  est un anneau de présentation finie sur  $k$  ;
- (ii) les familles des composantes irréductibles de schémas  $\mathrm{Spf}A$  de (i) forment un recouvrement localement fini.

On note  $k\text{-Fsch}$  la catégorie des schémas formels localement de présentation finie sur  $k$ .

Cette définition est correcte par 8.56 (on a le droit de considérer un schéma formel  $\mathrm{Spf}A$  où  $A$  est un anneau de présentation finie sur  $k$ ) et par 9.4 (si  $A$  est un anneau de présentation finie sur  $k$ , alors sa localisation complète en un élément  $f \in A$  l’est aussi).

**Définition 9.9.** Un schéma formel localement de présentation finie sur  $k$  est dit *de présentation finie* s’il peut s’écrire comme l’union finie de sous-schémas formels ouverts affines de forme  $\mathrm{Spf}A$  où  $A$  est un anneau de présentation finie sur  $k$ .

Notons que si la valuation sur  $k$  est triviale, alors  $k\text{-Fsch}$  coïncide avec la catégorie des schémas localement de type fini sur  $k$ .

Dans la suite on va utiliser les lettres  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  etc. pour des schéma formels de  $k\text{-Fsch}$ .

**Proposition 9.10.** Soit  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \in k\text{-Fsch}$ . Alors l’espace annelé  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  est un schéma localement de type fini sur  $\tilde{k}$ . On le note  $\mathfrak{X}_s$  et on l’appelle la fibre spéciale de  $\mathfrak{X}$ .

*Démonstration.* Si  $U = \mathrm{Spf}A$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)/k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) = A/kA$  est de type fini sur  $\tilde{k}$  par 8.58. Plus précisément, si  $A = k\langle \zeta \rangle / \mathfrak{a}$ , alors  $A/kA = \tilde{k}[\zeta] / \tilde{\mathfrak{a}}$ , où  $\tilde{\mathfrak{a}}$  est l’image de  $\mathfrak{a}$  dans  $\tilde{k}[\zeta]$ .

Pour conclure il faut démontrer que  $(U, (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})|_U)$  est isomorphe au schéma de type fini sur  $\tilde{k}$   $\mathrm{Spec}A/kA$ . Pour faire cela il suffit de montrer que pour chaque ouvert  $D(f) \subset U$  on a  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f))/k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f)) \simeq A/kA[f^{-1}]$ .

Par 9.4  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f)) \simeq A\langle t \rangle / (1-ft) \simeq k\langle \zeta, t \rangle / (\mathfrak{a}, 1-ft)$ , où l’on écrit encore  $f$  pour une préimage de  $f$  dans  $k\langle \zeta \rangle$ . Donc  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f))/k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f)) \simeq$  [par 8.58]  $\simeq \tilde{k}[\zeta, t] / (\tilde{\mathfrak{a}}, 1-\tilde{f}\tilde{t}) \simeq A/kA[f^{-1}]$ . Ce qu’il a fallait démontrer.  $\square$

**Remarque 9.11.** Tout ouvert d’un schéma formel  $\mathrm{Spf}A$  est l’union finie de schémas formels affines de la forme  $\mathrm{Spf}A\langle f^{-1} \rangle$ ,  $f \in A$  (cela découle du fait que  $\mathrm{Spf}A$  est un espace topologique noethérien, ce qui se démontre de la même manière comme pour les schémas).

**Proposition 9.12.**  $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$  définit un foncteur.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier qu’un morphisme  $\phi: \mathrm{Spf}B \rightarrow \mathrm{Spf}A$  induit un morphisme  $\mathrm{Spec}B/kB \rightarrow \mathrm{Spec}A/kA$ . Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme continue d’anneaux

correspondant. Soit  $x \in kA$ , alors  $\|x\| < 1$  (par 8.36 par exemple), et donc  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ , donc  $\varphi(x) \in kB$  (sinon  $\|\varphi(x)\| = 1$  par 8.36 et  $(\varphi(x^n))_{n \in \mathbb{N}} \not\rightarrow 0$ ). Donc  $\varphi(kA) \subset kB$ . Donc le morphisme  $\varphi: A \rightarrow B$  induit le morphisme  $A/kA \rightarrow B/kB$ , donc il induit le morphisme  $\text{Spec}B/kB \rightarrow \text{Spec}A/kA$ . Donc  $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$  est un foncteur.  $\square$

## 9.2 Sites

**Définition 9.13.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une *topologie de Grothendieck* sur  $\mathcal{C}$  est la donnée pour chaque objet  $U \in \text{Ob}\mathcal{C}$  d'un ensemble de familles de morphismes  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  qu'on appelle les *recouvrements* de  $U$  tels que

- (i) pour tout recouvrement  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  et tout morphisme  $V \rightarrow U$  les produits fibrés  $U_i \times_U V$  existent et  $(U_i \times_U V \rightarrow V)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $V$ ;
- (ii) si  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $U$  et si pour tout  $i$  on se donne un recouvrement de  $U_i$ :  $(V_{ij} \rightarrow U_i)_{j \in J_i}$ , alors la famille  $(V_{ij} \rightarrow U)_{i,j}$  est un recouvrement de  $U$  (où le morphisme  $V_{ij} \rightarrow U$  est défini par la composition);
- (iii) pour tout  $U \in \mathcal{C}$  la famille  $(U \xrightarrow{id} U)$  est un recouvrement de  $U$ .

La catégorie  $\mathcal{C}$  avec la topologie de Grothendieck s'appelle un *site*. Si  $T$  est un site, on note  $\text{Cat}T$  la catégorie correspondante.

**Exemple 9.14.** Soit  $X$  un schéma. Considérons la catégorie  $\acute{E}t(X)$  des morphismes étales  $U \rightarrow X$ . Le recouvrement d'un tel morphisme est une famille  $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i \in I}$  telle que  $U = \bigcup_i f_i(U_i)$ . On note le site ainsi obtenu  $X_{\acute{e}t}$  et l'appelle le *site étale* de  $X$ .

**Définition 9.15.** Soient  $T_1, T_2$  deux sites. Une *application continue* (un morphisme de sites)  $T_1 \rightarrow T_2$  est un foncteur  $\text{Cat}T_2 \rightarrow \text{Cat}T_1$  qui envoie les recouvrements sur des recouvrements.

**Définition 9.16.** Un *préfaisceau* d'ensembles (de groupes abéliens etc.) sur le site  $T$  est un foncteur contravariant  $\mathcal{F}: \text{Cat}T \rightarrow \text{Sets}$  (un foncteur  $\text{Cat}T \rightarrow \text{Ab}$  etc.). On dit que  $\mathcal{F}$  est un *faisceau* si la suite

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

est exacte pour tout recouvrement  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ .

Un morphisme de préfaisceaux est un morphisme de foncteurs. Un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux.

Si  $T$  est un site, on note  $T^\sim$  la catégorie des faisceaux d'ensembles sur  $T$  et  $S(T)$  la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur  $T$ .

Dans la suite on va souvent considérer les faisceaux de la forme suivante.

**Définition 9.17.** Soit  $T$  est un site. Soit  $F \in S(T)$ . On dit que  $F$  est un faisceau *torsion* si pour chaque  $U \in \text{Cat}T$  le groupe  $F(U)$  est un groupe de torsion, i.e. chaque élément de  $F(U)$  est d'ordre fini.

Soient  $T_1, T_2$  deux sites. Soit  $\phi: T_1 \rightarrow T_2$  un morphisme de sites, soit  $\phi^t: \text{Cat}T_2 \rightarrow \text{Cat}T_1$  le foncteur correspondant. Sous certaines bonnes hypothèses (comme l'existence des limites inductives et projectives etc., [Ka]), pour un tel morphisme  $\phi$  on peut définir le foncteur *d'image directe*  $\phi_*: T_1^\sim \rightarrow T_2^\sim, F \mapsto \phi_*F$ , en posant  $\phi_*F(U) = F(\phi^t(U))$ .

On définit aussi le foncteur *d'image inverse*  $\phi^*: T_2^\sim \rightarrow T_1^\sim, F \mapsto \phi^*F$ , en posant  $\phi^*F$  un faisceau associé au préfaisceau  $V \mapsto \phi^p(V) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim(F(U))$  où l'on prend la limite

sur tous  $V \rightarrow \phi^t(U)$ . Cette définition est correcte et  $\phi^*$  est l'adjoint à gauche de  $\phi_*$  ([Ka]).

**Remarque 9.18.** (i) Dans la suite on considèrera les cohomologies des faisceaux sur  $T$ . On considèrera les sites  $T$  tels que la catégorie  $T^\sim$  admet assez d'injectives (cf. [Mi] III.1.1).

(ii) On dira qu'un faisceau  $F$  sur un site  $T$  est *flasque* si  $H^q(U, F) = 0$  pour tout  $U \in \text{Ob}(\text{Cat } T)$  et tout  $q \geq 1$ .

(iii) Il en découle de [SGA4] V.4.1 qu'un faisceau  $F$  sur un site  $T$  est flasque ssi les cohomologies de Čech  $\check{H}^q(\mathcal{U}, F)$  s'annulent pour tout recouvrement  $\mathcal{U}$  de tout objet  $U$  de  $\text{Cat } T$  et pour tout  $q \geq 1$ .

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant :

**Théorème 9.19.** *Soit  $X = \text{Spec } K$  où  $K$  est un corps. Soit  $K^s$  la clôture séparable de  $K$  (i.e. la plus grande extension séparable de  $K$  contenue dans une clôture algébrique de  $K$ ). Alors la catégorie  $X_{\text{ét}}^\sim$  est équivalente à la catégorie des  $G_K$ -modules discrets, où  $G_K = \text{Gal}(K^s/K)$ . (si un groupe  $G$  agit sur l'ensemble  $A$  on dit que  $A$  est  $G$ -dcret si l'application  $G \times A \rightarrow A$  est continu où l'on muni  $A$  de la topologie discrète.)*

*Démonstration.* [Mi] II.1.9 □

### 9.3 Espaces analytiques

Dans cette section on va introduire quelques constructions de [Ber2]. On suppose que tous les espaces topologiques compacts, localement compacts et paracompacts sont séparés (un espace topologique séparé est dit paracompact si tout recouvrement ouvert de cet espace admet un sous-recouvrement localement fini).

**Définition 9.20.** Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $\tau$  une classe de sous-ensembles de  $X$  (on les munit de la topologie induite de celle de  $X$ ). On dit que  $\tau$  est un *quasi-réseau* si pour tout  $x \in X$  il existe  $V_1, \dots, V_n \in \tau$  tels que  $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$  et  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  est un voisinage de  $x$ . On dit qu'un quasi-réseau  $\tau$  est un *réseau* sur  $X$  si pour tous  $U, V \in \tau$  la restriction  $\tau|_{U \cap V}$  est un quasi-réseau sur  $U \cap V$ .

**Remarque 9.21.** Par le voisinage d'un point  $x \in X$  on entend une partie de l'espace topologique, contenant une boule ouverte de centre  $x$ . Si  $Y \subset X$  une partie de  $X$  on note  $\tau|_Y = \{V \in \tau \mid V \subset Y\}$ .

**Définition 9.22.** Soit  $X$  un espace topologique localement séparé, soit  $\tau$  un réseau de sous-ensembles compacts sur  $X$ . Un *atlas  $k$ -affinoïde*  $\mathcal{A}$  sur  $X$  est une application qui associe à tout  $V \in \tau$  une algèbre  $k$ -affinoïde  $A_V$  et un homeomorphisme  $V \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_V)$ , et pour tous  $U, V \in \tau$  tels que  $U \subset V$  un homomorphisme borné d'algèbres  $k$ -affinoïdes  $\alpha_{V/U} : A_V \rightarrow A_U$  qui identifie  $(U, A_U)$  avec un domaine affinoïde dans  $V$ . Un triplet  $(X, \mathcal{A}, \tau)$  ainsi défini est dit un *espace  $k$ -analytique*.

Par exemple, le triplet  $(X, \mathcal{A}, \{X\})$ , où  $X = \mathcal{M}(A)$ ,  $A$  est une algèbre affinoïde, est un espace analytique. Dans la suite on va le noter  $\mathcal{M}(A)$  simplement.

**Remarque 9.23.** D'après [Ber2] 1.2.4(iii) une base de la topologie d'un espace analytique est formée par des ouverts localement compacts et paracompacts.

Pour définir les morphismes entre les espaces  $k$ -analytiques nous avons besoin de quelques constructions supplémentaires.

**Définition 9.24.** Un morphisme fort entre les espaces  $k$ -analytiques

$\phi: (X, \mathcal{A}, \tau) \rightarrow (X', \mathcal{A}', \tau')$  est la donnée :

- (i) d'un morphisme continue  $\varphi: X \rightarrow X'$  tel que pour tout  $V \in \tau$  il existe  $V' \in \tau'$  tel que  $\varphi(V) \subset V'$
- (ii) d'un système de morphismes compatibles d'espaces affinoïdes  $\varphi_{V/V'}: (V, A_V) \rightarrow (V', A_{V'})$  pour toute paire  $V \in \tau$  et  $V' \in \tau'$  telle que  $\varphi(V) \subset V'$ .

On dit qu'un tel morphisme est un *quasi-isomorphisme* si  $\varphi$  induit un homeomorphisme entre  $X$  et  $X'$  et pour toute paire  $V \in \tau$  et  $V' \in \tau'$ ,  $\varphi(V) \subset V'$ ,  $\varphi_{V/V'}$  identifie  $V$  avec un domaine affinoïde dans  $V'$ .

On définit la catégorie  $k\text{-}\widetilde{An}$ , où les morphismes sont les morphismes forts (la composition est bien définie par [Ber2] 1.2). La catégorie  $k\text{-}An$  d'espaces  $k$ -analytiques est définie comme la localisation de  $k\text{-}\widetilde{An}$  par les quasi-isomorphismes (le système de quasi-isomorphismes dans  $k\text{-}\widetilde{An}$  admet un calcul de fractions par [Ber2] 1.2.10).

**Proposition 9.25.** *La catégorie  $k\text{-}An$  admet des produits fibrés.*

*Démonstration.* [Ber2] 1.4.1 □

On définit les domaines affinoïdes d'un espace analytique comme suit. Soit  $(X, \mathcal{A}, \tau)$  un espace analytique. On dit qu'un sous-ensemble  $W \subset X$  est  $\tau$ -*spécial* s'il est compact et il existe un recouvrement  $W = \bigcup_{i=1}^n W_i$  tel que  $W_i, W_i \cap W_j \in \tau$  et  $A_{W_i} \hat{\otimes} A_{W_j} \rightarrow A_{W_i \cap W_j}$  est un épimorphisme admissible. On appelle un tel recouvrement de  $W$  un recouvrement  $\tau$ -*spécial*. Par le théorème de Tate 8.44 l'algèbre de Banach  $A_W \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\prod_i A_{W_i} \rightarrow \prod_{i,j} A_{W_i \cap W_j})$  ne dépend pas du recouvrement et l'application  $W \rightarrow \mathcal{M}(A_W)$  est bien définie.

Posons  $\bar{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \{W \mid W \text{ est un domaine } k\text{-affinoïde dans un } V \in \tau\}$ . On peut montrer que l'on peut étendre  $\mathcal{A}$  en un atlas  $\bar{\mathcal{A}}$  pour obtenir un espace analytique  $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\tau})$ . Soit  $\hat{\tau}$  une collection d'espaces  $\bar{\tau}$ -spéciaux tels que l'algèbre correspondante  $A_W$  est  $k$ -affinoïde,  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_W)$  et pour certain recouvrement  $\bar{\tau}$ -spécial,  $(W_i, A_{W_i})$  sont des domaines affinoïdes dans  $W$ .

**Définition 9.26.** Les sous-espaces de  $\hat{\tau}$  s'appellent les domaines  *$k$ -affinoïdes* de  $X$ . C'est-à-dire,  $W \subset X$  est un domaine affinoïde de  $X$ , s'il existe un recouvrement  $W = \cup_i W_i$  tel que  $W_i, W_i \cap W_j$  sont des domaines affinoïdes dans certaines  $V_i, U_{ij} \in \tau$ ,  $A_{W_i} \hat{\otimes} A_{W_j} \rightarrow A_{W_i \cap W_j}$  est un épimorphisme admissible,  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(A_W)$  et  $(W_i, A_{W_i})$  sont des domaines affinoïdes dans  $W$ . Les sous-espaces  $\hat{\tau}$ -spéciaux s'appellent les *domaines spéciaux* de  $X$ .

**Remarque 9.27.** D'après [Ber2] 1.1.1(i) les domaines affinoïdes sont fermés dans  $X$ .

**Lemme 9.28.** *Soit  $\phi: (X, \mathcal{A}, \tau) \rightarrow (X', \mathcal{A}', \tau')$  un morphisme d'espaces analytiques, soient  $V \subset X$  et  $V' \subset X'$  des domaines affinoïdes. Alors l'intersection  $V \cap \phi^{-1}(V')$  est un domaine spécial de  $X$ .*

*Démonstration.* [Ber2] 1.2.14 □

**Proposition 9.29.** Soient  $(X, A, \tau)$  et  $(X', A', \tau')$  des espaces analytiques. Alors il existe une bijection entre l'ensemble  $\text{Hom}((X, A, \tau), (X', A', \tau'))$  et l'ensemble des paires  $(\phi, S)$  où

- $\phi : X \rightarrow X'$  est une application continue telle que pour tout  $x \in X$  il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset X$  et  $V'_1, \dots, V'_n \subset X'$  tels que  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  et  $V'_1 \cup \dots \cup V'_n$  sont des voisinages de  $x$  et  $\phi(x)$  respectivement,  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$  et  $\phi(V_i) \subset V'_i$  ;
- $S$  est un système des morphismes compatibles  $\phi_{V/V'}$  d'espaces affinoïdes pour tous domaines affinoïdes  $V \subset X$  et  $V' \subset X'$  tels que  $\phi(V) \subset V'$ .

*Démonstration.* [Ber2] 1.2.15 □

**Définition 9.30.** Un sous-espace  $Y$  de l'espace analytique  $X$  s'appelle un *domaine  $k$ -analytique* si pour tout  $y \in Y$  il existe des domaines  $k$ -affinoïdes  $V_1, \dots, V_n$  contenus dans  $Y$  tels que  $y \in \bigcap_{i=1}^n V_i$  et  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  est un voisinage de  $y$  dans  $Y$ .

Notons que d'après cette définition et 9.28 on a ([Ber2] 1.3) :

1. l'intersection de deux domaines analytiques est un domaine analytique ;
2. une préimage d'un domaine analytique par un morphisme d'espaces analytiques est un domaine analytique ;
3. si  $Y \subset X$  est un domaine analytique, alors la famille des domaines affinoïdes de  $X$  qui sont contenus dans  $Y$  définit un atlas sur  $Y$  et on obtient ainsi un morphisme d'espaces analytiques  $\nu : Y \rightarrow X$  avec la propriété universelle suivante : si  $\varphi : Z \rightarrow X$  est un morphisme d'espaces analytiques tel que  $\varphi(Z) \subset Y$  il existe un unique morphisme  $\psi : Z \rightarrow Y$  tel que  $\varphi = \nu \circ \psi$  ;
4. un domaine analytique qui est isomorphe à un espace  $k$ -affinoïde est un domaine affinoïde ;
5. tout ouvert de l'espace analytique est un domaine analytique. (C'est le cas pour un espace affinoïde par définition de la topologie sur le spectre d'anneau de Banach. Dans le cas général soit  $(X, \mathcal{A}, \tau)$  un espace analytique,  $U \subset X$  est un ouvert. Par définition des espaces analytiques, pour chaque  $x \in U$  il existe  $V_1, \dots, V_n \in \tau$  tels que  $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$  et  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  est un voisinage de  $x$ . Comme l'assertion est vraie pour chaque  $V_i$  le résultat en découle.)

Considérons maintenant le procédé de recollement d'espaces  $k$ -analytiques. Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces  $k$ -analytiques. Supposons que pour tous  $i, j \in I$  on a un domaine  $k$ -analytique  $X_{ij} \subset X_i$  et un isomorphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $\nu_{ij} : X_{ij} \xrightarrow{\sim} X_{ji}$  tels que

- (i)  $X_{ii} = X_i$
- (ii)  $\nu_{ij}(X_{ij} \cap X_{il}) = X_{ji} \cap X_{jl}$
- (iii)  $\nu_{il} = \nu_{jl} \circ \nu_{ij}$  sur  $X_{ij} \cap X_{il}$ .

On cherche un espace  $k$ -analytique  $X$  muni d'une famille de morphismes  $\mu_i : X_i \rightarrow X$  tels que

- (1)  $\mu_i$  est un isomorphisme de  $X_i$  sur un domaine  $k$ -analytique de  $X$
- (2)  $X = \bigcup \mu_i(X_i)$
- (3)  $\mu_i(X_{ij}) = \mu_i(X_i) \cap \mu_j(X_j)$
- (4)  $\mu_i = \mu_j \circ \nu_{ij}$  sur  $X_{ij}$ .

Si un tel  $X$  existe, on dit qu'il est obtenu par recollement de  $X_i$  selon les  $X_{ij}$ .

**Proposition 9.31.** Le recollement existe et il est unique à un isomorphisme près dans les situations suivantes :

- (i) les  $X_{ij}$  sont ouverts dans les  $X_i$  ;

(ii) pour chaque  $i \in I$  tous les  $X_{ij}$  sont fermés dans les  $X_i$  et  $X_{ij} = \emptyset$  sauf un nombre fini d'indices  $j$ .

Dans le cas (i) tous les  $\mu_i(X_i)$  sont ouverts dans  $X$ . Dans le cas (ii) tous les  $\mu_i(X_i)$  sont fermés dans  $X$  et si les  $X_i$  sont séparés (paracompacts) alors  $X$  est séparé (paracompact).

*Démonstration.* [Ber2] 1.3.3 □

**Remarque 9.32.** Rappelons qu'un espace topologique  $X$  est dit séparé (ou de Hausdorff) si l'image de  $X$  dans  $X \times X$  est fermée.

Naturellement, on peut recoller les morphismes aussi :

**Proposition 9.33.** Soit  $X$  un espace analytique, soit  $(Y_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des domaines analytiques tel que tout point  $x \in X$  a un voisinage de la forme  $Y_{i_1} \cup \dots \cup Y_{i_n}$  et  $x \in Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_n}$  (i.e.  $(Y_i)$  est un quasi-réseau sur  $X$ ). Alors pour tout espace analytique  $X'$  la suite

$$\mathrm{Hom}(X, X') \rightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(Y_i, X') \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(Y_i \cap Y_j, X')$$

est exacte.

*Démonstration.* [Ber2] 1.3.2 □

Certains espaces analytiques possèdent la propriété supplémentaire suivante (en particulier, les espaces analytiques au sens de [Ber1]).

**Définition 9.34.** On dit qu'un espace analytique  $X$  est *bon* si tout point de  $X$  a un voisinage affinoïde.

**Exemple 9.35.** (i) Un espace analytique  $\mathcal{M}(A)$  est bon ( $A$  est une algèbre affinoïde).

(ii) Par contre le lieu de validité sur le polydisque unité de dimension 2 de la condition " $\|T\| = 1$  où  $\|S\| = 1$ " est un espace analytique qui n'est pas bon : le point  $\sum a_{i,j} T^i S^j \mapsto \max |a_{i,j}|$  n'as pas de voisinage affinoïde.

Si  $X$  est un bon espace analytique, on peut le munir d'un faisceau structurel  $\mathcal{O}_X$ . Si  $X = \mathcal{M}(A)$  c'est le faisceau déjà construit. Par 9.33 cela donne un faisceau  $\mathcal{O}_X$  pour un bon espace analytique  $X$ .

Dans le cas général définissons une topologie de Grothendieck sur un espace analytique  $X$ . Comme catégorie on prend la catégorie de tous les domaines analytiques de  $X$ . Les recouvrements d'un domaine analytique  $Y$  sont donnés par les familles  $(Y_i)_{i \in I}$  de domaines analytiques de  $Y$  qui sont des quasi-réseaux sur  $Y$ .

**Définition 9.36.** La topologie ainsi obtenue s'appelle la  $G$ -topologie sur  $X$ . On note par  $X_G$  le site correspondant.

D'après 9.33 on obtient un faisceau structurel  $\mathcal{O}_{X_G}$  sur  $X_G$  et on a ainsi une notion de  $\mathcal{O}_{X_G}$ -module. On dit qu'un  $\mathcal{O}_{X_G}$ -module  $M$  est cohérent s'il existe un quasi-réseau  $\tau$  de domaines affinoïdes sur  $X$  tel que pour tout  $V \in \tau$   $M|_{V_G}$  est isomorphe au conoyau d'un morphisme de  $\mathcal{O}_{V_G}$ -modules libres de type fini. Un morphisme d'espaces analytiques induit un morphisme d'espaces  $G$ -annelés  $\phi_G: Y_G \rightarrow X_G$ .

**Remarque 9.37.** (i) Si  $x$  est un point de  $X$  et  $V$  un domaine affinoïde de  $X$  contenant  $x$ , alors on peut définir le corps résiduel  $k(x)$  et le corps résiduel complété  $\mathcal{H}(x)$  de  $x$  dans  $V$  comme dans 8.19. Il ne dépend pas du choix de domaine  $V$  par 9.28. On obtient ainsi une application  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$  qui vient du caractère  $\chi_x$  correspondant (8.19). De 8.19 on déduit que donner un point  $x$  de l'espace analytique  $X$  est équivalent à donner un morphisme  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$  (ou un morphisme  $\mathcal{M}(k(x)) \rightarrow X$ ).

(ii) Si  $\phi : Y \rightarrow X$  est un morphisme d'espaces analytiques et  $x \in X$ , alors l'espace analytique  $Y \times_X \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  s'identifie à la fibre  $Y_x$  de  $\phi$  en point  $x$  ([Ber2] 1.4).

Étudions le lien entre les espaces  $k$ -analytiques et les schémas localement de type fini sur  $k$ . Soit  $X$  un tel schéma. Soit  $\Phi$  un foncteur de la catégorie de bons espaces analytiques sur  $k$  vers la catégorie des ensembles qui associe à un espace analytique  $\mathcal{X}$  l'ensemble des morphismes d'espaces annelés  $\text{Hom}_k(\mathcal{X}, X)$ .

**Théorème 9.38.** *Le foncteur  $\Phi$  est représentable par un espace analytique  $X^{\text{an}}$  et le morphisme  $\pi : X^{\text{an}} \rightarrow X$ . Si  $X = \text{Spec } A$  où  $A$  est de type fini sur  $k$ , alors  $X^{\text{an}}$  coïncide avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur  $A$  prolongeant la norme de  $k$ .*

*Démonstration.* [Ber2] 2.6.1 □

## 9.4 Application de réduction

Considérons d'abord le cas affine. Soit  $\mathfrak{X} = \text{Spf } A$  un schéma formel tel que  $A$  est un anneau de présentation finie sur  $k$ , i.e.  $A = k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}$  pour un idéal  $\mathfrak{a} \subset k\langle\zeta\rangle$  de type fini. Posons  $\mathcal{A} = A \otimes_k k$ .

**Lemme 9.39.**  *$\mathcal{A}$  est une algèbre  $k$ -affinoïde et l'image de  $A$  dans  $\mathcal{A}$  est contenue dans*

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A} \mid \|f(x)\| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

*De plus, si  $f \in A$ , alors  $A\langle f^{-1}\rangle \otimes_k k \xrightarrow{\sim} (A \otimes_k k)\langle f^{-1}\rangle$ .*

*Démonstration.* On a :  $\mathcal{A} = (k\langle\zeta\rangle/\mathfrak{a}) \otimes_k k = (k\langle\zeta\rangle \otimes_k k)/(\mathfrak{a} \otimes_k k) = k\langle\zeta\rangle/(\mathfrak{a} \otimes_k k)$ . (Plus précisément, si  $\mathfrak{a}$  est engendré par  $f_1, \dots, f_n$ , alors  $\mathfrak{a} \otimes_k k$  est engendré sur  $k\langle\zeta\rangle$  par  $f_1, \dots, f_n$ . En effet, notons  $\mathfrak{b}$  l'idéal de  $k\langle\zeta\rangle$  engendré par  $f_1, \dots, f_n$ . L'application  $\mathfrak{a} \otimes_k k \rightarrow \mathfrak{b}$ ,  $\sum p_i f_i \otimes c_i \mapsto \sum c_i p_i f_i$ ,  $c_i \in k$ ,  $p_i \in k\langle\zeta\rangle$  est surjective. Elle est aussi injective : si  $\sum c_i p_i f_i = 0$ , alors  $\sum \frac{c_i}{c} p_i f_i = 0$  où  $c = \max \|c_i\|$ , d'où  $\sum p_i f_i \otimes c_i = (\sum \frac{c_i}{c} p_i f_i) \otimes c = 0$ , donc  $\mathfrak{a} \otimes_k k = \mathfrak{b}$ .) L'algèbre  $\mathcal{A}$  est donc une algèbre  $k$ -affinoïde.

Ensuite notons que  $f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \|f\| \leq 1 \Leftrightarrow \rho(f) \leq 1$  par 8.22. Mais  $\rho(f) = \|f\|$  car la norme est multiplicative, donc  $f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \|f\| \leq 1$ , d'où si  $f \in A$  alors  $f \in \mathcal{A}$  par 8.36.

Pour démontrer le reste écrivons  $A\langle f^{-1}\rangle \otimes_k k = [\text{par 9.4}] = A\langle T\rangle/(1-ft) \otimes_k k = A\langle T\rangle \otimes_k k/(1-ft) \otimes_k k = [\text{de la même manière comme ci-dessus on montre que } (1-ft)A\langle T\rangle \otimes_k k = (1-ft)\mathcal{A}\langle T\rangle] = \mathcal{A}\langle T\rangle/(1-ft) = (A \otimes_k k)\langle f^{-1}\rangle$ . □

Comme  $\mathcal{A}$  est une algèbre  $k$ -affinoïde, on peut définir l'espace  $k$ -analytique  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Posons  $\mathfrak{X}_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Notons qu'un morphisme  $\text{Spf } A \rightarrow \text{Spf } B$  induit un morphisme  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$  est donc  $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_\eta$  est un foncteur.

Le point  $x \in \mathfrak{X}_\eta$  donne un morphisme  $\chi_x : A \rightarrow \mathcal{H}(x)$ ,  $f \mapsto f(x)$  (comme dans 8.1), qui induit le morphisme  $\widetilde{\chi}_x : \widetilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ , où  $\widetilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} A/kA$  (comme dans 9.12 :  $\chi_x(kA) \subset \mathcal{H}(x)$  par 8.22). On pose :

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \widetilde{\chi}_x.$$

Comme  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  est un corps,  $\pi(x)$  est un idéal premier de  $\widetilde{A}$ . On obtient ainsi une application  $\pi : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s = \text{Spec} \widetilde{A}$ , qu'on appelle *l'application de réduction*.

Maintenant démontrons quelques propriétés de cette application.

**Proposition 9.40.** *L'image de  $\pi$  est fermé dans  $\mathfrak{X}_s$ .*

*Démonstration.* Considérons l'application  $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  et posons  $\pi'(x)$  son noyau. L'application ainsi définie  $\pi' : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \text{Spec} \widetilde{A}$  est l'application de réduction de [Ber1] 2.4. Cette application est surjective d'après [Ber1] 2.4.4 (i).

Considérons ensuite un épimorphisme  $k\langle\zeta\rangle \rightarrow A$ . Il induit les épimorphismes  $\tilde{k}\langle\zeta\rangle \rightarrow \tilde{A}$  et  $k\langle\zeta\rangle \rightarrow \mathcal{A}$ . Notons que le premier est bien défini par 9.12. L'épimorphisme  $k\langle\zeta\rangle \rightarrow \mathcal{A}$  induit un homomorphisme fini  $\tilde{k}\langle\zeta\rangle \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  par [BGR] 6.3.4/2. Ce dernier coïncide avec la composé  $\tilde{k}\langle\zeta\rangle \rightarrow \tilde{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ , donc  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  est fini (car  $\tilde{k}\langle\zeta\rangle \rightarrow \tilde{A}$  est fini). Soit  $x \in \mathfrak{X}_\eta$ . Par définition de  $\pi$  on a alors :  $\pi(x) = j^{-1}(\pi'(x)) = j^{-1}(\ker \tilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)})$ , où  $j : \tilde{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  est le morphisme canonique. Comme  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  est fini, cela montre que l'image de  $\pi$  est fermé dans  $\mathfrak{X}_s$ .  $\square$

**Proposition 9.41.** (i) *Soit  $\mathcal{Y}$  un fermé de  $\mathfrak{X}_s$  défini par  $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  pour certains  $f_1, \dots, f_n \in A$ . Alors*

$$\pi^{-1}(\mathcal{Y}) = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f_i(x)| < 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

(ii) *Soit  $\mathcal{U} = \text{Spec} \tilde{A}_{\tilde{f}}$ ,  $f \in A$  un ouvert de  $\mathfrak{X}_s$ . Alors*

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x)| = 1\}$$

*et donc  $\mathfrak{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$  où  $\mathfrak{U} = \text{Spf} A\langle f^{-1} \rangle$ .*

*Démonstration.* Dans le cas (i) on a :  $x \in \pi^{-1}(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow \pi(x) \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \tilde{f}_i \in \ker \widetilde{\chi}_x, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow |f_i(x)| < 1, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow |f_i(x)| < 1, 1 \leq i \leq n$ .

Dans le cas (ii),  $x \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \pi(x) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \tilde{f} \notin \ker \widetilde{\chi}_x \Leftrightarrow |\tilde{f}(x)| = 1 \Leftrightarrow |f(x)| = 1$ . Le fait, que  $\mathfrak{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$  découle de 8.42. En effet,  $\|f\| \leq 1$  par 8.22 :  $f \in A$  et donc  $f \in \mathcal{A}$  par 9.39. On peut voir donc  $\{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x)| = 1\} = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x)| \geq 1\}$  comme un domaine de Laurent, représenté par  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\langle T \rangle / (1 - fT) = A\langle f^{-1} \rangle \otimes_k k$  (par 9.39). Donc  $\mathfrak{U}_\eta = \mathcal{M}(A\langle f^{-1} \rangle \otimes_k k) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x)| = 1\}$  par 8.42.  $\square$

Considérons le cas où  $\mathcal{U}$  est un ouvert (pas forcément affine) de  $\mathfrak{X}_s$ .

**Proposition 9.42.** *Soit  $\mathfrak{U}$  un schéma formel avec un espace topologique sous-jacent  $\mathcal{U}$ . Alors  $\mathfrak{U}_\eta$  s'identifie à un domaine affinoïde dans  $\mathfrak{X}_\eta$ .*

*Démonstration.* Par 9.11  $\mathfrak{U}$  est l'union finie de schémas formels de la forme  $\mathfrak{U}_i = \text{Spf} A\langle f_i \rangle$ ,  $f_i \in A$ . Posons  $\mathcal{U}_i = \text{Spec} \tilde{A}_{\tilde{f}_i}$ . Donc  $\mathfrak{U}_{i,\eta} = \mathcal{M}(A\langle f_i^{-1} \rangle) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ . Par le théorème de Tate 8.44  $\mathfrak{U}_\eta$  s'identifie avec un domaine affinoïde  $\mathcal{M}(\ker \prod \mathcal{A}\langle f_i^{-1} \rangle \rightarrow \prod \mathcal{A}\langle f_i^{-1}, f_j^{-1} \rangle)$  dans  $\mathfrak{X}_\eta$ . De plus, notons que dans ce cas  $\mathfrak{U}_\eta$  coïncide avec  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ .  $\square$

Considérons le cas général. On le fera en deux étapes. On fixe un recouvrement localement fini  $\mathfrak{X} = \bigcup \mathfrak{X}_i$  par des schémas affines de la forme  $\text{Spf} A$ , où  $A$  est de présentation finie sur  $k$ . Par définition de schémas formels de présentation finie sur  $k$ , on peut supposer que  $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$  est vide sauf un nombre fini d'indices  $j$ .

Pour la première étape supposons que  $\mathfrak{X}$  est séparé. Dans ce cas  $\mathfrak{X}_{ij} = \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$  est affine par 9.7 et donc  $\mathfrak{X}_{ij,\eta}$  est un domaine affinoïde dans  $X_{i,\eta}$  et  $\mathfrak{X}_{ij,\eta} \rightarrow \mathfrak{X}_{i,\eta} \times \mathfrak{X}_{j,\eta}$  est une immersion fermé (i.e. un morphisme d'algèbres associé est un épimorphisme). Donc on peut recoller les  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  pour obtenir un  $k$ -espace analytique séparé paracompact



$\mathfrak{X}_\eta$  (par 9.31). Si  $\mathfrak{X}$  est de présentation finie (i.e. c'est l'union finie  $\bigcup \mathfrak{X}_i$ ) alors  $\mathfrak{X}_\eta$  est compact (comme les  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  sont compacts par 8.18).

De plus, on a les propriétés suivantes :

- Proposition 9.43.** (i)  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est un foncteur ;  
(ii) les applications de réduction  $\mathfrak{X}_{i,\eta} \rightarrow \mathfrak{X}_{i,s}$  donnent une application de réduction  $\pi : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s$  ;  
(iii) si  $\mathcal{U}$  est un sous-schéma ouvert de  $\mathfrak{X}$  avec un espace topologique sous-jacent  $\mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{U}_\eta$  est un domaine analytique fermé de  $\mathfrak{X}_\eta$  et  $\mathcal{U}_\eta \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(\mathcal{U})$  ;  
(iv) si  $\mathcal{Y}$  est un fermé dans  $\mathfrak{X}_s$  alors  $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}_\eta$  ;  
(v) l'image de  $\pi$  est fermé dans  $\mathfrak{X}_s$ .

*Démonstration.* Les propriétés (i) et (ii) découlent du procédé de recollement des morphismes 9.33. La (iv) est vraie comme elle est vraie localement, les propriétés (iii) et (v) découlent de [Bou] I.1.5/4 (ce qui dit que la réunion d'une famille localement finie de parties fermées d'un espace topologique est fermé dans cet espace).  $\square$

Finalement, dans la deuxième étape  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$  quelconque. Notons que  $\mathfrak{X}_{i,j}$  sont des schémas formels séparés (comme l'intersection de deux affines) et on utilise la première étape pour construire  $\mathfrak{X}_{i,j,\eta}$  qui est un domaine analytique compact dans un espace  $k$ -affinoïde  $X_{i,\eta}$  (car  $\mathfrak{X}_{i,j}$  est un ouvert dans un affine et donc l'union finie d'ouverts affines par 9.11). Donc on peut recoller les  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  pour obtenir un espace analytique séparé paracompact  $\mathfrak{X}_\eta$  (par 9.31) et on a les propriétés (i)-(v) comme ci-dessus.

De même, si  $\mathfrak{X}$  est de présentation finie (i.e. c'est l'union finie  $\bigcup \mathfrak{X}_i$ ) alors  $\mathfrak{X}_\eta$  est compact (comme les  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  sont compacts par 8.18).

Il est important de noter que l'espace  $\mathfrak{X}_\eta$  n'est pas bon en général : par exemple si  $\mathfrak{X}$  est un ouvert complémentaire de l'origine dans le plan affine formel alors  $\mathfrak{X}_\eta$  est l'espace analytique de 9.35(ii) qui n'est pas bon.

Pour un morphisme  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  on note  $\phi_s$  et  $\phi_\eta$  les morphismes  $\mathfrak{Y}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  et  $\mathfrak{Y}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  respectivement.

## 10 Morphismes étales et quasi-étales

### 10.1 Morphismes étales de schémas formels

Dans cette section on introduira les notions de morphismes étales de schémas formels. On aura besoin de la propriété suivante, qui a lieu pour les morphismes étales de schémas.

**Théorème 10.1.** *Localement tout morphisme étale est standard :*

*si  $\varphi: Y \rightarrow X$  est un morphisme étale, pour tout  $y \in Y$  il existe des voisinages affines  $V$  et  $U$  de  $y$  et  $\varphi(y)$  respectivement tels que le morphisme  $\varphi|_V: V \rightarrow U$  est standard. (On dit qu'un morphisme étale  $\varphi: V \rightarrow U$  est standard si c'est un morphisme de la forme  $\text{Spec}(A[T]/P)_f \rightarrow \text{Spec}A$ , où  $A$  est un anneau,  $P \in A[T]$  est un polynôme réduit, i.e. son coefficient au plus haut degré est égal à 1,  $f \in A[T]$  tel que  $P'$  est inversible dans  $(A[T]/P)_f$ ).*

*Démonstration.* [Mi], 3.14 □

Maintenant considérons le cas des schémas formels. Soit  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ . De la même manière comme dans 9.10 on montre l'assertion suivante :

**Proposition 10.2.** *L'espace annelé  $\mathfrak{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/a^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  est un schéma de type fini sur  $k/(a^n)$ .*

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k\text{-Fsch}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons qu'un morphisme  $\phi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  induit un morphisme  $\phi_n: \mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$ , car  $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \times_k k/a^n$  et  $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z} \times_k k/a^n$ .

**Remarque 10.3.** Soit  $x \in \mathfrak{X}$  un point du schéma formel  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$  correspondant à l'idéal premier ouvert  $\mathfrak{p}$ . Notons que  $\mathfrak{p} \cap k$  est un idéal premier de  $k$ . Comme  $\mathfrak{p}$  est ouvert,  $\mathfrak{p} \supset (a)$ , donc  $\mathfrak{p} \cap k$  est non nul, d'où  $\mathfrak{p} \cap k = k$  par 8.23. Les schémas  $\mathfrak{X}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathfrak{X}/k\mathfrak{X}$  coïncident donc ensemblistement.

**Définition 10.4.** Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k\text{-Fsch}$ . Un morphisme  $\phi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est dit *plat* (resp. *étale*) si tous les morphismes  $\phi_n: \mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$  sont plats (resp.étales),  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 10.5.** En général les schémas  $\mathfrak{Z}_n$  et  $\mathfrak{X}_n$  ne sont pas localement noethériens (cf. 8.24). La notion d'un morphisme étale (resp. non-ramifié) correspond donc à [EGAIV] 17.3. Pourtant on peut utiliser le même critère que pour des schémas localement noethériens (*loc. cit.* 17.4.1(d'')) : un morphisme localement de présentation finie  $f: X \rightarrow Y$  est non-ramifié en point  $x \in X$  ssi l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{y,x}} = \mathcal{O}_{X,x}/m_y \mathcal{O}_{X,x}$  est un corps, extension finie séparable de  $k(y)$ , où l'on note  $y = f(x)$  et  $X_y$  est la fibre de  $f$  en point  $y$ .

**Lemme 10.6.** *Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k\text{-Fsch}$ . Un morphisme  $\phi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est étale si et seulement s'il est plat et étale en sa fibre spéciale (i.e. si le morphisme  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est étale).*

*Démonstration.* Si  $\phi_n: \mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$  sont étales, alors  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  l'est aussi par le changement de base (le morphisme  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  coïncide avec le morphisme  $\mathfrak{Z}_n \otimes_{\mathfrak{X}_n} (\mathfrak{X}_n \otimes_k k/k) \rightarrow \mathfrak{X}_n \otimes_k k/k$ ). Il s'agit donc de montrer que si  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est non-ramifié, alors  $\mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{X}_n$  le sont aussi. Cela découle de la remarque ci-dessus vu que les anneaux locaux des fibres de ces morphismes (i.e. les  $\mathcal{O}_{X_{y,x}}$ ) ainsi que les corps résiduels sont les mêmes par 10.3. □

**Proposition 10.7.** *Soit  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$ . Alors la correspondance  $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}_s$  induit une équivalence entre la catégorie des schémas formels étales sur  $\mathfrak{X}$  et la catégorie des schémas étales sur  $\mathfrak{X}_s$ .*

**Remarque 10.8.** Cette correspondance est bien définie par le lemme ci-dessus.

*Démonstration.* Il faut montrer que le foncteur  $\cdot_s : \mathfrak{Z} \mapsto \mathfrak{Z}_s$  entre la catégorie des schémas formels étales sur  $\mathfrak{X}$  et la catégorie des schémas étales sur  $\mathfrak{X}_s$  est essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Montrons qu'il est pleinement fidèle. Il s'agit de montrer que l'ensemble de morphismes étales  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$  est isomorphe à l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}_s}(\mathfrak{Y}_s, \mathfrak{Z}_s)$ . Cela découle du fait que  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \varprojlim \text{Hom}_{\mathfrak{X}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n)$  par [EGAI] I.10.6.11 et du fait que  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Z}_n) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{X}_s}(\mathfrak{Y}_s, \mathfrak{Z}_s)$  par [Mi] I.3.23.

Montrons que  $\cdot_s$  est essentiellement surjectif. Comme il est pleinement fidèle, il suffit de montrer que l'on peut relever localement un morphisme étale  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}_s$  (i.e. on peut recoller les relèvements ainsi obtenus, car ils coïncident sur les intersections vu que  $\phi_s = \psi_s \Rightarrow \phi = \psi$  car le foncteur  $\cdot_s$  est pleinement fidèle). Par la localité on peut supposer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf} A$ ,  $\mathfrak{X}_s = \text{Spec} \tilde{A}$  et  $\mathcal{Z} = \text{Spec}(\tilde{A}[T]/\tilde{P})_{\tilde{f}}$ , où  $\tilde{P}$  est un polynôme réduit et  $\tilde{P}'$  est inversible dans  $(\tilde{A}[T]/\tilde{P})_{\tilde{f}}$  (par 10.1). On choisit des relèvements  $P$  et  $f$  de  $\tilde{P}$  et  $\tilde{f}$  et on pose  $Z = \text{Spf}(A\langle T \rangle/P)_f$ . Alors  $Z_s = \mathcal{Z}$ . Comme  $Z$  est un ouvert du schéma formel  $\text{Spf}(A\langle T \rangle/P) = \text{Spf}(A[T]/P)$ , on voit que  $Z$  est plat sur  $X$ . Comme  $Z_s \rightarrow X_s$  est étale,  $Z \rightarrow X$  est étale d'après 10.6. Donc  $\cdot_s$  est essentiellement surjectif et cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

Maintenant étudions le comportement de morphismes étales par rapport à l'application de réduction.

**Proposition 10.9.** *Soit  $\phi : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme étale. Alors*

$$\phi_\eta(\mathfrak{Z}_\eta) = \pi^{-1}(\phi_s(\mathfrak{Z}_s)).$$

*En particulier,  $\phi_\eta(\mathfrak{Z}_\eta)$  est un domaine analytique fermé de  $\mathfrak{X}_\eta$ .*

*Démonstration.* Notons que si  $\phi : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale, alors on peut le factoriser par  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ , où  $\mathfrak{U}$  est un ouvert du schéma formel  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{U}_s$  est surjectif (il suffit de prendre  $\mathfrak{U} = \text{Im } \phi$  qui est ouvert d'après 10.3 et le fait que  $\phi$  est plat). Notons que  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{U}_s$  est étale puisque  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est étale et  $\mathfrak{U}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est étale comme une immersion ouverte. Donc  $\pi^{-1}(\phi_s(\mathfrak{Z}_s)) = \pi^{-1}(\mathfrak{U}_s) = \mathfrak{U}_\eta$  et il suffit donc de montrer que  $\mathfrak{Z}_\eta \rightarrow \mathfrak{U}_\eta$  est surjectif. Soit  $x \in \mathfrak{U}_\eta$ , alors  $x$  correspond à un morphisme  $\mathcal{M}(k(x)) \rightarrow \mathfrak{U}_\eta$  par 9.37, ce dernier donne un morphisme  $\text{Spf}(k(x)) \rightarrow \mathfrak{U}$ , où  $k(x) = \{y \in k(x), \|y\| \leq 1\}$  est un anneau des entiers de  $k(x)$ . On pose  $\tilde{k}(x)$  le corps résiduel de  $k(x)$ . Posons  $A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spf}(k(x))$ . On a donc un morphisme  $A_s \rightarrow \mathfrak{U}_s$ , ce qui donne un morphisme  $A_s \rightarrow \mathfrak{Z}_s$  puisque  $\mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{U}_s$  est surjectif. Il s'agit donc de montrer que le morphisme  $A_s \rightarrow \mathfrak{Z}_s$  se relève à un morphisme  $A \rightarrow \mathfrak{Z}$ . Par la localité on peut supposer que  $\mathfrak{U} = \text{Spf} C = \text{Spf}(k\langle x_1, \dots, x_n \rangle/I)$ ,  $\mathfrak{U}_s = \text{Spec} C_s = \text{Spec}(\tilde{k}[x_1, \dots, x_n]/\tilde{I})$  et, comme  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{U}$  est étale, on peut aussi supposer que  $\mathfrak{Z} = \text{Spf}(C\langle T \rangle/P)\langle f^{-1} \rangle$  et  $\mathfrak{Z} = \text{Spf}(C_s\langle T \rangle/\tilde{P})_{\tilde{f}}$  comme dans la proposition précédente ( $P$  est un polynôme réduit). Soit  $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  le  $\tilde{k}(x)$ -point de  $\mathfrak{U}_s$  correspondant à  $A_s \rightarrow \mathfrak{U}_s$ , il se relève à  $k(x)$ -point  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathfrak{U}$ . Soit  $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b})$  le point correspondant à  $A_s \rightarrow \mathfrak{Z}_s$ . Soit  $P_a(t) = P(a_1, \dots, a_n, t)$ , on a  $\tilde{P}_a(\tilde{b}) = 0$ , donc, puisque  $k(x)$  est Hensélien (par [Ber2] 2.3.3 et 2.4.3), on peut relever  $\tilde{b}$  en  $b$  tel que  $P_a(b) = P(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ . On obtient ainsi un  $k(x)$ -point de  $\mathfrak{Z}$  (la condition  $f(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$  est aussi satisfaite car  $\tilde{f}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b}) \neq 0$ ). Cela donne un morphisme  $\mathcal{M}(k(x)) \rightarrow \mathfrak{Z}_\eta$ , donc  $\mathfrak{Z}_\eta \rightarrow \mathfrak{U}_\eta$  est surjectif.  $\square$

## 10.2 Morphismes étales d'espaces analytiques

Étudions d'abord quelques propriétés d'espaces affinoïdes et analytiques.

**Définition 10.10.** Soit  $\phi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  un morphisme d'espaces affinoïdes. On dit que c'est une *immersion fermée* si  $A \rightarrow B$  est un épimorphisme admissible.

**Définition 10.11.** Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques s'appelle une *immersion fermée* si pour tout  $x \in X$  il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset X$  tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ ,  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $x$  et  $\phi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  sont des immersions fermées d'espaces affinoïdes.

**Lemme 10.12.** *Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est une immersion fermée ssi pour tout domaine affinoïde  $V \subset X$ ,  $\phi^{-1}(V) \rightarrow V$  est une immersion fermée d'espaces affinoïdes.*

*Démonstration.* [Ber2] 1.3.7 □

**Définition 10.13.** On dit qu'un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est une *immersion G-localement fermé* s'il existe un quasi-réseau  $\tau$  de domaines analytiques sur  $Y$  tel que pour tout  $V \in \tau$  il existe un domaine analytique  $U \subset X$  tel que  $\phi$  induit une immersion fermée  $V \rightarrow U$ .

Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  une immersion G-localement fermée, soient  $U, V$  comme dans la définition ci-dessus. Si  $\mathcal{J}$  est un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{U_G}$  correspondant à  $V$ , alors on peut considérer  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  comme un  $\mathcal{O}_{V_G}$ -module. Tous ces faisceaux sont compatibles sur les intersections et ils définissent un  $\mathcal{O}_{Y_G}$ -module cohérent. On l'appelle un *faisceau conormal* et on le note  $\mathcal{N}_{Y_G/X_G}$ .

**Définition 10.14.** On dit qu'un morphisme d'espaces analytiques  $\phi : Y \rightarrow X$  est *séparé* si le morphisme diagonal  $\Delta_{Y/X} : Y \rightarrow Y \times_X Y$  est une immersion fermée.

**Remarque 10.15.** Si  $\phi : Y \rightarrow X$  est séparé alors l'intersection de deux domaines affinoïdes est affinoïde : en effet si  $U$  et  $V$  sont des domaines affinoïdes alors  $U \cap V = \Delta_{Y/X}^{-1}(U \times V)$  et  $\Delta_{Y/X}^{-1}(U \times V) \rightarrow U \times V$  est une immersion fermée d'espaces affinoïdes et donc  $U \cap V$  est affinoïde.

**Définition 10.16.** Soit  $\phi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  un morphisme d'espaces affinoïdes. On dit qu'il est *fini* si  $B$  est un  $A$ -module de Banach de type fini.

**Définition 10.17.** Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est dit *fini* si pour tout  $x \in X$  il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset X$  tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ ,  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $x$  et  $\phi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  sont des morphismes finis d'espaces affinoïdes.

**Lemme 10.18.** *Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est fini ssi pour tout domaine affinoïde  $V \subset X$ ,  $\phi^{-1}(V) \rightarrow V$  est un morphisme fini d'espaces affinoïdes.*

*Démonstration.* [Ber2] 1.3.7 □

**Définition 10.19.** On dit qu'un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est *fini* au point  $y \in Y$  s'il existe des voisinages ouverts  $V$  et  $U$  de  $y$  et  $\phi(y)$  respectivement tels que  $\phi$  induit un morphisme fini  $V \rightarrow U$ . On dit que  $\phi$  est *quasi-fini* si'il est fini en tout

point  $y \in Y$ .

**Lemme 10.20.** *Si un morphisme de bons espaces analytiques  $\phi : Y \rightarrow X$  est fini en point  $y \in Y$ , alors  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est une  $\mathcal{O}_{X,\phi(y)}$ -algèbre finie.*

*Démonstration.* [Ber2] 3.1.6 □

**Définition 10.21.** On dit qu'un morphisme quasi-fini  $\phi : Y \rightarrow X$  de bons espaces analytiques est *plat* au point  $y \in Y$  si  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est plat sur  $\mathcal{O}_{X,\phi(y)}$ . On dit que  $\phi$  est *plat* s'il est plat en tout point  $y \in Y$ .

**Lemme 10.22.** *Un morphisme fini d'espaces analytiques  $\phi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est plat en point  $y \in Y$  ssi  $B_{\mathfrak{p}_y}$  est plat sur  $A_{\mathfrak{p}_{\phi(y)}}$ , où  $\mathfrak{p}_y$  et  $\mathfrak{p}_{\phi(y)}$  sont les idéaux correspondants aux semi-normes définies par  $y$  et  $\phi(y)$ . En particulier,  $\phi$  est plat ssi  $B$  est plat sur  $A$ .*

*Démonstration.* [Ber2] 3.2.1 □

Dans le cas général on définit les morphismes plats comme suit.

**Lemme 10.23.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme fini d'espaces analytiques, soient  $y \in Y$  et  $x = \phi(y)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset X$  tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ ,  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $x$  et  $\phi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  est plat en  $y$  pour tout  $i$ ;*
- (ii) *pour tout domaine affinoïde  $V \subset X$ ,  $\phi^{-1}(V) \rightarrow V$  est plat en  $y$ .*

*Démonstration.* [Ber2] 3.2.3 □

**Définition 10.24.** On dit qu'un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est *plat* en point  $y \in Y$  s'il existe des voisinages ouverts  $V$  et  $U$  de  $y$  et  $\phi(y)$  respectivement tels que  $\phi$  induit un morphisme fini  $V \rightarrow U$  qui vérifie les conditions équivalentes du lemme ci-dessus. On dit que  $\phi$  est *plat* s'il est plat en tout point  $y \in Y$ .

**Proposition 10.25.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme plat quasi-fini d'espaces analytiques. Alors  $\phi$  est une application ouverte.*

*Démonstration.* [Ber2] 3.2.7 □

Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme d'espaces analytiques. Considérons le morphisme diagonal  $\Delta_{Y/X} : Y \rightarrow Y \times_X Y$  (le produit  $Y \times_X Y$  est bien défini par 9.25). D'après [Ber2] 1.4 c'est une immersion  $G$ -localement fermée (la collection  $\tau$  de domaines affinoïdes  $V \subset Y \mid \exists U \subset X$  un domaine affinoïde  $\phi(V) \subset U$  est un réseau, pour tels  $U, V$  on a que  $V \times_U V$  est un domaine affinoïde de  $Y \times_X Y$  et  $\Delta_{Y/X}$  induit une immersion fermée  $V \rightarrow V \times_U V$ ). On peut donc définir un faisceau conormal de  $\Delta_{Y/X}$  qu'on appelle le *faisceau de différentielles* de  $\phi$  et on le note par  $\Omega_{Y_G/X_G}$ .

**Définition 10.26.** On dit qu'un morphisme quasi-fini  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques est *non-ramifié* si  $\Omega_{Y_G/X_G} = 0$ . On dit que  $\phi$  est *étale* s'il est non-ramifié et plat. On dit qu'il est *non-ramifié* (resp. *étale*) en  $y \in Y$  si'il existe des voisinages ouverts  $V$  et  $U$  de  $y$  et  $\phi(y)$  respectivement tels que  $\phi$  induit un morphisme non-ramifié (resp. étale)  $V \rightarrow U$ .

**Lemme 10.27.** *Un morphisme quasi-fini  $\phi : Y \rightarrow X$  de bons espaces analytiques est non-ramifié (resp. étale) au point  $y \in Y$  ssi  $\mathcal{O}_{Y,y}/m_x \mathcal{O}_{Y,y}$  ( $x = \phi(y)$ ) est une extension finie et séparable de  $k(x)$  (resp. et  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est plat sur  $\mathcal{O}_{X,x}$ ), où l'on note par  $m_x$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ ,  $k(x)$  est son corps résiduel.*

*Démonstration.* [Ber2] 3.3.6 □

Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme quasi-fini. D'après la définition de la  $G$ -topologie sur un espace analytique,  $\Omega_{Y_G/X_G} = 0$  si et seulement si pour chaque domaine affinoïde  $V \subset X$  on a  $\Omega_{(\phi^{-1}(V)_G)/V_G} = 0$ . D'après 10.23 on obtient donc :

**Proposition 10.28.** Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme quasi-fini d'espaces analytiques, soient  $y \in Y$  et  $x = \phi(y)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalents :

- (i)  $\phi$  est étale en  $y$  ;
- (ii) il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset X$  tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ ,  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $x$  et  $\phi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  est étale en  $y$  pour tout  $i$  ;
- (iii) pour tout domaine affinoïde  $V \subset X$ ,  $\phi^{-1}(V) \rightarrow V$  est étale en  $y$ .

**Proposition 10.29.** *Les morphismes étales sont stables par composition, par changements de base et par extensions du corps de base.*

*Démonstration.* [Ber2] 3.3.8 □

**Proposition 10.30.** Soient  $\psi : Z \rightarrow Y$  et  $\phi : Y \rightarrow X$  des morphismes quasi-finis. Si  $\phi \circ \psi$  est étale et  $\phi$  est non-ramifié, alors  $\psi$  est étale.

*Démonstration.* [Ber2] 3.3.9 □

On note par  $\acute{E}t(X)$  la catégorie de morphismes étales  $U \rightarrow X$ . D'après la proposition précédente tous les morphismes dans cette catégorie sont étales. Maintenant définissons le site  $X_{\acute{e}t}$ . On pose  $\text{Cat}(X_{\acute{e}t}) = \acute{E}t(X)$  et l'ensemble de recouvrements de  $(U \rightarrow X) \in \acute{E}t(X)$  est donné par les familles  $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i \in I}$  tels que  $U = \bigcup_{i \in I} f_i(U_i)$ . On dira qu'un faisceau  $F \in X_{\acute{e}t} \sim$  est un faisceau étale sur  $X$ .

Notons que tout morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  d'espaces analytiques induit un morphisme de sites  $Y_{\acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t}$  par 10.29 (un morphisme  $(U \rightarrow X) \in \acute{E}t(X)$  donne un morphisme  $(U \times_X Y \rightarrow Y) \in \acute{E}t(Y)$ ). Comme dans 9.2, pour un tel morphisme  $\phi$  on peut définir le foncteur *d'image directe*  $\phi_* : Y_{\acute{e}t} \sim \rightarrow X_{\acute{e}t} \sim$  en posant  $\phi_* F(U) = F(U \times_X Y)$ .

De même on définit le foncteur *d'image inverse*  $\phi^* : X_{\acute{e}t} \sim \rightarrow Y_{\acute{e}t} \sim$  en posant  $\phi^* F$  est un faisceau associé au préfaisceau  $V \mapsto \phi^p(V) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim (F(U))$  où l'on prend la limite sur tous les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

avec  $U \rightarrow X$  étale. Cette définition admet un sens et  $\phi^*$  est adjoint à gauche de  $\phi_*$ .

Dans la suite on aura besoin de la construction suivante, qui est une généralisation de la catégorie  $\acute{E}t(X)$ .

**Définition 10.31.** Un *germe d'espace analytique* (où  $k$ -germe) est une paire  $(X, S)$  où  $X$  est un espace analytique et  $S \subset |X|$ , i.e.  $S$  est un sous-ensemble de l'espace topologique sous-jacent  $|X|$ . Si  $S = \{x\}$  on note le germe correspondant par  $(X, x)$ .

Les  $k$ -germes forment une catégorie où un morphisme de  $(Y, T)$  à  $(X, S)$  est un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  tel que  $\phi(T) \subset S$ . La catégorie *k-Germs* est la catégorie de fractions de cette catégorie par le système de morphismes  $\phi : Y \rightarrow X$  tels que  $\phi$  induit un isomorphisme de  $Y$  avec un voisinage ouvert de  $S$  dans  $X$ . Ce système admet un calcul de

fractions (à droite) et donc  $\text{Hom}_{k\text{-Germs}}((Y, T), (X, S)) = \varinjlim(\phi : V \rightarrow X), \phi(T) \subset S$  où on prend la limite sur tous  $V$  appartenant au système fondamental de voisinages de  $T$  dans  $Y$  ([Ber2] 3.4). On appelle un tel morphisme  $\phi : V \rightarrow X$  un représentant du morphisme  $(Y, T) \rightarrow (X, S)$ .

**Définition 10.32.** Soit  $(X, S)$  un  $k$ -germe. La catégorie  $\acute{E}t(X, S)$  est la catégorie des morphismes  $(Y, T) \rightarrow (X, S)$  qui possèdent un représentant étale  $\phi : V \rightarrow X$  tel que  $T = \phi^{-1}(S)$ .

Notons qu'on a une équivalence  $\acute{E}t(X, |X|) \simeq \acute{E}t(X)$ . Si  $x \in X$ ,  $F\acute{e}t(X, x)$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\acute{E}t(X, x)$  formée par des morphismes  $(Y, T) \rightarrow (X, x)$  qui ont le représentant  $\phi : V \rightarrow X$  avec  $V \rightarrow \phi(V)$  fini.

**Théorème 10.33.** Soit  $X$  un espace analytique, soit  $x \in X$ . Alors on a une équivalence de catégories  $F\acute{e}t(X, x) \xrightarrow{\sim} F\acute{e}t(\mathcal{H}(x))$  où  $F\acute{e}t(\mathcal{H}(x))$  désigne la catégorie des schémas finis et étales sur  $\text{Spec } \mathcal{H}(x)$ .

*Démonstration.* [Ber2] 3.4.1 □

Définissons la topologie étale sur un  $k$ -germe  $(X, S)$ . Les recouvrements de  $(U, T) \rightarrow (X, S) \in \acute{E}t(X, S)$  sont donnés par les familles  $((U_i, T_i) \xrightarrow{f_i} (U, T))_{i \in I}$  telles que  $T = \bigcup_i f_i(T_i)$ . On note par  $(X, S)_{\acute{e}t}$  le site ainsi obtenu. On a un morphisme de sites  $i_{(X, S)} : (X, S)_{\acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t}$ . Si  $F$  est un faisceau sur  $X$  (i.e. un faisceau sur le site  $X_{\acute{e}t}$ ), on note  $F_{(X, S)} = i_{(X, S)}^* F$ .

Soit  $(X, S)$  est un  $k$ -germe. Si  $x \in S$ , alors on a le morphisme de sites  $i_x : \mathcal{H}(x)_{\acute{e}t} \rightarrow (X, S)_{\acute{e}t}$  (par 9.37). Plus précisément, ce morphisme vient d'un morphisme  $\acute{E}t(X, x) \rightarrow \acute{E}t(\mathcal{H}(x))$  obtenu par composition  $\acute{E}t(X, x) \rightarrow \acute{E}t(X(x)) \rightarrow \acute{E}t(k(x)) \rightarrow \acute{E}t(\mathcal{H}(x))$ , où l'on note par  $\acute{E}t(X(x))$ ,  $\acute{E}t(k(x))$  et  $\acute{E}t(\mathcal{H}(x))$  les catégories des schémas étales sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, x}$ ,  $\text{Spec } k(x)$  et  $\text{Spec } \mathcal{H}(x)$  respectivement.

**Définition 10.34.** Soit  $F$  est un faisceau sur  $(X, S)$ . On appelle le fibre  $F_x$  de  $F$  en  $x$  l'image inverse  $i_x^* F$ .

**Remarque 10.35.** D'après 9.19 on peut identifier  $F_x$  avec un  $G_{\mathcal{H}(x)}$ -module discret correspondant.

Soit  $(X, S)$  un  $k$ -germe. A un ouvert  $U \subset S$  on associe un ouvert  $U_X \subset X$  tel que  $U_X \cap S = U$ . La correspondance  $U \mapsto U_X$  ainsi obtenue définit un foncteur de la catégorie des ouverts de  $S$  vers  $\acute{E}t(X, S)$ ,  $U \mapsto ((U_X, S) \rightarrow (X, S))$ , et ce foncteur ne dépend pas du choix des  $U_X$  (à un isomorphisme près). On obtient ainsi le morphisme de sites  $\pi : (X, S)_{\acute{e}t} \rightarrow S$ , où  $S$  est le site correspondant à la topologie usuelle sur  $S$ . En particulier, il existe un morphisme  $X_{\acute{e}t} \rightarrow |X|$  que l'on note aussi par  $\pi$ .

**Théorème 10.36.** Soit  $F$  un faisceau des groupes abéliens sur  $(X, S)$ , soit  $x \in S$ . Alors  $(R^q \pi_* F)_x \simeq H^q(G_{\mathcal{H}(x)}, F_x)$ ,  $q \geq 0$ .

*Démonstration.* [Ber2] 4.2.4 □

### 10.3 Topologie quasi-étale sur un espace analytique

Démontrons d'abord la propriété suivante, qui sera basique pour la définition de la topologie quasi-étale dans la suite.

**Théorème 10.37.** *Soit  $\phi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme étale de schémas formels  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k\text{-Fsch}$ . Alors pour chaque  $z \in \mathfrak{Z}_\eta$  il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset \mathfrak{Z}_\eta$  tels que  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $y$  et pour tout  $i$  on peut identifier  $V_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $\mathfrak{X}_\eta$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord l'assertion pour  $\phi$  de la forme  $\mathrm{Spf}(B\langle f^{-1} \rangle) \rightarrow \mathrm{Spf}A$ , où (comme dans 10.7)  $B = A[T]/P \xrightarrow{\sim} A\langle t \rangle/P$ , où  $P$  est un polynôme réduit et  $f \in B$  tel que l'image  $\widetilde{P}'$  de  $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} P'$  dans  $\widetilde{B}_{\widetilde{f}} = (\widetilde{A}[T]/\widetilde{P})_{\widetilde{f}}$  est inversible. Posons  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}B$ , alors  $\mathfrak{Z}_\eta = \{z \in \mathfrak{U}_\eta \mid |f(z)| = 1\}$  par 9.41.

Comme  $\widetilde{P}'$  est inversible dans  $\widetilde{B}_{\widetilde{f}}$ ,  $|g(z)| = 1$  pour tout  $z \in \mathfrak{Z}_\eta$ . En effet, il existe  $\tilde{b} \in \widetilde{B}$  tel que  $\tilde{g}\tilde{b}\tilde{f}^l = \tilde{f}^{m+l}$  pour certains  $m, l \in \mathbb{N}$ . Comme  $\mathfrak{Z}_\eta = \{z \in \mathfrak{U}_\eta \mid |f(z)| = 1\}$ , alors pour tout  $z \in \mathfrak{Z}_\eta$  on a  $|g(z)| \cdot |b(z)| = |gb(z)| = 1$ . Comme  $|\cdot|$  est borné et multiplicative,  $|g(z)| \leq \|g\| \leq 1$  et  $|b(z)| \leq \|b\| \leq 1$ , donc  $|g(z)| = |b(z)| = 1$ .

Par 10.27 le morphisme  $\mathfrak{U}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est étale en point  $z \in \mathfrak{U}_\eta$  ssi  $g$  est inversible dans l'anneau local correspondant, i.e. ssi  $g(z) \neq 0$  par 8.46. Or  $|g(z)| = 1$  pour tout  $z \in \mathfrak{Z}_\eta$ , alors  $\mathfrak{Z}_\eta \subset \{z \in \mathfrak{U}_\eta \mid g(z) \neq 0\}$  peut être identifié avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $\mathfrak{X}_\eta$ .

Par le même procédé comme dans 10.7, dans le cas général on peut trouver des sous-schémas formels affines  $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n \subset \mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{Z}_n \subset \mathfrak{Z}$  tels que  $y \in \mathfrak{Z}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{Z}_n$ ,  $\mathfrak{Z}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{Z}_n$  est un voisinage de  $y$  et  $\phi$  induit des morphismes étales de la forme  $\mathrm{Spf}(B\langle f^{-1} \rangle) \rightarrow \mathrm{Spf}A$  comme ci-dessus (d'après la preuve de [Ber2] 1.3.3, cela découle de la structure du réseau  $\tau$  sur un espace analytique obtenu par recollement.) Par ce qui précède, on peut identifier  $\mathfrak{Z}_{i,\eta}$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ . Mais pour tout  $i$  on peut trouver un voisinage  $V_i$  de  $y$  dans  $\mathfrak{Z}_{i,\eta}$  tel que l'on peut identifier  $V_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $\mathfrak{X}_\eta$  tout entier par [Ber2] 3.4.2. Comme  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $y$  dans  $\mathfrak{Z}_\eta$ , on obtient le résultat. □

Soit  $\phi: Y \rightarrow X$  un morphisme d'espaces  $k$ -analytiques.

**Définition 10.38.** On dit que  $\phi$  est *quasi-étale* si pour chaque point  $y \in Y$  il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset Y$  tels que  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $y$  et pour tout  $i$  on peut identifier  $V_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $X$ .

Par exemple, un plongement canonique d'un domaine analytique est quasi-étale. Par 10.37, si  $\phi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale de schémas formels  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \in k\text{-Fsch}$ , alors  $\phi_\eta: \mathfrak{Z}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est quasi-étale.

**Remarque 10.39.** Si  $\phi: Y \rightarrow X$  est quasi-étale, alors il en découle de 9.23 qu'il existe des domaines affinoïdes  $V_1, \dots, V_n \subset Y$ , tels que  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $y$  et pour tout  $i$  on peut identifier  $V_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace  $k$ -analytique paracompact séparé (i.e. de Hausdorff) et étale sur  $X$ .

**Proposition 10.40.** (i) *Les morphismes quasi-étales sont stables par composition, par changement de base et par extension du corps de base.*

(ii) *Si  $Y$  et  $Z$  sont quasi-étales sur  $X$ , alors  $\phi: Z \rightarrow Y$  est quasi-étale pour tout  $X$ -morphisme  $\phi$ .*

*Démonstration.* Ces propriétés sont vraies pour les morphismes étales. Donc le fait que les morphismes quasi-étales sont stables par changement de base et par extension de corps de base découle de 8.43.



Soient  $Z \xrightarrow{\psi} Y$  et  $Y \xrightarrow{\phi} X$  quasi-étales. Montrons que  $Z \rightarrow X$  est quasi-étale. Soient  $z \in Z$ ,  $y \in Y$ ,  $x \in X$  tels que  $y = \psi(z)$  et  $x = \phi(y)$ . Il existe des domaines affinoïdes  $Z_1, \dots, Z_m \subset Y$  tels que  $Z_1 \cup \dots \cup Z_m$  est un voisinage de  $y$  et pour tout  $i$  on peut identifier  $Z_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique  $\mathcal{Z}_i$  étale sur  $Y$  et il existe des domaines affinoïdes  $Y_1, \dots, Y_n \subset Y$  tels que  $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$  est un voisinage de  $y$  et pour tout  $i$  on peut identifier  $Y_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique  $\mathcal{Y}_i$  étale sur  $X$ . D'après 9.28, quitte à raffiner  $Z_i$ , on peut supposer que pour chaque  $Z_i$  il existe  $Y_{j(i)}$  tel que  $\psi(Z_i) \subset Y_{j(i)}$ . On a donc  $\mathcal{Z}_i$  est étale sur  $Y_{j(i)}$  et  $Y_{j(i)}$  est un domaine affinoïde dans  $\mathcal{Y}_{j(i)}$ . D'après [Ber2] 3.4.1 et 3.2.2 on peut supposer que l'on peut identifier  $\mathcal{Z}_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $\mathcal{Y}_i$ . D'après 8.43 on peut donc identifier  $Z_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique étale sur  $X$ . Le résultat en découle.

Pour démontrer (ii) notons que  $\phi = pr_2 \circ \Gamma_\phi$ , où  $pr_2$  est la projection  $Z \times_X Y \rightarrow Y$ , qui est quasi-étale par le changement de base,  $\Gamma_\phi$  est le graphe  $Z \rightarrow Z \times_X Y$ , il est obtenu d'un morphisme quasi-étale  $Y \rightarrow Y \times_X Y$  par le changement de base. Le résultat en découle.  $\square$

Soit  $X$  un espace analytique. On note  $Qét(X)$  la catégorie des morphismes quasi-étales  $U \rightarrow X$ . Par la proposition ci-dessus on peut définir la topologie de Grothendieck sur  $Qét(X)$  comme suit. Un recouvrement de  $(U \rightarrow X) \in Qét(X)$  est une famille  $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$  telle que tout point de  $U$  a un voisinage de la forme  $f_{i_1}(V_1) \cup \dots \cup f_{i_n}(V_n)$  pour certains domaines affinoïdes  $V_1 \subset U_{i_1}, \dots, V_n \subset U_{i_n}$ . On note  $X_{qét}$  le site ainsi obtenu et par  $X_{qét}^\sim$  la catégorie des faisceaux d'ensembles sur  $X_{qét}$ . On note  $X_G$  le site obtenu en considérant la  $G$ -topologie sur  $X$ ,  $X_{ét}$  est le site étale. On a ainsi des morphismes de sites :  $\mu : X_{qét} \rightarrow X_{ét}$  et  $X_{qét} \rightarrow X_G$ .

De la même manière comme dans 10.2 le morphisme  $\mu$  induit le morphisme  $\mu^* : X_{ét}^\sim \rightarrow X_{qét}^\sim$  et le morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  induit les morphismes  $\phi : Y_{qét} \rightarrow X_{qét}$  et  $\phi^* : X_{qét}^\sim \rightarrow Y_{qét}^\sim$ .

## 10.4 Faisceaux moux sur des espaces analytiques

**Définition 10.41.** Un faisceau  $F$  sur un espace topologique  $X$  est dit *mou* si pour tout fermé  $V \subset X$  l'application  $F(X) \rightarrow F(V)$  est surjective.

D'après [God] on a les descriptions suivantes de faisceaux moux :

**Théorème 10.42.** *Soit  $X$  un espace topologique paracompact, soit  $F$  un faisceau sur  $X$ .*

- (i) *Si chaque point de  $X$  admet un voisinage (ouvert)  $U$  tel que  $F|_U$  est mou alors  $F$  est mou.*
- (ii) *Si  $F$  est un faisceau mou, alors  $F$  induit un faisceau mou sur tout sous-espace fermé de  $X$ . Si  $X$  est normé, alors  $F$  induit un faisceau mou sur tout sous-espace localement fermé de  $X$ .*
- (iii) *Si  $F$  est un faisceau mou de groupes abéliens, alors  $H^q(X, F) = 0$ ,  $q \geq 1$ .*

*Démonstration.* [God] II.3.4.1, II.3.4.2, II.4.4.3(b)  $\square$

Maintenant considérons le cas d'espaces analytiques.

**Définition 10.43.** On dit qu'un faisceau étale de groupes abéliens sur un espace analytique est *mou* si pour tout  $x \in X$   $F_x$  est un  $G_{\mathcal{H}(x)}$ -module flasque (au sens de 9.18) et pour tout  $U$  paracompact et étale sur  $X$  la restriction de  $F$  à la topologie usuelle de

l'espace topologique sous-jacent  $|U|$  est mou.

**Exemple 10.44.** Un exemple important d'un faisceau mou est un faisceau injectif. Le fait, qu'il est mou découle de [Ber2] 4.2.5 (un faisceau injectif est acyclique, donc les conditions (1) et (2) de [Ber2] 4.2.5 sont vérifiés, ce qui dit qu'un faisceau injectif est mou.)

**Lemme 10.45.** *Soit  $F$  un faisceau étale de groupes abéliens sur un espace analytique  $X$ . Si  $F$  est mou et  $X$  est paracompact, alors  $H^q(X, F) = 0$ ,  $q \geq 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $\pi : X_{\text{ét}} \rightarrow |X|$  un morphisme de sites construit au paragraphe précédent. Par [SGA4] V.5.3 on a la suite spectrale de Leray  $E_2^{p,q} = H^p(|X|, R^q\pi_*F) \implies H^{p+q}(X, F)$ . Comme  $F$  est mou,  $(R^q\pi_*F)_x = 0$  pour tout point  $x \in X$ ,  $q \geq 1$  (d'après 10.36). Cela implique que  $R^q\pi_*F = 0$ , on a donc  $H^q(X, F) = H^q(|X|, \pi_*F)$ . Cela donne que  $H^q(X, F) = 0$ ,  $q \geq 1$ , car  $H^q(|X|, \pi_*F) = 0$ ,  $q \geq 1$  par 10.42 (vu que la restriction de  $F$  à la topologie usuelle de  $|X|$  est mou).  $\square$

**Lemme 10.46.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme d'espaces analytiques. Si  $F$  un faisceau mou sur  $X$ , alors  $\phi^*F$  est un faisceau mou sur  $Y$  dans les cas suivants :*

- (i)  $\phi$  est quasi-étale ;
- (ii)  $\phi$  est un morphisme canonique  $\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \hat{\otimes} \hat{k}^a \rightarrow X$ , où  $k^a$  désigne une clôture algébrique de  $k$ .

**Remarque 10.47.** Si la valuation de  $k$  est non-triviale, alors la clôture separable  $k^s$  est dense dans  $k^a$ , i.e.  $\hat{k}^s = \hat{k}^a$  ([BGR] 3.4.1/5).

*Démonstration.* (i) Notons que si  $y \in Y$  et  $x = \phi(y)$  alors on a l'inclusion  $\mathcal{H}(y) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$ . On peut supposer donc que  $\mathcal{H}(y)^s \hookrightarrow \mathcal{H}(x)^s$ , d'où  $G_{\mathcal{H}(y)}$  est un sous-groupe fermé de  $G_{\mathcal{H}(x)}$ . De plus, on peut identifier  $(\phi^*F)_y$  avec  $F_x$  par [Ber2] 4.3.1 et cette identification est compatible avec l'action de groupes  $G_{\mathcal{H}(y)}$  et  $G_{\mathcal{H}(x)}$ . Comme  $F_x$  est un  $G_{\mathcal{H}(x)}$ -module flasque, on en déduit que  $(\phi^*F)_y$  est un  $G_{\mathcal{H}(y)}$ -module flasque.

Montrons maintenant que la restriction de  $\phi^*F$  à la topologie usuelle de  $|Y|$  est mou. D'après 10.42 et le fait que  $|Y|$  est localement paracompact (par 9.23), on peut supposer que  $Y = V_1 \cup \dots \cup V_n$  où  $V_i$  sont des domaines affinoïdes dans  $Y$  et pour chaque  $i$  on peut identifier  $V_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique paracompact  $U_i$ , tel que  $U_i$  est étale sur  $X$ . Par définition d'un faisceau mou la restriction de  $F$  à  $|U_i|$  est mou, et donc 10.42 implique que la restriction de  $F$  à  $|V_i|$  est mou car  $|V_i|$  est un fermé de  $|U_i|$ . Cela donne que la restriction de  $\phi^*F$  à la topologie usuelle de  $|Y|$  est mou.

- (ii) Soit  $Z \rightarrow \bar{X}$  un morphisme étale. Comme la propriété d'être mou est locale, d'après [Ber2] 3.2.2 on peut supposer que  $Z = \bar{Y}$  où  $Y$  est un espace analytique paracompact, localement compact étale sur  $X$ . Il suffit de vérifier donc que pour tout sous-espace compact  $T \subset \bar{Y}$  l'application  $F(\bar{Y}) \rightarrow F(T)$  est surjective (par 10.42). Cela découle de [Ber2] 5.3.5.  $\square$

## 10.5 Théorème de comparaison

Soit  $X$  est un espace analytique. Rappelons qu'on a noté  $\mu$  le morphisme  $X_{q\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$ . Il induit le morphisme  $\mu^* : X_{\text{ét}} \tilde{\rightarrow} X_{q\text{ét}} \tilde{\rightarrow}$ .

**Théorème 10.48.** Soit  $f : U \rightarrow X$  un morphisme quasi-étale, soit  $F$  un faisceau étale sur  $X$ . Alors

- (i)  $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^*F(U)$ , où  $f^*$  est un morphisme d'image inverse  $X_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} U_{\text{ét}}$  ;
- (ii) si  $F$  est un faisceau de groupes abéliens, alors  $H^q(U, f^*F) \xrightarrow{\sim} H^q(U_{\text{qét}}, \mu^*F)$ ,  $q \geq 0$ .

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème on procède par plusieurs étapes.

*Étape 1.* Considérons un préfaisceau sur  $X_{\text{qét}}$  qui à chaque morphisme quasi-étale  $V \xrightarrow{g} X$  associe  $g^*F(V)$ .

**Lemme 10.49.** Le préfaisceau  $V \mapsto g^*F(V)$  est un faisceau sur  $X_{\text{qét}}$ .

*Démonstration.* Soit  $f : U \rightarrow X$  un morphisme quasi-étale. Soit  $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ ,  $g_i$  sont quasi-étales. Posons  $f_i = f \circ g_i : U_i \rightarrow U \rightarrow X$  et  $f_{ij}$  les morphismes  $U_{ij} \rightarrow U \rightarrow X$ ,  $U_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} U_i \times_U U_j$ . Il s'agit de vérifier que la suite

$$(f^*F(U)) \rightarrow \prod_i (f_i^*F(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f_{ij}^*F(U_{ij})$$

est exacte.

Supposons d'abord que  $U$  est un espace affinoïde. Comme  $g_i$  sont quasi-étales, on peut supposer (quitte à raffiner le recouvrement) que la famille  $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i \in I}$  est finie et pour chaque  $i$  on peut identifier  $U_i$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique  $V_i$  séparé et étale sur  $U$ . Notons que si  $\mathcal{U}_i$  est un voisinage ouvert de  $U_i$  dans  $V_i$  alors le morphisme  $\mathcal{U}_i \rightarrow U$  (i.e. le morphisme  $\mathcal{U}_i \rightarrow V_i \rightarrow U$ ) est étale. Comme  $F$  est un faisceau étale, on a une suite exacte

$$(f^*F(U)) \rightarrow \prod_i (f^*F(\mathcal{U}_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f^*F(\mathcal{U}_{ij}),$$

où  $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_i \times_U \mathcal{U}_j$ . Par [Ber2] 4.3.5(1) on a que  $f_i^*F(U_i) = \varinjlim f^*F(\mathcal{U}_i)$  et  $f_{ij}^*F(U_{ij}) = \varinjlim f^*F(\mathcal{U}_{ij})$  quand  $\mathcal{U}_i \rightarrow U$ . Donc la suite  $(f^*F(U)) \rightarrow \prod_i (f_i^*F(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} f_{ij}^*F(U_{ij})$  est exacte comme la limite inductive filtrant des suites exactes.

Dans le cas général on peut supposer que  $U$  est paracompact (d'après 9.23 et le fait que l'inclusion d'un ouvert dans l'espace analytique est étale). Ensuite, comme  $g_i$  sont quasi-étales et l'assertion est vérifiée pour un espace affinoïde, on peut supposer que  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  est un recouvrement localement fini par des domaines affinoïdes.

Comme les domaines affinoïdes sont fermés (cf. 9.27), dans ce cas le résultat découle de [Ber2] 4.3 et [God] II.1.3.1 (qui dit que si  $F$  est un faisceau sur  $X$  et  $M_i$  est un recouvrement fermé localement fini de  $X$  alors la suite  $F(X) \rightarrow \prod_i (F(M_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(M_i \cap M_j)$  est exacte). □

*Étape 2.*

**Lemme 10.50.** Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme étale d'espaces analytiques avec  $X$  une espace de Hausdorff. Soit  $C$  un compact dans  $Y$ . Supposons que  $\phi$  est injective sur  $C$  et pour tout  $y \in Y$  on a un isomorphisme  $\mathcal{H}(\phi(y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y)$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $C$  dans  $Y$  tel que  $\phi$  induit un isomorphisme  $V \xrightarrow{\sim} \phi(V)$ .

*Démonstration.* D'après 10.33  $\phi$  est un isomorphisme local en tout point  $y \in C$ . On peut donc supposer que  $\phi$  est un isomorphisme local en tout point  $y \in Y$ . Pour conclure il suffit donc de trouver un voisinage  $V$  de  $C$  dans  $Y$  tel que  $\phi$  est injective sur  $V$ . Par la compacité on trouve des ouverts  $V_1, \dots, V_n \subset Y$ , telles que  $V_i \xrightarrow{\sim} \phi(V_i)$  et  $C \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ . Par récurrence il suffit de considérer le cas  $n = 2$  (i.e. de construire  $V$  au cas où  $n = 2$ ).

Comme  $X$  est de Hausdorff, alors l'image de  $|X|$  par le morphisme  $\delta : |X| \rightarrow |X| \times |X|$  est fermée. Soit  $h = (\phi, \phi)$  le morphisme  $|Y| \times |Y| \rightarrow |X| \times |X|$ . On a donc  $\{(y_1, y_2) \mid \phi(y_1) = \phi(y_2)\} = |Y| \times_{|X|} |Y| = h^{-1}(\delta(|X|))$  est fermé dans  $|Y| \times |Y|$ . Alors son complémentaire  $W$  est ouvert. Comme  $\phi$  est injective sur  $C$ ,  $W \supset \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in C \setminus V_1, y_2 \in C \setminus V_2\}$ . Il existe donc des voisinages  $C \setminus V_1 \subset W_1 \subset V_1$  et  $C \setminus V_2 \subset W_2 \subset V_2$  tels que  $|W_1| \times |W_2|$  ne rencontre pas  $|Y| \times_{|X|} |Y| = \{(y_1, y_2) \mid \phi(y_1) = \phi(y_2)\}$ , i.e.  $\phi$  est injective sur  $W_1 \cup W_2$ . De plus,  $\phi$  est injective sur  $W_1 \cup (V_1 \cap V_2)$ , car  $W_1 \cup (V_1 \cap V_2) \subset V_1$ . De même,  $\phi$  est injective sur  $W_2 \cup (V_1 \cap V_2)$ . Alors l'ouvert  $V = W_1 \cup W_2 \cup (V_1 \cap V_2)$  est un ouvert cherché : il contient  $C$  et  $\phi$  est injective sur  $V$ .  $\square$

*Étape 3.*

**Lemme 10.51.** *Soit  $(U \xrightarrow{f} X) \in Q\acute{e}t(X)$ . Alors il existe un recouvrement  $(U_i \xrightarrow{g_i} U)_{i \in I}$  de  $U \rightarrow X$  dans  $X_{q\acute{e}t}$  tel que  $(fg_i)^*F(U_i) \xrightarrow{\sim} (\mu^*F)(U_i)$  pour tout  $i \in I$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu^p F$  un préfaisceau sur  $X_{q\acute{e}t}$  défini par  $U \mapsto \varinjlim F(Y)$  où l'on prend la limite sur tous les  $X$ -morphisms  $U \rightarrow Y$  où  $Y$  est étale sur  $\bar{X}$ . Par définition de faisceau  $\mu^*F$ , il est un faisceau associé à  $\mu^p$ . Pour conclure il suffit donc de montrer que  $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^p F(U)$  pour tout  $U \xrightarrow{f} X$  tel que  $U$  est affinoïde et l'on peut identifier  $U$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique  $\mathcal{V}$  séparé et étale sur  $X$  (on obtient ainsi un recouvrement cherché).

Par [Ber2] 4.3 on a  $f^*F(U) = \varinjlim F(V)$  où  $V$  parcourt les voisinages ouverts de  $U$  dans  $\mathcal{V}$ . Pour montrer que  $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^p F(U)$  il suffit donc de montrer que chaque  $X$ -morphisme  $U \rightarrow Y$  avec  $Y \rightarrow X$  étale s'étend à un  $X$ -morphisme  $\mathcal{U} \rightarrow Y$  où  $\mathcal{U}$  est un voisinage de  $U$  dans  $\mathcal{V}$ .

Pour cela notons que le morphisme  $pr_2 : Y \times_X \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  vérifie les conditions du lemme de l'étape précédent, où l'on prend  $C$  l'image de  $U$  dans  $Y \times_X \mathcal{V}$  (le morphisme  $U \rightarrow Y \times_X \mathcal{V}$  vient de  $X$ -morphisms  $U \rightarrow Y$  et  $U \rightarrow \mathcal{V}$ , les conditions du lemme 10.50 sont vérifiées car  $U$  est un domaine affinoïde dans  $\mathcal{V}$ ). Donc il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $C$  dans  $Y \times_X \mathcal{V}$  tel que  $W \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} pr_2(W)$ . On a donc un  $X$ -morphisme  $\mathcal{U} \rightarrow Y$  qui vient de morphisme  $W \rightarrow Y \times_X \mathcal{V} \rightarrow Y$ . Le morphisme  $\mathcal{U} \rightarrow Y$  prolonge le morphisme  $U \rightarrow Y$  et  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $U$  dans  $\mathcal{V}$ . Cela fini la preuve du lemme.  $\square$

*Étape 4.* Les étapes 1 et 3 impliquent l'assertion (i) du théorème. Notons cependant que le fait que  $f^p F(U) = \mu^p(U) = \varinjlim F(V)$ , où l'on prend la limite sur tous  $X$ -morphisms  $U \rightarrow V$  avec  $V \rightarrow X$  étale, n'implique pas directement (i) car  $f^*F$  est un faisceau sur  $U_{\acute{e}t}$  mais  $\mu^*F$  est un faisceau sur  $U_{q\acute{e}t}$ .

*Étape 5.* Démontrons maintenant l'assertion (ii). Notons d'abord qu'un recouvrement de  $U$  par des ouverts est un recouvrement pour la topologie étale et pour la topologie quasi-étale. Soit  $\mathcal{V}$  un tel recouvrement. Par [SGA4] V.3.3 il induit donc les suites spectrales de Leray  $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(f^*F)) \implies H^{p+q}(U_{\acute{e}t}, f^*F)$  et  $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(\mu^*F)) \implies H^{p+q}(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F)$ , où  $\mathcal{H}^q(f^*F)$  (resp.  $\mathcal{H}^q(\mu^*F)$ ) désigne le faisceau associé au préfaisceau  $V \mapsto H^q(V_{\acute{e}t}, f^*F|_V)$  (resp.  $V \mapsto H^q(V_{q\acute{e}t}, \mu^*F|_V)$ ), les  $\check{H}^\bullet$  désignent les groupes de cohomologie de Čech associés au recouvrement  $\mathcal{V}$ . On peut donc supposer que  $U$  est suffisamment petit et donc qu'il est paracompact (par 9.23).

Ensuite, considérons un recouvrement  $\mathcal{W}$  de  $U$  par des domaines affinoïdes. Comme  $U$  est paracompact, on peut supposer qu'il est localement fini. Ce recouvrement est un recouvrement de  $U$  pour la topologie quasi-étale. Il induit donc la suite spectrale de Leray qui converge vers  $\check{H}^\bullet(U_{q\acute{e}t}, \mu^*F)$ . Par [Ber2] 4.3.7 on a aussi la suite spectrale pour la topologie étale  $\check{H}^p(\mathcal{W}, \mathcal{H}^q(f^*F)) \implies H^{p+q}(U_{\acute{e}t}, f^*F)$ . Pour conclure il suffit donc de montrer l'assertion au cas où  $U$  est affinoïde et l'on peut l'identifier  $U$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique paracompact  $V$  étale sur  $X$ .

Notons que l'assertion est vrai au cas  $q = 0$  par (i). Considérons la résolution injective  $F \rightarrow I^\bullet$  du faisceau  $F$  sur  $X_{\text{ét}}$ . On a donc les résolutions  $f^*F \rightarrow fI^\bullet$  et  $\mu^*F \rightarrow \mu^*I^\bullet$ . Comme un faisceau injectif est mou, les  $f^*I^j$  sont moux par 10.46. Comme  $U$  est paracompact,  $f^*I^j$  sont acycliques et donc on peut calculer la cohomologie de  $H^q(U, f^*F)$  comme les groupes de cohomologie du complexe  $f^*I^\bullet(U)$ . Par (i) ce complexe coïncide avec le complexe  $\mu^*I^\bullet(U)$ . Pour conclure il suffit donc de démontrer que l'on peut calculer les groupes de cohomologie  $H^q(U_{q\text{ét}}, \mu^*F)$  à l'aide de la résolution  $\mu^*F \rightarrow \mu^*I^\bullet$ . Pour cela il suffit de montrer que les  $\mu^*I^j$  sont acycliques.

Montrons alors que si  $F$  est injective alors  $H^q(U_{q\text{ét}}, \mu^*F) = 0$ ,  $q \geq 1$ . Pour cela utilisons la cohomologie de Čech. Si on a un recouvrement quasi-étale de  $U$ , alors on peut le raffiner en recouvrement fini  $\mathcal{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ , où pour chaque  $i$ ,  $U_i$  est affinoïde et on peut l'identifier avec un domaine affinoïde dans un espace analytique  $V_i$  étale sur  $U$ . Pour montrer que  $H^q(U_{q\text{ét}}, \mu^*F) = 0$ ,  $q \geq 1$  il suffit donc de montrer que  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mu^*F) = 0$ ,  $q \geq 1$ . Considérons le complexe de Čech  $C^\bullet(\mathcal{U}, F)$  correspondant.

Rappelons que l'on peut identifier  $U$  avec un domaine affinoïde dans un espace analytique paracompact  $V$  qui est étale sur  $X$ . Soient  $\mathcal{V}_i$  des voisinages de  $U_i$  dans  $V$ ,  $i \in I$ . Quitte à changer  $V$  par l'union de  $\mathcal{V}_i$ , on peut supposer que  $\mathcal{V}_i \rightarrow V$  est un recouvrement étale de  $V$ . Or  $V$  est étale sur  $X$ ,  $F|_V$  est injectif, donc le complexe de Čech  $C^\bullet(\mathcal{V}, F)$  associé à un recouvrement  $\mathcal{V}$  de  $V$  est exact. Le complexe  $C^\bullet(\mathcal{U}, F)$  est donc exact aussi comme la limite inductive filtrant de complexes exacts  $C^\bullet(\mathcal{V}, F)$  (quand  $\mathcal{V}_i \rightarrow U_i$ ). Cela montre que si  $F$  est injective alors  $H^q(U_{q\text{ét}}, \mu^*F) = 0$ ,  $q \geq 1$ , ce qui finit la preuve du théorème.  $\square$

Passons à quelques conséquences de ce théorème.

**Corollaire 10.52.** *Soit  $F \in X_{\text{ét}}^\sim$ . Alors*

- (i)  $F \xrightarrow{\sim} \mu_*\mu^*F$  ;
- (ii) le foncteur  $\mu^* : X_{\text{ét}}^\sim \rightarrow X_{q\text{ét}}^\sim$  est pleinement fidèle.

*Démonstration.* (i) Soit  $(U \xrightarrow{f} X) \in \text{Ét}(X)$ . Alors  $f^*F(U) = F(U)$ . D'autre part,  $f^*F(U) \xrightarrow{\sim} \mu^*F(U) = \mu_*\mu^*F(U)$ , car le morphisme  $\mu_* : X_{q\text{ét}}^\sim \rightarrow X_{\text{ét}}^\sim$  est le morphisme de restriction. On a donc  $F \xrightarrow{\sim} \mu_*\mu^*F$ . Pour démontrer (ii) écrivons l'égalité obtenue par adjonction :  $\text{Hom}(\mu^*F, \mu^*G) \simeq \text{Hom}(F, \mu_*\mu^*G) \simeq \text{Hom}(F, G)$ .  $\square$

**Corollaire 10.53.** *Soit  $X$  un espace analytiques. Soit  $F$  un faisceau étale abélien sur  $X$ . Pour  $q \geq 0$  on note  $\mathcal{H}^q(F)$  le faisceau associé au préfaisceau  $V \mapsto H^q(V, F|_V)$  sur  $X_{q\text{ét}}$  où  $F|_V$  désigne le faisceau  $f^*F$  pour  $V \xrightarrow{f} X$  quasi-étale. Soit  $\mathcal{V} = (V_i \rightarrow X)_{i \in I}$  un recouvrement quasi-étale. Alors il existe une suite spectrale  $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(F)) \implies H^{p+q}(X_{\text{ét}}, F)$ .*

*Démonstration.* L'assertion découle de l'existence de la suite spectrale de Leray et de (ii) du théorème (i.e.  $\check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(F)) \simeq \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(\mu^*F)) \implies H^{p+q}(X_{q\text{ét}}, \mu^*F) \simeq H^{p+q}(X_{\text{ét}}, F)$ ).  $\square$

**Corollaire 10.54.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme compact d'espaces analytiques, soit  $F$  un faisceau étale sur  $Y$ . Alors  $\mu^*(\phi_*F) \xrightarrow{\sim} \phi_*(\mu^*F)$ . Si  $F$  un faisceau étale abélien sur  $Y$ , alors  $\mu^*(R^q\phi_*F) \xrightarrow{\sim} R^q\phi_*(\mu^*F)$ ,  $q \geq 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme quasi-étale. D'après le théorème on a  $\mu^*\phi_*F(X') = f^*\phi_*F(X')$ .

Comme  $\phi$  est compact,  $f^*\phi_*F(X') \xrightarrow{\sim} \phi'_*(f'^*F)(X')$ , où  $\phi'$  est un morphisme induit  $Y' := Y \times_X X' \rightarrow X'$  et  $f'$  est un morphisme  $Y \times_X X' \rightarrow Y$ . En effet, si  $f$  est étale, alors  $f^*\phi_*F(X') = \phi_*F(X') = F(Y \times_X X')$ ,  $\phi'_*f'^*F(X') = \phi'_*F(X') = F(Y \times_X X')$ ,

d'où on obtient le résultat. Dans le cas général, d'après l'étape 1 on peut supposer que  $X'$  est un domaine affinoïde dans l'espace analytique  $\mathcal{X}'$  étale sur  $X$  :

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_X X' & \longrightarrow & Y \times_X \mathcal{X}' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & \mathcal{X}' & \longrightarrow & X \end{array}$$

D'après [Ber2] 4.3.6 on a donc  $f^* \phi_* F(X') = \varinjlim F(\mathcal{U} \times_X Y)$  où  $\mathcal{U}$  parcourt les voisinages ouverts de  $X'$  dans  $\mathcal{X}'$ . Comme  $\phi$  est compact,  $\phi'$  et  $\phi'' : Y \times_X \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$  le sont aussi, donc  $\phi'_*(f'^* F)(X') = (f'^* F)(Y \times_X X') = \varinjlim F(\mathcal{U} \times_X Y)$  d'après [Ber2] 4.3.6 encore. On a donc  $f^* \phi_* F(X') \xrightarrow{\sim} \phi'_*(f'^* F)(X')$ . On obtient donc  $\mu^* \phi_* F(X') \xrightarrow{\sim} f'^* F(Y \times_X X') \xrightarrow{\sim} \mu^* F(Y \times_X X') = \phi_* \mu^* F(X')$ .

De même comme dans la preuve du théorème, pour démontrer le reste il suffit de voir que si  $F$  un faisceau abélien injectif, alors  $R^q \phi_*(\mu^* F) = 0$ ,  $q \geq 1$ . Cela découle de la preuve de (ii) du théorème.  $\square$

## 11 Foncteur de cycles évanescents

### 11.1 Construction et propriétés basiques

Soit  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$ . Soit  $\sigma : \mathfrak{Z}_s \mapsto \mathfrak{Z}$  l'inverse du foncteur de la catégorie des schémas formels étales sur  $\mathfrak{X}$  vers la catégorie des schémas étales sur  $\mathfrak{X}_s$  de 10.7. Ce dernier est une équivalence, donc  $\sigma$  est bien défini.

**Lemme 11.1.** *La composition de  $\sigma$  avec un foncteur  $\mathfrak{Z} \mapsto \mathfrak{Z}_\eta$  défini un morphisme de sites  $\nu : \mathfrak{X}_{\eta, \text{qét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{s, \text{ét}}$ ,  $\mathfrak{Z}_s \mapsto \mathfrak{Z}_\eta$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de vérifier que

- (i) si  $\phi : \mathfrak{Z}_s \rightarrow \mathfrak{X}_s$  est étale, alors  $\nu(\phi) : \mathfrak{Z}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est quasi-étale.
- (ii) Si  $(\mathfrak{Z}_{s,i} \xrightarrow{f_{s,i}} \mathfrak{Z}_s)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $\mathfrak{Z}_s$ , i.e.  $\bigcup_i f_{s,i}(\mathfrak{Z}_{s,i}) = \mathfrak{Z}_s$ , alors  $\bigcup_i f_{\eta,i}(\mathfrak{Z}_{\eta,i}) = \mathfrak{Z}_\eta$ .

On voit que (i) découle de 10.37 et (ii) découle de 10.9.  $\square$

On obtient ainsi un foncteur  $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \nu_* \mu^* : \mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}} \sim \rightarrow \mathfrak{X}_{\eta, \text{qét}} \sim \rightarrow \mathfrak{X}_{s, \text{ét}}$ , qui est exacte à gauche (car  $\nu_*$  est exacte à gauche et  $\mu^*$  est exacte, cf. [Ka] 17.5.2). Pour un corps  $K$  on note  $\Theta_K$  le foncteur obtenu de la même manière.

Si  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme d'espaces analytiques et  $F$  un faisceau sur  $X$  on note  $F(Y)$  (resp.  $H^q(Y, F)$ ) pour  $f^*F(Y)$  (resp.  $H^q(Y, f^*F)$ ).

**Proposition 11.2.** *Soit  $F$  un faisceau étale sur  $\mathfrak{X}_\eta$ .*

- (i) *Si  $\mathfrak{Z}_s$  est étale sur  $\mathfrak{X}_s$ , alors  $\Theta(F)(\mathfrak{Z}_s) = F(\mathfrak{Z}_\eta)$ .*
- (ii) *Si  $F$  est un faisceau de groupes abéliens, alors  $R^q\Theta(F)$  est associé au préfaisceau  $\mathfrak{Z}_s \mapsto H^q(\mathfrak{Z}_\eta, F)$ .*
- (iii) *Si  $F$  est un faisceau mou de groupes abéliens, alors  $\Theta(F)$  est flasque.*
- (iv) *Si  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale dans  $k\text{-Fsch}$   $F$  est un faisceau de groupes abéliens, alors  $R^q\Theta(F)|_{\mathfrak{Z}_s} \xrightarrow{\sim} R^q\Theta(F)|_{\mathfrak{Z}_\eta}$ .*
- (v) *Si  $F$  est un faisceau de groupes abéliens, alors il existe une suite spectrale  $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_s, R^q\Theta(F)) \implies H^{p+q}(\mathfrak{X}_\eta, F)$ .*

*Démonstration.* (i) Par construction de  $\nu$  on a  $\Theta(F)(\mathfrak{Z}_s) = \nu_* \mu^*(F)(\mathfrak{Z}_s) = \mu^*(F)(\mathfrak{Z}_\eta) =$  [par 10.48]  $= F(\mathfrak{Z}_\eta)$

(ii) D'après [SGA4] V.5.1.1 le faisceau  $R^q\Theta(F) = R^q\nu_* \mu^*(F)$  est associé au préfaisceau  $\mathfrak{Z}_s \mapsto H^q(\mathfrak{Z}_{\eta, \text{qét}}, \mu^*F) = H^q(\mathfrak{Z}_\eta, F)$  par 10.48.

(iii) Par 9.18 il faut montrer que  $\check{H}^q(\mathcal{V}, \Theta(F)) = 0$ ,  $q \geq 1$  pour un recouvrement étale  $\mathcal{V} = (\mathfrak{Z}_{s,i} \rightarrow \mathfrak{Z}_s)_{i \in I}$  dans  $\mathfrak{X}_{s, \text{ét}}$ . Par (i)  $\check{H}^q(\mathcal{V}, \Theta(F)) = \check{H}^q(\mathcal{V}_\eta, F)$  où  $\mathcal{V}_\eta$  est un recouvrement quasi-étale  $(\mathfrak{Z}_{\eta,i} \rightarrow \mathfrak{Z}_\eta)$ . D'après 10.53 on a une suite spectrale  $\check{H}^p(\mathcal{V}_\eta, \mathcal{H}^q(F)) \implies H^{p+q}(\mathfrak{Z}_\eta, F)$ , ce qui implique que  $\check{H}^p(\mathcal{V}_\eta, F) = H^p(\mathfrak{Z}_\eta, F)$ , puisque  $\mathfrak{Z}_{\eta,i}$  sont paracompacts par construction et donc  $\mathcal{H}^q(F) = 0$ ,  $q \geq 1$  par 10.46. Comme  $\mathfrak{Z}_\eta$  est paracompact aussi,  $H^p(\mathfrak{Z}_\eta, F) = 0$  d'après 10.46 encore et on obtient ainsi (iii).

(iv) Cela découle directement de (ii).

(v) Comme  $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \nu_* \mu^*$ , on a une suite spectrale  $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_s, R^q\Theta(F)) \implies H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\eta, \text{qét}}, \mu^*F)$ . D'après 10.48(ii)  $H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\eta, \text{qét}}, \mu^*F) = H^{p+q}(\mathfrak{X}_\eta, F)$ , le résultat en découle.  $\square$

Définissons maintenant le foncteur de cycles évanescents. Soit  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$ . Notons  $\bar{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X} \hat{\otimes} (\hat{k}^s)$ . C'est un schéma formel sur  $(\hat{k}^s)$ , où  $k^s$  désigne la clôture séparable de  $k$ . Notons  $\bar{\mathfrak{X}}_s = \mathfrak{X}_s \otimes \hat{k}^s$  sa fibre spéciale,  $\bar{\mathfrak{X}}_\eta = \mathfrak{X}_\eta \hat{\otimes} \hat{k}^s$  la fibre générique. Soit  $F$  un faisceau étale sur  $\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}}$ . Notons  $\bar{F} \in \mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}$  l'image inverse de  $F$  (on a le morphisme

$\text{Cat } \mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}} \rightarrow \text{Cat } \mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}}$  qui vient d'un morphisme  $(U \rightarrow \mathfrak{X}_{\eta}) \mapsto (U \hat{\otimes} \hat{k}^s \rightarrow \mathfrak{X}_{\bar{\eta}})$ .

**Définition 11.3.** *Le foncteur de cycles évanescents  $\Psi_{\eta} : \mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}} \widetilde{\rightarrow} \mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}} \widetilde{\rightarrow}$  est le foncteur  $F \mapsto \Psi_{\eta}(F) = \Theta_{\hat{k}^s}(\bar{F})$ .*

Introduisons quelques notations. Soit  $K$  un corps sur  $k$ , on suppose que la valuation de  $K$  prolonge la valuation de  $k$ . On note  $\mathfrak{X}_{s_K}$  et  $\mathfrak{X}_{\eta_K}$  la fibre spéciale et la fibre générique respectivement du schéma formel  $\mathfrak{X}_K = \mathfrak{X} \hat{\otimes}_k \hat{K}$  sur  $\hat{K}$  (on a  $\mathfrak{X}_{s_K} = \mathfrak{X}_s \otimes \hat{K}$  et  $\mathfrak{X}_{\eta_K} = \mathfrak{X}_{\eta} \hat{\otimes} \hat{K}$ ). Si  $F$  est un faisceau sur  $\mathfrak{X}_{\eta}$ , on note  $F_K$  l'image inverse de  $F$  sur  $\mathfrak{X}_{\eta_K}$ .

Posons  $G_{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} G(k^s/k)$  le groupe de Galois de l'extension  $k^s/k$ ,  $G_s \stackrel{\text{def}}{=} G(\bar{k}^s/\bar{k})$ . Le groupe  $G_{\eta}$  agit (à gauche) sur  $\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}}$  par transport de structure. Cette action induit l'action de  $G_{\eta}$  sur  $\bar{F}$ . Plus précisément, si  $g \in G_{\eta}$ , on pose  $g.\bar{F}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}(g.U)$ , où  $U \rightarrow \mathfrak{X}_{\eta}$  est étale. Cette action induit l'action de  $G_{\eta}$  sur  $\Psi_{\eta}(F) = \Theta_{\hat{k}^s}(\bar{F})$  compatible avec l'action de  $G_s$  sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  (ou l'on voit  $G_s$  comme un quotient de  $G_{\eta}$  d'après [Ber2] 2.4.4), i.e. si  $g \in G_{\eta}$  et  $\tilde{g} \in G_s$  un élément correspondant, on a  $g.\Psi_{\eta}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_{\hat{k}^s}(g.\bar{F}) = \tilde{g}.\Psi_{\eta}(F)$ , où on pose  $\tilde{g}.\Psi_{\eta}(F)(U) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{\eta}(F)(\tilde{g}.U)$  pour  $U \rightarrow \mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  étale.

**Définition 11.4.** Soit  $G$  un groupe profini qui agit sur un faisceau  $F \in \mathfrak{X}_{\bar{\eta}, \text{ét}} \widetilde{\rightarrow}$ . On dit que l'action de  $G$  est *continue* si pour tout  $\mathfrak{U}_s$  quasi-compact et étale sur  $\mathfrak{X}_s$  le groupe  $G$  agit continûment sur l'ensemble discret  $F(\mathfrak{U}_{\bar{s}})$ , i.e. l'application  $G \times F(\mathfrak{U}_{\bar{s}}) \rightarrow F(\mathfrak{U}_{\bar{s}})$  est continue (cf.[SGA7]).

**Remarque 11.5.** On appelle *groupe profini* un groupe topologique qui est limite projective de groupes finis (munis chacun de la topologie discrète). Par exemple, si  $K$  est un corps, alors le groupe de Galois  $G(K^s/K)$  est profini, car par construction c'est la limite projective des groupes de Galois  $G(L_i/K)$  des extensions galoisiennes finies  $L_i/K$  continues dans  $K^s/K$ .

**Lemme 11.6.** *Soit  $F$  un faisceau étale abélien sur  $\mathfrak{X}_{\eta}$ . Alors  $\Psi_{\eta}(F) = \varinjlim_{\bar{i}_K} \bar{i}_K^*(\Theta_K(F_K))$  où l'on prend la limite sur toutes sous-extensions finies de  $k^s/k$  et  $\bar{i}_K$  désigne le morphisme canonique  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathfrak{X}_{s_K}$ . En particulier, l'action de  $G_{\eta}$  sur  $\Psi_{\eta}(F)$  est continue.*

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{U}_s$  quasi-compact et étale sur  $\mathfrak{X}_s$ . Alors l'espace analytique  $\mathfrak{U}_{\eta}$  est compact, donc  $F(\mathfrak{U}_{\eta} \hat{\otimes} \hat{k}^s) = \varinjlim F(\mathfrak{U}_{\eta} \hat{\otimes} K)$  par [Ber2] 5.3.4, ce qui donne le résultat car pour tout schéma étale sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  il existe un recouvrement étale par des schémas  $\mathfrak{U}_{\bar{s}}$ , où  $\mathfrak{U}_s$  est affine (et donc quasi-compact) et étale sur  $\mathfrak{X}_s$ . L'action de  $G_{\eta}$  sur  $\Psi_{\eta}(F)$  est continue, car  $G_{\eta}$  agit sur  $\bar{i}_K^*(\Theta_K(F_K))$  via  $\text{Gal}(K/k)$ .  $\square$

On obtient ainsi que  $\Psi_{\eta}$  est un foncteur de la catégorie  $\mathfrak{X}_{\eta, \text{ét}} \widetilde{\rightarrow}$  vers la catégorie des  $G_{\eta}$ -faisceaux étales sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  (i.e. la catégorie des faisceaux étales sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$  munis d'une action continue de  $G_{\eta}$ , compatible avec l'action de  $G_s$  sur  $\mathfrak{X}_s$ ). Notons  $S_{G_{\eta}}(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}})$  la catégorie des  $G_{\eta}$ -faisceaux étales de groupes abéliens sur  $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$ . Alors  $\Psi_{\eta}$  définit un foncteur  $S(\mathfrak{X}_{\eta}) \rightarrow S_{G_{\eta}}(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}})$ , ce qui donne les foncteurs dérivés  $R^q \Psi_{\eta} : S(\mathfrak{X}_{\eta}) \rightarrow S_{G_{\eta}}(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}})$ .

**Proposition 11.7.** *Soit  $F$  un faisceau étale de groupes abéliens sur  $\mathfrak{X}_{\eta}$ . Alors*

- (i)  $R^q \Psi_{\eta}(F) = \varinjlim R^q(\Theta_K(F_K))$  où l'on prend la limite sur tous sous-extensions finies de  $k^s/k$ ;
- (ii) si  $F$  est mou alors le faisceau  $\Psi_{\eta}(F)$  est flasque;
- (iii) si  $\phi : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale dans  $k$ -Fsch, alors  $R^q \Psi_{\eta}(F)|_{\mathfrak{Z}_{\bar{s}}} \widetilde{\simeq} R^q \Psi_{\eta}(F)|_{\mathfrak{Z}_{\eta}}$ ,  $q \geq 0$ ;
- (iv) il existe une suite spectrale  $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}, R^q \Psi_{\eta}(F)) \implies H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}, F)$ .



*Démonstration.* D'après [Ber2] 5.3.5.  $H_c^q(F(\mathfrak{U}_\eta \hat{\otimes} \hat{k}^s)) = \varinjlim H_c^q(F(\mathfrak{U}_\eta \hat{\otimes} K))$  pour  $\mathfrak{U}_s$  quasi-compact et étale sur  $\mathfrak{X}_s$ . On montre donc (i) par le même procédé comme dans le lemme ci-dessus. Si  $F$  est mou, alors  $\overline{F}$  l'est aussi par 10.42, donc (ii) découle de 11.2(ii). On vérifie (iii) et (iv) de même comme dans de 11.2.  $\square$

Soit  $\mathfrak{X} \in k\text{-Fsch}$ . Dans la suite de ce paragraphe on suppose que le morphisme canonique  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$  se factorise en  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{T} \rightarrow \mathrm{Spf}(k)$ , où  $\mathfrak{T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Spf}(k\langle S \rangle)$  est la completion formelle de la droite affine (8.55). Introduisons quelques notations.

- $t \in \mathfrak{T}_\eta$  est le point correspondant à la norme sur  $k\langle S \rangle$  (la norme est donnée par le maximum des valuations de coefficients).
- $s' \stackrel{\mathrm{def}}{=}} \pi(t)$ , i.e.  $s'$  est le point générique de  $\mathfrak{T}_s = \tilde{k}[S]$ .
- $\mathcal{H}(t)$  est le corps résiduel complété correspondant à  $t$ . On a alors un morphisme canonique  $\mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t)) \rightarrow \mathrm{Spf}(k\langle S \rangle)$ . Par [Ber1] 2.4.4(ii) on a  $\pi^{-1}(s') = t$  et  $\widetilde{\mathcal{H}(t)} = \tilde{k}(S) = k(s')$ , où  $\tilde{k}(S)$  est le corps de fractions de  $\tilde{k}[S]$ .
- $\mathfrak{X}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{T}} \mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t)) = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(k\langle S \rangle)} \mathrm{Spf}(\mathcal{H}(t))$ . On a  $\mathfrak{X}' \in \mathcal{H}(t)\text{-Fsch}$ .
- $\mathfrak{X}'_{s'}$  est la fibre spéciale de  $\mathfrak{X}'$ , on voit que  $\mathfrak{X}'_{s'} = \mathfrak{X}_s \times_{\mathfrak{T}_s} \tilde{k}(S) = (\mathfrak{X}_s)_{s'}$  est la fibre du morphisme  $\mathfrak{X}_s \rightarrow \mathfrak{T}_s$  en point  $s$  (le morphisme  $\mathfrak{X}_s \rightarrow \mathfrak{T}_s$  vient du morphisme  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{T}$ ).
- $\mathfrak{X}'_{\eta'}$  est la fibre générique de  $\mathfrak{X}'$ , on voit que  $\mathfrak{X}'_{\eta'} = \mathfrak{X}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathcal{H}(t) = (\mathfrak{X}_\eta)_t$  est la fibre du morphisme  $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{T}_\eta$  en point  $t$ .
- $\Theta'$  est le foncteur  $\mathfrak{X}'_{\eta', \acute{e}t} \tilde{\rightarrow} \mathfrak{X}'_{\eta', q\acute{e}t} \tilde{\rightarrow} \mathfrak{X}'_{s', \acute{e}t} \tilde{\rightarrow}$ .
- $\Psi_{\eta'}$  est le foncteur de cycles évanescents  $F \mapsto \Theta_{\overline{\mathcal{H}(t)^s}}(F)$ .
- $\lambda : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  est le morphisme canonique, il induit les morphismes  $\lambda_s : \mathfrak{X}'_{s'} \rightarrow \mathfrak{X}_s$  et  $\lambda_\eta : \mathfrak{X}'_{\eta'} \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$ .
- Si  $F$  est un faisceau étale sur  $\mathfrak{X}_\eta$ , on pose  $F' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda_\eta^* F \in \mathfrak{X}'_{\eta', \acute{e}t}$ .
- $\lambda_{\bar{s}} : \mathfrak{X}'_{s'} = (\mathfrak{X}_s)_{s'} \rightarrow \mathfrak{X}_{\bar{s}}$  est le morphisme induit par l'inclusion  $k^s \hookrightarrow \mathcal{H}(t)^s$ .

**Proposition 11.8.** *Soit  $F$  un faisceau étale de groupes abéliens sur  $\mathfrak{X}_\eta$ . Soit  $q \geq 0$ . Alors il existe un isomorphisme canonique  $\lambda_s^*(R^q\Theta(F)) \xrightarrow{\sim} R^q\Theta'(F')$ .*

*Démonstration.* De la même manière comme dans 10.46 on voit que si  $F$  est un faisceau mou, alors  $\lambda_\eta^* F$  l'est aussi (en effet, on peut voir  $\mathfrak{X}'_{\eta'}$  comme un fermé dans  $\mathfrak{X}_\eta$ , car c'est une fibre de morphisme  $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{T}_\eta$ , donc la restriction de  $\lambda_\eta^* F$  en  $|\mathfrak{X}'_{\eta'}|$  est un faisceau mou). Par 11.2(ii) et les faisceaux  $\Theta(F)$  et  $\Theta'(F')$  sont flasques. Il en résulte qu'il suffit de prouver l'assertion pour  $q = 0$ .

Notons ensuite que l'assertion est locale par rapport à  $\mathfrak{X}$ , donc on peut le supposer affine. Soit  $\mathfrak{Z}$  un schéma affine étale sur  $\mathfrak{X}'_{s'}$ . Par la localité on peut supposer que  $\mathfrak{Z}$  est de la forme  $\mathfrak{U}'_{s'}$ , où  $\mathfrak{U}$  est un schéma formel affine étale sur  $\mathfrak{X}$ . Comme  $\mathfrak{U}'_{s'} = (\mathfrak{U}_s)_{s'}$ , on a que le faisceau  $\lambda_s^*(\Theta(F))$  est associé au préfaisceau  $\lambda_s^p(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = \varinjlim \Theta(F)(\mathfrak{U}_s \times_{\mathfrak{T}_s} \mathfrak{V}_s)$ , où  $\mathfrak{V}_s$  parcourt les voisinages ouverts de  $s'$  dans  $\mathfrak{T}_s$ . Par construction de  $\Theta$  on a alors :  $\lambda_s^p(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = \varinjlim F(\mathfrak{U}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathfrak{W}_\eta)$ . Or l'on peut voir  $\mathfrak{U}_\eta \times_{\mathfrak{T}_\eta} \mathfrak{W}_\eta$  comme un domaine analytique dans  $\mathfrak{U}_\eta$  et l'intersection de tous ces domaines est  $\mathfrak{U}'_{\eta'} = (\mathfrak{U}_\eta)_t$ , on a  $\lambda_s^p(\Theta(F))(\mathfrak{U}'_{s'}) = F((\mathfrak{U}_\eta)_t) = \lambda_\eta^* F(\mathfrak{U}'_{\eta'}) = \Theta'(F')(\mathfrak{U}'_{s'})$ , d'où on obtient le résultat.  $\square$

## 11.2 Foncteur des cycles évanescents : le cas des schémas

Dans cette section on s'intéresse au foncteur de cycles évanescents dans le cas de schémas sur l'anneau local Hensélien et on établit le lien avec le foncteur construit pour des schémas formels.

Soit  $\mathcal{S}$  le spectre d'anneau local Hensélien :  $\mathcal{S} = \mathrm{Spec} k$ , où  $k$  est l'anneau d'entiers de corps de valuation  $k$  (ici, comme dans [SGA7], on suppose que la valuation est discrète,

au sens de 8.6. Néanmoins on peut procéder de la même manière dans la situation plus générale). Le schéma  $\mathcal{S}$  a deux points : le point générique  $\eta$  et le point fermé  $s$ , qu'on appelle le point spécial (si la valuation est triviale, alors  $s = \eta$ ) On a :  $s = \text{Spec } \tilde{k}$  et  $\eta = \text{Spec } k$ . Si  $\mathcal{X}$  est un  $\mathcal{S}$ -schéma, on note  $\mathcal{X}_\eta$  et  $\mathcal{X}_s$  la fibre générique et la fibre spéciale de  $\mathcal{X}$ , i.e. les fibres de morphisme structural  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  en points  $\eta$  et  $s$  respectivement.

Par [Ber2] 2.4.3 le corps  $k$  est quasi-complet (puisque  $k$  est Hensélien), donc la valuation de  $k$  s'étend sur sa clôture séparable  $k^s$ .

**Lemme 11.9.**  *$(k^s)$  est un anneau local Hensélien qui coïncide avec la clôture intégrale de  $k$  dans  $k^s$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $(k^s)$  est Hensélien découle de [Ber2] 2.4.3, puisque  $k^s$  est quasi-complet. Notons ensuite  $L$  la clôture intégrale de  $k$  dans  $k^s$ . Soit  $\|\cdot\|$  la valuation sur  $k^s$ . Soit  $x \in L$ . Soit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in k$  tels que  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ . Si  $\|x\| > 1$ , alors on a  $1 = (a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_0x^{-n}) \in (k^s)$ , contradiction. Donc  $L \subset (k^s)$ . Soit  $y \in (k^s)$ . Il existe  $b_0, \dots, b_{m-1} \in k$  tels que  $y^m + b_{m-1}y^{m-1} + \dots + b_1y + b_0 = 0$ . D'après [BGR] 3.2.1/2 on a que  $\|b_i\| \leq 1$ , d'où  $y \in L$ , donc  $L = (k^s)$ .  $\square$

On pose  $\bar{\mathcal{S}} = \text{Spec } (k^s) = \{\bar{s}, \bar{\eta}\}$ . Pour un  $\bar{\mathcal{S}}$ -schéma  $\bar{\mathcal{X}}$  on note  $\bar{\mathcal{X}}_{\bar{\eta}}$  et  $\bar{\mathcal{X}}_{\bar{s}}$  la fibre générique et la fibre spéciale de  $\bar{\mathcal{S}}$ -schéma  $\bar{\mathcal{X}} = \bar{\mathcal{X}} \times_{\bar{\mathcal{S}}} \bar{\mathcal{S}}$  respectivement. On a les morphismes canoniques suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{\mathcal{X}} & \xleftarrow{\bar{i}} & \mathcal{X}_{\bar{s}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{X} & \xleftarrow{i} & \mathcal{X}_s \end{array}$$

Soit  $F \in \mathcal{X}_{\eta, \acute{e}t} \sim$  un faisceau étale. On note  $\bar{F}$  l'image inverse de  $F$  sur  $\mathcal{X}_{\bar{\eta}, \acute{e}t}$ .

**Définition 11.10.** *Le foncteur de cycles évanescents  $\Psi_\eta : \mathcal{X}_{\eta, \acute{e}t} \sim \rightarrow \mathcal{X}_{\bar{s}, \acute{e}t} \sim$  est défini comme  $\Psi_\eta(F) = \bar{i}^*(\bar{j}_* \bar{F})$ .*

Notons que si la valuation sur  $k$  est triviale, alors  $\Psi_\eta(F) = \bar{F}$ .

D'après [SGA7] XIII 1.1.3 le foncteur  $\Psi_\eta$  est à valeur dans la catégorie des faisceaux étales sur  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$  munis d'une action continue de  $G_\eta := \text{Gal}(k^s/k)$  compatible avec l'action de  $G_s := \text{Gal}(\hat{k}^s/\hat{k})$  sur  $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ .

Pour la suite on fixe un élément non nul  $a \in k$  (si la valuation est triviale on pose  $a = 0$ ). Soit  $\hat{k}$  la completion de  $k$ . C'est un corps non-Archimédien et l'on vérifie que  $\hat{k} = (\hat{k}) = \varprojlim k/(a^n)$ .

Soit  $\mathcal{X}$  un schéma localement de présentation finie sur  $k$ . On construit deux espaces analytiques comme suit.

1. La completion formelle  $\hat{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$  le long de sous-schéma  $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/a\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  est par définition un schéma formel de  $\hat{k}$ -*Fsch*, défini localement comme  $\widehat{\text{Spec } A} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spf } \hat{A}$ . Sa fibre générique est un espace analytique, que l'on note  $\hat{\mathcal{X}}_\eta$ .
2. Notons que  $\mathcal{X}_\eta$  est un schéma localement de présentation finie sur  $k$  d'après la construction ci-dessus, d'où  $\mathcal{X}_\eta \otimes_k \hat{k}$  est un schéma localement de présentation finie sur  $\hat{k}$ . On peut donc l'associer un espace analytique  $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{X}_\eta \otimes_k \hat{k})^{\text{an}}$  (comme c'est fait dans 9.3).

**Proposition 11.11.** *Si  $\mathcal{X}$  est séparé et de présentation finie sur  $k$ , alors il existe un morphisme canonique  $\hat{\mathcal{X}}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$  qui identifie  $\hat{\mathcal{X}}_\eta$  avec un domaine analytique fermé dans  $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ , où  $A$  est engendré par  $f_1, \dots, f_n$  sur  $k$  alors on peut identifier  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$  avec un domaine affinoïde  $\{x \in \mathcal{X}_\eta^{\text{an}} \mid |f_i(x)| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$  (en effet, on peut voir  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$  comme  $\mathcal{M}(\widehat{k}\langle f_1, \dots, f_n \rangle)$  et  $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$  comme  $\mathcal{M}(\widehat{k}[f_1, \dots, f_n])$ ). Dans le cas général on prend un recouvrement fini  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{X}$  par des sous-schémas affines comme ci-dessus. Comme  $\mathcal{X}$  est séparé,  $\mathcal{X}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$  est aussi affine,  $\mathcal{X}_{ij} \rightarrow \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j$  est une immersion fermée et si  $f_1, \dots, f_n$  et  $g_1, \dots, g_m$  engendrent  $\mathcal{X}_i$  et  $\mathcal{X}_j$  sur  $k$ , alors  $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$  engendrent  $\mathcal{X}_{i,j}$  sur  $k$ . On a donc que  $\widehat{\mathcal{X}}_{i,j,\eta}$  est identifié avec  $\widehat{\mathcal{X}}_{i,\eta} \cap \widehat{\mathcal{X}}_{j,\eta}$ , donc, par le recollement,  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est identifié avec un domaine analytique fermé dans  $\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ .  $\square$

- Remarque 11.12.** (i) D'après la définition de  $\cdot^{\text{an}}$ , il existe un morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ , où  $\mathcal{X}$  est un schéma de présentation finie sur  $k$  (pas forcément séparé), qui vient d'un morphisme d'espaces annelés  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta \otimes_k \widehat{k}$ .
- (ii) Notons que le corps résiduel  $\widehat{k}$  de  $k$  est isomorphe au corps résiduel de  $\widehat{k}$ . En effet, d'après [M] 23.I/54, le corps résiduel de  $\widehat{k}$  est la completion de  $\widehat{k}$  et donc est isomorphe à  $\widehat{k}$ . Il en découle qu'on a l'isomorphisme  $\widehat{\mathcal{X}}_s \simeq \mathcal{X}_s$ .
- (iii) Un morphisme  $\phi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  de schémas sur  $\mathcal{S}$  induit un morphisme  $\widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{Y}} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ . Si le morphisme  $\phi$  est étale, alors  $\widehat{\phi}$  l'est aussi. En effet, d'après (ii) et 10.6 il suffit de vérifier la platitude. Par la localité on se ramène à montrer que si  $A \rightarrow B$  un morphisme plat de  $k$ -algèbres, alors  $A/a^n \rightarrow B/a^n$  l'est aussi, ce qui découle de [M] 2.3.C, i.e. par le changement de base, vu que  $B/a^n = A/a^n \otimes_A B$ .

**Proposition 11.13.** *Si un morphisme  $\phi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  est propre, alors il induit un isomorphisme  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \simeq \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que le morphisme  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est bien défini (car la composé  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$  coïncide avec la composé  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ ). Notons ensuite que l'on peut supposer que  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ ,  $A$  est de présentation finie sur  $k$ , car le résultat est local en  $\mathcal{X}$ . D'après 8.43  $\mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est donc un domaine analytique dans  $\mathcal{Y}^{\text{an}}$ . D'après la proposition précédente  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta$  est aussi un domaine analytique dans  $\mathcal{Y}^{\text{an}}$ . Donc le morphisme  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est un  $\mathcal{Y}_\eta^{\text{an}}$ -morphisme. Il en découle qu'il suffit de montrer qu'il est surjectif.

Pour faire cela on peut supposer que  $\phi$  est projectif. En effet, comme  $\phi$  est propre, par le lemme de Chow il existe un  $\mathcal{X}$ -schéma projectif  $\mathcal{Z}$  et un  $\mathcal{X}$ -morphisme projectif et surjectif  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{Z}}_\eta & \xrightarrow{1} & \widehat{\mathcal{Y}}_\eta \\ 2 \downarrow & & \downarrow 4 \\ \mathcal{Z}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta & \xrightarrow{3} & \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta \end{array}$$

Les morphismes 1 et 3 sont surjectifs d'après la construction. Si le morphisme 2 est surjectif, cela implique que le morphisme 4 l'est aussi. On peut donc supposer que  $\phi$  est projectif, d'où il suffit de démontrer que  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est un est surjectif si  $\phi$  est une immersion fermée et si  $Y$  est un  $X$ -espace projectif. Supposons que  $Y = \text{Spec } A/I$ , i.e. que  $\phi$  est une immersion fermée. Soit  $A$  est engendré par  $f_1, \dots, f_n$  sur  $k$ . Alors on voit que  $\widehat{\mathcal{Y}}_\eta \simeq \mathcal{M}(\widehat{k}\langle f_1, \dots, f_n \rangle / I)$  et  $\mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{M}(\widehat{k}[f_1, \dots, f_n] / I \times_{\widehat{k}[f_1, \dots, f_n]} \widehat{k}\langle f_1, \dots, f_n \rangle) \simeq \widehat{\mathcal{Y}}_\eta$ . On procède de la même manière au cas où  $Y$  est un  $X$ -espace projectif et cela fini la preuve de la proposition.  $\square$

**Corollaire 11.14.** (i) *Si un morphisme  $\phi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  est propre, alors le morphisme induit  $\widehat{\phi}_\eta : \widehat{\mathcal{Y}}_\eta \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  l'est aussi.*

(ii) Si  $\mathcal{X}$  est propre sur  $k$ , alors  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$ .

**Remarque 11.15.** Les morphismes propres d'espaces analytiques sont définis comme suit. Si  $Y, X$  sont des bons espaces analytiques, on dit que  $\phi : Y \rightarrow X$  est *propre* s'il est séparé et compact (i.e. l'image inverse d'un compact est compact). Dans le cas général on dit que  $\phi : Y \rightarrow X$  est *propre*, si pour tout morphisme  $X' \rightarrow X$  de bon espace analytique  $X'$  vers  $X$  l'espace analytique  $Y \times_X X'$  est bon et le morphisme  $Y \times_X X' \rightarrow X'$  est propre. D'après [Ber2] 1.5.3 les morphismes propres d'espaces analytiques sont stables par le changement de base.

*Démonstration.* Le morphisme  $\mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$  est propre par [Ber2] 2.6.9, donc le morphisme  $\mathcal{Y}_\eta^{\text{an}} \times_{\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}} \widehat{\mathcal{X}}_\eta \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_\eta$  est propre par le changement de base, d'où on obtient (i). Soit  $\mathcal{T} = \text{Spec } k$ . D'après 11.11  $\widehat{\mathcal{T}}_\eta \simeq \mathcal{T}_\eta^{\text{an}}$ , d'où on obtient (ii).  $\square$

### 11.3 Théorème de comparaison pour les cycles évanescents

On conserve les notations du paragraphe précédent.

Soit  $\mathcal{X}$  un schéma localement de présentation finie sur  $k$ . D'après 11.12 (ii) on a le morphisme des sites  $\widehat{\mathcal{X}}_{\eta, \text{ét}} \rightarrow \mathcal{X}_{\eta, \text{ét}}^{\text{an}}$ . Par [Ber2] 3.3.11 on a aussi le morphisme des sites  $\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}_{\eta, \text{ét}}$ . Si  $F \in \mathcal{X}_{\eta, \text{ét}} \widetilde{\phantom{F}}$ , on note  $F^{\text{an}}$  (resp.  $\widehat{F}$ ) l'image inverse de  $F$  sur  $\mathcal{X}_{\eta, \text{ét}}^{\text{an}}$  (resp.  $\widehat{\mathcal{X}}_{\eta, \text{ét}}$ ).

**Lemme 11.16.** *Soit  $F \in \mathcal{X}_{\eta, \text{ét}} \widetilde{\phantom{F}}$ . Il existe un morphisme canonique de faisceaux  $i^*(j_*F) \rightarrow \Theta(\widehat{F})$ .*

*En particulier, il existe un morphisme canonique de faisceaux  $\Psi_\eta(F) \rightarrow \Psi_\eta(\widehat{F})$ .*

*Démonstration.* Notons que  $i^*(j_*F)$  est un faisceau associé au préfaisceau  $i^P(j_*F)$ . Donc il suffit de construire un morphisme  $i^P(j_*F) \rightarrow \Theta(\widehat{F})$ . Soit  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}_s$  un morphisme étale. Par définition  $i^P(j_*F)(\mathcal{Z}) = \varinjlim F(\mathcal{Y}_\eta)$ , où l'on prend la limite sur tous  $\mathcal{X}_s$ -morphisms  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}_s$ , où  $\mathcal{Y}$  est un schéma étale sur  $\mathcal{X}$ . D'après 11.12 et 10.7 il existe un schéma formel  $\mathfrak{Z}$  étale sur  $\widehat{\mathcal{X}}$  tel que  $\mathfrak{Z}_s = \mathcal{Z}$ . Le morphisme  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}_s$  induit le morphisme  $\mathfrak{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{Y}}$  sur  $\widehat{\mathcal{X}}$ , ce qui donne un morphisme  $F(\mathcal{Y}_\eta) \rightarrow \widehat{F}(\mathfrak{Z}_\eta) = \Theta(\widehat{F})(\mathcal{Z})$ . On obtient ainsi un morphisme  $i^P(j_*F) \rightarrow \Theta(\widehat{F})$ .  $\square$

**Théorème 11.17.** *Soit  $F$  un faisceau torsion étale de groupes abéliens sur  $\mathcal{X}_\eta$ . Alors pour tout  $q \geq 0$  on a un isomorphisme canonique  $i^*(R^q j_*F) \xrightarrow{\sim} R^q \Theta(\widehat{F})$ .*

**Remarque 11.18.** D'après 11.16 le morphisme  $i^*(R^q j_*F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  est bien défini.

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème on procède par plusieurs étapes.

*Étape 1.* Notons qu'il suffit de montrer que  $i^*(R^q j_*F)_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} R^q \Theta(\widehat{F})_{\bar{x}}$  pour tout point géométrique de  $\mathcal{X}_s$ . Supposons que l'assertion est vraie si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $\mathcal{X}_s$  au-dessus d'un point non-fermé  $x \in \mathcal{X}_s$ .

Montrons que  $i^*(R^q j_*F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  est alors un isomorphisme. Comme le résultat est local par rapport à  $\mathcal{X}$ , on peut supposer qu'il est projectif sur  $\mathcal{S}$ . Considérons la catégorie dérivé  $D(\mathcal{X}_s)$ . Comme elle est triangulée, il existe un triangle exact :

$$\Delta^\cdot[-1] \rightarrow i^*(Rj_*F) \rightarrow R\Theta(\widehat{F}) \rightarrow \Delta^\cdot \quad (\widehat{*})$$

Il s'agit de montrer que  $\Delta^\cdot$  est quasi-isomorphe à zéro. D'après l'hypothèse les faisceaux de cohomologie de  $\Delta^\cdot$  sont concentrés en points fermés de  $\mathcal{X}_s$ . Il suffit de montrer donc que  $R\Gamma(\mathcal{X}_s, \Delta^\cdot) = 0$ . (En effet, si  $G$  est un faisceau sur  $\mathcal{X}_s$  concentré en points fermés de  $\mathcal{X}_s$ , alors le support  $Z$  de  $G$  est fermé, donc c'est un nombre fini de points fermés. Soit  $\mathcal{X}_s \setminus Z = U \xrightarrow{j} \mathcal{X}_s$ . D'après [Mi] II.3.13 on a une suite exacte  $0 \rightarrow j_! j^* G \rightarrow$

$G \rightarrow i_*i^*G \rightarrow 0$ . Comme  $j^*G = 0$ , donc  $G \simeq i_*i^*G$ , où  $i : Z \rightarrow \mathcal{X}_s$ . On en déduit que  $\Gamma(\mathcal{X}_s, G) = \Gamma(\mathcal{X}_s, i_*i^*G) = \Gamma(Z, i^*G) = \bigoplus_{x_i \in Z} G_{x_i}$ . De même, d'après le triangle exact (\*), cette égalité est équivalente à l'égalité  $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_s, R\Theta(\widehat{F}))$ .

Comme  $\mathcal{X}$  est propre sur  $\mathcal{S}$ , on a un isomorphisme canonique  $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta, F)$ . En effet, d'après [Mi] VI.2.7  $R\Gamma(\mathcal{X}_s, i^*(Rj_*F)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}, Rj_*F)$  et  $R\Gamma(\mathcal{X}, Rj_*F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta, F)$  par construction. On a aussi un isomorphisme  $R\Gamma(\mathcal{X}_s, R\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{X}_\eta^{\text{an}}, F^{\text{an}})$ . En effet,  $\widehat{\mathcal{X}}_\eta \simeq \mathcal{X}_\eta^{\text{an}}$  par 11.14(ii). En plus,  $\widehat{\mathcal{X}}_s \simeq \mathcal{X}_s$  d'après 11.12(ii). Il s'agit donc de voir que  $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_s, R\Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_\eta, \widehat{F})$ . Cela découle de 11.2(i) vu que  $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_s, R\Theta(\widehat{F}))$  est les cohomologies de complexe  $\Theta(\widehat{F})(\widehat{\mathcal{X}}_s) \rightarrow \Theta(I^\bullet)(\widehat{\mathcal{X}}_s)$ , où  $I^\bullet$  est la résolution injective de  $\widehat{F}$ , et  $R\Gamma(\widehat{\mathcal{X}}_\eta, \widehat{F})$  est les cohomologies de complexe  $\widehat{F}(\widehat{\mathcal{X}}_\eta) \rightarrow I^\bullet(\widehat{\mathcal{X}}_\eta)$ . On déduit donc le résultat final du lemme de l'étape suivant.

### Étape 2.

**Lemme 11.19.** *Soit  $\mathcal{X}$  un schéma compactifiable sur un corps quasi-complet  $k$ . Soit  $F$  un faisceau torsion de groupes abéliens. Alors pour tout  $q \geq 0$  on a un isomorphisme canonique  $H_c^q(\mathcal{X}, F) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\mathcal{X}^{\text{an}}, F^{\text{an}})$ .*

**Remarque 11.20.** On dit qu'un schéma  $\mathcal{X}$  sur un corps  $k$  est *compactifiable* s'il existe une immersion ouverte  $\mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$  avec  $\overline{\mathcal{X}}$  un schéma propre sur  $k$ . En particulier, si  $\mathcal{X}$  est propre, alors  $\mathcal{X}$  est compactifiable. Par le théorème de Nagata, tout schéma séparé et de type fini sur  $k$  est compactifiable.

*Démonstration.* Si  $k$  est complet, alors l'assertion du lemme est le théorème 7.1.1, [Ber2]. Il suffit donc de montrer que  $H_c^q(\mathcal{X}, F) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\mathcal{X} \otimes_k \widehat{k}, F)$ . Si  $k$  est séparablement fermé,  $\widehat{k}$  l'est aussi et le résultat découle du fait que les groupes de cohomologie à support compact de schémas sont préservés par l'extensions séparablement fermées du corps de base (cf. [Mi] VI.2.6). Dans le cas général  $G_k \simeq G_{\widehat{k}}$  par [Ber2] 2.4.2, où  $G_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(k^s/k)$  et de même pour  $G_{\widehat{k}}$ . Ainsi on termine la preuve du lemme en appliquant la suite spectrale de Hochschild-Serre ([Mi] III.2.20)  $H^p(G_k, H^q(\mathcal{X} \otimes k^s, F')) \implies H^{p+q}(\mathcal{X}, F)$ .  $\square$

*Étape 3.* Pour conclure il suffit de montrer que le morphisme  $i^*(R^q j_* F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  induit un isomorphisme en points géométriques de  $\mathcal{X}_s$  au-dessus d'un point non-fermé  $x \in \mathcal{X}_s$ . Notons que l'assertion est locale par rapport à  $\mathcal{X}$ , on peut donc supposer que  $\mathcal{X}$  est de présentation finie sur  $k$ . La dimension  $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{X}_\eta$  est donc finie (où l'on voit la fibre  $\mathcal{X}_\eta$  comme un schéma sur un corps  $k(\eta) = k$ ). On procède par récurrence sur  $d$ . Si  $d=0$ , alors le résultat découle de première étape. En effet, tout algèbre finie sur un anneau local Hensélien est un produit d'anneaux locaux, on peut donc supposer que  $\mathcal{X}_s$  est un corps, extension finie séparable de  $k$ , donc l'étape 1 s'applique. Supposons que  $d \geq 1$  et que l'assertion est vraie pour tout schéma sur le spectre d'anneau local Hensélien tel que la dimension de sa fibre générique est plus petite que  $d$ .

*Étape 4.* On rappelle qu'on a noté  $\mathcal{S}$  le spectre d'anneau local Hensélien :  $\mathcal{S} = \text{Spec } k$ , où  $k$  est l'anneau d'entiers du corps de valuation  $k$ .

**Lemme 11.21.** *Soit  $\mathcal{X}$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_S^m$ . Soit  $x \in \mathcal{X}_s$  un point qui n'est pas fermé. Posons  $\mathcal{T} = \mathbb{A}_S^1$ . Alors il existe une projection  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}$  telle que l'image de  $x$  dans  $\mathcal{T}_s$  par le morphisme induit  $\mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{T}_s$  est le point générique  $s'$  de  $\mathcal{T}_s$ .*

*Démonstration.* On a  $\mathcal{X} = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/I$  et  $\mathcal{X}_s = \text{Spec } \widehat{k}[x_1, \dots, x_m]/I$ . Un point non-fermé  $x \in \mathcal{X}_s$  correspond à un idéal premier non-maximal  $\mathfrak{p}$  de  $\widehat{k}[x_1, \dots, x_m]$  tel que  $\mathfrak{p} \supset I$ . Comme  $\widehat{k}[x_1, \dots, x_m]/\mathfrak{p}$  n'est pas un corps, il existe un élément non nul non-inversible  $y \in \widehat{k}[x_1, \dots, x_m]/\mathfrak{p}$ . Le morphisme  $\phi : \widehat{k}[t] \rightarrow \widehat{k}[x_1, \dots, x_m]/\mathfrak{p}$ ,  $P \mapsto P(y)$  est alors injectif. En effet, si  $a_r y^r + \dots + a_1 y + a_0 = 0$ , alors  $y(-\frac{a_r}{a_0} y^{r-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} y) = 1$ , i.e.  $y$  est inversible et on obtient une contradiction. Soit  $z$  un élément de

$k[x_1, \dots, x_m]/I$  relevant  $y$ . Alors le morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}$  correspondant au morphisme  $k[t] \rightarrow k[x_1, \dots, x_m]/I, P \mapsto P(z)$  convient.  $\square$

*Étape 5.*

**Lemme 11.22.** *Le morphisme  $i^*(R^q j_* F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  induit un isomorphisme en points géométriques de  $\mathcal{X}_s$  au-dessus d'un point non-fermé  $x \in \mathcal{X}_s$ .*

*Démonstration.* Comme le résultat est local par rapport à  $\mathcal{X}$ , on peut supposer que  $\mathcal{X}$  est un sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_S^m$ . On conserve les notations :  $\mathcal{T} = \mathbb{A}_S^1$ ,  $s'$  est le point générique de  $\mathcal{T}_s$ , on note aussi  $s'$  le point de  $\mathcal{T}$  correspondant. D'après l'étape précédente il suffit de montrer que l'application  $i^*(R^q j_* F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  induit un isomorphisme entre les images inverses des faisceaux sur  $(\mathcal{X}_s)_{s'}$ . La construction suivante nous sert pour diminuer la dimension de  $\mathcal{X}_\eta$ .

Considérons  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h$  la Hensélisation d'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}$ . Soit  $\eta'$  le point générique de  $\mathcal{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h$ , soit  $s'$  son point spécial ( $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h$  un anneau local et d'après [Mi] I.4 son corps résiduel est isomorphe au corps résiduel de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}$ , donc le point spécial de  $\mathcal{S}'$  est  $s'$ ).

Posons  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{S}'$ . Notons que la fibre  $(\mathcal{X}')_{s'}$  du morphisme  $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{S}'$  en point  $s'$  est isomorphe au  $(\mathcal{X}_s)_{s'}$  (cela découle du fait que les corps résiduels de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}$  sont isomorphes). Le morphisme canonique  $\lambda : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$  induit les morphismes  $\lambda_s : (\mathcal{X}')_{s'} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X}_s)_{s'} \rightarrow \mathcal{X}_s$  et  $\lambda_\eta : \mathcal{X}'_{\eta'} \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ . Si on écrit  $\mathcal{X} = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/I$  (avec les notations de l'étape précédente), on obtient :  $\mathcal{X}_\eta = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/I$  et  $\mathcal{X}'_{\eta'} = \text{Spec } (k[x_1, \dots, x_m]/I \times_{k[t]} k(S'))$ . On obtient donc que la dimension de  $\mathcal{X}'_{\eta'}$  sur  $k(S')$  est plus petite que la dimension de  $\mathcal{X}_\eta$  sur  $k$ .

Notons  $i'$  et  $j'$  les morphismes  $\mathcal{X}'_{\eta'} \rightarrow \mathcal{X}'$  et  $\mathcal{X}'_{\eta'} \rightarrow \mathcal{X}'$  respectivement :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}'_{\eta'} & \xrightarrow{j'} & \mathcal{X}' & \xleftarrow{i'} & \mathcal{X}'_{s'} \\ \lambda_\eta \downarrow & & \lambda \downarrow & & \lambda_s \downarrow \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{X} & \xleftarrow{i} & \mathcal{X}_s \end{array}$$

On a alors :  $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} i'^*(R^q j'_*(\lambda_\eta^* F))$ , de même comme dans 11.8. D'après la récurrence  $i'^*(R^q j'_*(\lambda_\eta^* F)) \xrightarrow{\sim} R^q \Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$ , donc  $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} R^q \Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$ .

Ensuite procédons de la même manière au cas de schémas formels. Considérons le schéma formel  $\widehat{\mathcal{T}}_\eta$ . Soit  $t$  son point maximal (i.e. correspondant à la norme sur  $\widehat{\mathcal{T}}_\eta$ ). Rappelons (9.37) qu'on a noté  $\mathcal{H}(t)$  le corps résiduel complété du point  $t$ . Comme  $\mathcal{T}_\eta = \text{Spec } k[y]$ ,  $\mathcal{H}(t)$  est le complété de corps de fractions de  $\widehat{k}(y)$ . On obtient ainsi un morphisme  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'} \hookrightarrow \mathcal{H}(t)$ , qui induit un isomorphisme de la complétion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}$  et  $\mathcal{H}(t)$ . Comme  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h$  est un sous-anneau de la complétion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}$ , on obtient ainsi un morphisme  $\mathcal{O}_{\mathcal{T}, s'}^h \hookrightarrow \mathcal{H}(t)$ , donc  $\widehat{\mathcal{S}'} = \text{Spf}(\mathcal{H}(t))$ .

Notons que il découle de [BGR] 2.1.7/4 que  $\widehat{\mathcal{X}'} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{X}} \times_{\widehat{\mathcal{T}}} \widehat{\mathcal{S}'}$ . Soit alors  $\widehat{\lambda} : \widehat{\mathcal{X}'} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$  un morphisme induit par  $\lambda$ . Comme  $\widehat{\mathcal{S}'} = \text{Spf}(\mathcal{H}(t))$ , on est dans la situation de 11.8. Il existe donc un isomorphisme canonique  $\widehat{\lambda}_s^*(R^q \Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R^q \Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$ . Comme  $\widehat{\lambda_\eta^* F} = \widehat{\lambda_\eta^* F}$  et  $\widehat{\lambda}_s = \lambda_s$  (d'après 11.12), on a donc  $\lambda_s^*(R^q \Theta(\widehat{F})) \xrightarrow{\sim} R^q \Theta'(\widehat{\lambda_\eta^* F})$ . D'après ce qui précède on a donc  $\lambda_s^*(i^*(R^q j_* F)) \xrightarrow{\sim} \lambda_s^*(R^q \Theta(\widehat{F}))$ , i.e. l'application  $i^*(R^q j_* F) \rightarrow R^q \Theta(\widehat{F})$  induit un isomorphisme d'images inverses de faisceaux sur  $(\mathcal{X}_s)_{s'}$  ce qui finit la preuve du lemme et du théorème.  $\square$

**Corollaire 11.23.** *Soit  $F$  un faisceau torsion étale de groupes abéliens sur  $\mathcal{X}_\eta$ . Alors pour tout  $q \geq 0$  on a un isomorphisme canonique  $R^q \Psi_\eta(F) \xrightarrow{\sim} R^q \Psi_\eta(\widehat{F})$ .*  $\square$

## Références

- [A] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G.: Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachussets, 1969
- [Ber1] Berkovich, V. G.: Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical society, 1990
- [Ber2] Berkovich, V. G.: Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, Publ. Math. IHES **78** (1993), 5-161
- [BGR] Bosch, S.; Güntzer, U.; Remmert, R.: Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 261, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984
- [Bou] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique. Topologie générale, Chap.I-IV. Hermann, Paris, 1971
- [EGAI] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971
- [EGAIV] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Ibit., **32**, 1967
- [God] Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris, 1958
- [H] Hartshorne, R.: Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer, 1977
- [Ka] Kashiwara, M.; Schapira, P.: Categories and Sheaves, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 332, Springer-Verlag, 2005
- [M] Matsumura, H.: Commutative Algebra, W.A. Benjamin Co., New York, 1970
- [Mi] Miln, J.: Etale Cohomology, Princeton U.P., 1980
- [Mo] Monna, A. F. : Analyse non-archimédienne, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
- [SGA4] Artin, M.; Grothendieck, A.; Verdier, J.-L. : Théorie de topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973
- [SGA7] Grothendieck, A.; Deligne, P.; Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lecture Notes in Math. 288, 340, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972-1973

## Quatrième partie

# Les représentations du groupe symétrique

## 12 Représentations linéaires des groupes finis

### 12.1 Définitions et exemples

Afin de mieux comprendre les propriétés d'un groupe, on peut tenter d'identifier un quotient de ce groupe avec un groupe de matrices. Cela conduit à la notion suivante :

**Définition 12.1.** On appelle *représentation linéaire* d'un groupe  $G$  la donnée d'un espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme de groupes :

$$\rho : G \rightarrow GL(V).$$

L'espace vectoriel  $V$  est l'*espace de la représentation* et la dimension de  $V$  son *degré*. Dans toute la suite, nous n'étudierons que des représentations de groupes finis, à valeurs dans des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On peut alors raisonner en termes de matrices puisque l'image de  $G$  par  $\rho$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ , où  $n$  est la dimension de  $V$ .

**Définition 12.2.** On dit que deux représentations linéaires d'un même groupe  $G$ ,  $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels,  $f : V_1 \rightarrow V_2$ , tel que :

$$\forall g \in G, \rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g)$$

En termes de matrices, cela signifie que les matrices associées à la première représentation sont semblables à leurs homologues dans la seconde, via la même matrice de passage.

**Exemple 12.3.** 1. Tous les groupes possèdent la représentation triviale (ou représentation identité), qui envoie tout élément de  $G$  sur  $Id_{\mathbb{C}}$ .

2. Si  $G$  opère à gauche sur  $A$ , on dispose d'une représentation de  $G$  dans l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $A$  définie par :

$$\rho(g)(a) = g.a, \quad g \in G, \quad a \in A.$$

C'est la représentation de permutation associée à  $A$ .

(On peut prendre par exemple  $G = \mathcal{S}_n$  et  $A = \{1, \dots, n\}$ , ce qui permet d'identifier  $\mathcal{S}_n$  au sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  constitué des matrices de permutation.)

3. Un cas particulier important de l'exemple précédent est celui de la représentation régulière (à gauche) de  $G$ , qu'on obtient en faisant agir  $G$  sur lui-même par translation à gauche.

**Définition 12.4.** Soit  $V$  un espace vectoriel et  $G$  un groupe.  $V$  est un  $G$ -module s'il existe un morphisme de groupes  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ .

Cela équivaut à la donnée d'une multiplication externe  $G \times V \rightarrow V$  telle que :

1.  $g\mathbf{v} \in V$



2.  $g(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c(g\mathbf{v}) + d(g\mathbf{w})$
3.  $(gh)\mathbf{v} = g(h\mathbf{v})$
4.  $1_G\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Pour tous  $g, h \in G$ ;  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ;  $c, d \in \mathbb{C}$ .

Une représentation de  $G$  correspond donc à un  $G$ -module.

**Définition 12.5.** Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire de  $G$ , et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . On dit que  $W$  est *stable par  $G$*  si  $W$  est stable par tous les  $\rho(g)$ ,  $g \in G$ . La restriction de  $\rho$  à  $W$  est alors une représentation de  $G$  dans  $W$ . Cela correspond à dire que  $W$  est un sous- $G$ -module de  $V$ .

**Théorème 12.6.** Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation de  $G$ , et  $W$  un sous-espace stable par  $G$ . Alors, il existe un supplémentaire  $W_0$  de  $W$  stable par  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $W_1$  un supplémentaire quelconque de  $W$  dans  $V$ , et  $p$  le projecteur de  $V$  sur  $W$  correspondant. Posons :

$$p_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho(t)p\rho(t)^{-1}, \quad |G| \text{ étant l'ordre de } G.$$

Alors,  $p_0$  est un projecteur de  $V$  sur  $W$  qui commute à tous les éléments de  $G$ , donc son noyau,  $W_0$  est stable par  $G$ .  $\square$

**Définition 12.7.** Une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  (resp. un  $G$ -module) est dit(e) *irréductible* (ou *simple*) si  $V$  n'est pas réduit à zéro, et si aucun sous-espace vectoriel non nul de  $V$  n'est stable par  $G$  (resp. si  $V$  n'admet aucun sous-module autre que lui-même et  $\{0\}$ ).

On vérifie aisément qu'une représentation est irréductible si et seulement si le module associé l'est.

**Théorème 12.8.** Toute représentation est somme directe de représentations simples.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $\dim(V)$ . Si  $\dim(V) = 0$ , le résultat est clair. Supposons  $\dim(V) \geq 1$ . Si  $V$  est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut décomposer  $V$  en  $V' \oplus V''$ , avec  $V'$  et  $V''$  de dimensions strictement inférieures à  $\dim(V)$ , ce qui permet de passer à la récurrence.  $\square$

**Théorème 12.9. Lemme de Schur**

Soient  $V$  et  $W$  deux modules irréductibles de  $G$ , et  $f : V \rightarrow W$  un morphisme de  $G$ -modules. Alors,  $f = 0$  ou  $f$  est un isomorphisme de  $G$ -modules.

*Démonstration.* Comme  $\ker f$  est un sous-module de  $V$ , qui est irréductible ce ne peut être que  $\{0\}$  ou  $V$ . De même, grâce à l'irréductibilité de  $W$ ,  $\text{Im } f = \{0\}$  ou  $\text{Im } f = W$ , ce qui prouve ce qu'on veut.  $\square$

**Corollaire 12.10.** Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux représentations irréductibles non équivalentes, et si  $f : V_1 \rightarrow V_2$  est linéaire et vérifie  $\forall g \in G, f \cdot \rho_1(g) = \rho_2(g) \cdot f$ , alors,  $f = 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de traduire le lemme de Schur en termes de représentations.  $\square$

**Corollaire 12.11.** Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation irréductible de  $G$  ( $V$  étant un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie). Un endomorphisme  $f$  (d'espace vectoriel) de  $V$  qui commute à tous les  $\rho(g)$ ,  $g \in G$  est une homothétie.

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $f$  admet une valeur propre  $\lambda$ . Mais alors  $f - \lambda id_V$  commute aussi à tous les  $\rho(g)$ ,  $g \in G$  donc c'est un morphisme de  $G$ -modules. Or  $f - \lambda id_V$  n'est pas injectif, d'après le lemme de Schur, il est nul :  $f = \lambda id_V$  est une homothétie.  $\square$

## 12.2 Théorie des caractères

**Définition 12.12.** Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation de  $G$ . Pour tout  $s \in G$ , posons :

$$\chi_\rho(s) = \text{Tr}(\rho(s))$$

On obtient ainsi une fonction  $\chi_\rho$  sur  $G$ , à valeurs complexes, appelée *caractère* de la représentation  $\rho$ .

On démontre alors aisément les propriétés suivantes :

**Proposition 12.13.** Si  $\chi$  est le caractère d'une représentation  $\rho$  de degré  $n$ , on a :

1.  $\chi(1) = n$
2.  $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$  (conjugué complexe de  $\chi(s)$ ), pour tout  $s \in G$
3.  $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ , pour tous  $s, t \in G$
4. Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux représentations irréductibles équivalentes, alors,  $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$ .

**Définition 12.14.** Soient  $\chi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit le produit scalaire de  $\chi$  et  $\psi$  par :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t) \psi(t)^* = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t) \psi(t^{-1})$$

**Théorème 12.15.** Soient  $\chi$  et  $\psi$  deux caractères irréductibles de  $G$ , alors :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

*Démonstration.* Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  les matrices des représentations associées à  $\chi$  et à  $\psi$ , de degrés  $d$  et  $f$  respectivement (les  $a_{ij}$  et les  $b_{ij}$  sont des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ ). Soit  $X = (x_{ij})$  une matrice  $d \times f$  quelconque. Posons :

$$Y = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(t) X B(t^{-1})$$

Alors, pour tout  $s \in G$ ,

$$A(s) Y B(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(st) X B((st)^{-1}) = Y$$

Donc, pour tout  $s \in G$ ,  $A(s) Y = Y B(s)$ .

En appliquant alors les corollaires 9 et 10, on obtient :

$$Y = \begin{cases} \lambda I_d & \text{si les représentations sont équivalentes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1<sup>er</sup> cas :  $\chi \neq \psi$  Les représentations ne sont pas équivalentes, donc, pour toute matrice  $X$ ,

$$\forall i, j, \quad \sum_{k,l} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) x_{kl} b_{lj}(t^{-1}) = 0$$

Pour que ce polynôme en les  $x_{kl}$  soit nul, il faut que tous ses coefficients soient nuls, donc :

$$\forall i, j, k, l, \quad \sum_{t \in G} a_{ik}(t) b_{lj}(t^{-1}) = 0$$

Par suite,

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j} \sum_{t \in G} a_{ii}(t) b_{jj}(t^{-1}) = 0$$

2<sup>e</sup> cas :  $\chi = \psi$   $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \chi \rangle$  ne dépend que de  $\chi$ , donc que de  $A$ . Par suite, on peut supposer  $A = B$ , et les représentations sont alors équivalentes :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} A(t) X A(t^{-1}) = \lambda I_d \quad (*)$$

D'où, en prenant la trace,  $cd = \text{Tr} X$ .

L'égalité des coefficients matriciels dans (\*) donne alors :

$$\forall i, j, \quad \frac{1}{|G|} \sum_{k,l} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) x_{k,l} a_{l,i}(t^{-1}) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_{i,i}$$

Comme l'égalité vaut pour tout choix de  $X$ ,

$$\forall i, j, k, l, \quad \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} a_{ik}(t) a_{li}(t^{-1}) = \frac{1}{d} \delta_{k,l}$$

On en déduit :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j} \sum_{t \in G} a_{ii}(t) a_{jj}(t) = 1$$

et le théorème est prouvé. □

On en déduit facilement le corollaire suivant :

**Corollaire 12.16.** *Soit  $V$  une représentation de  $G$  de caractère  $\chi$ . Supposons :*

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus m_2 V^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k V^{(k)}$$

où les  $V^{(i)}$  sont irréductibles et deux à deux non équivalentes, de caractères  $\chi^{(i)}$ . Alors,

1.  $\chi = m_1 \chi^{(1)} + \dots + m_k \chi^{(k)}$
2.  $\forall j, \langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ .
3.  $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2$ .
4.  $V$  est irréductible si et seulement si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ .
5. Si  $W$  est une autre représentation de  $G$  de caractère  $\psi$ ,  $X \cong Y$  si et seulement si  $\chi = \psi$ .

**Corollaire 12.17.** *Soit  $W$  un  $G$ -module et  $V$  un  $G$ -module irréductible. Le nombre de copies de  $V$  dans une décomposition en sous-modules irréductibles de  $W$  ne dépend pas de la décomposition et il est égal à  $\dim \text{Hom}_G(V, W)$  (morphisme de  $G$ -modules de  $V$  vers  $W$ ).*

*Démonstration.* Que ce nombre soit indépendant de la décomposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente. Ensuite, soit  $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$  une décomposition de  $W$  en sous-modules irréductibles. Notons  $p_i$  la projection de  $W$  sur  $W_i$  pour cette décomposition. Pour tout  $i$ ,  $p_i$  est un morphisme de modules, et  $\sum_i p_i = id_W$ . Soit alors  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$ , on a :

$$f = f \circ p_1 + \dots + f \circ p_r$$

Et pour chaque  $i$ ,  $f \circ p_i$  est un morphisme de modules de  $V$  vers  $W_i$ . On en déduit que  $\text{Hom}_G(V, W) \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_G(V, W_i)$ . Or,  $\text{Hom}_G(V, W_i) = \{0\}$  si  $V \not\cong W_i$  (lemme de Schur) et  $\text{Hom}_G(V, W_i)$  est une droite vectorielle si  $V \cong W_i$  (d'après le corollaire 10).  $\square$

### 12.3 Représentation régulière et nombre de représentations irréductibles

Dans ce paragraphe, on désigne par  $\chi_1, \dots, \chi_h$  les différents caractères associés aux représentations irréductibles  $W_1, \dots, W_h$  de  $G$ ; on note  $n_i$  le degré de  $W_i$ , i.e.  $n_i = \chi_i(1)$ .

**Proposition 12.18.** *Chaque représentation irréductible  $W_i$  de  $G$  est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré  $n_i$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que le caractère  $r_G$  de la représentation régulière est donné par  $r_G(1) = |G|$  et  $r_G(s) = 0$  si  $s \neq 1$ . Ensuite, le nombre d'apparitions de  $W_i$  dans  $V$  est :

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1}) \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_i(1) = n_i \quad \square$$

**Corollaire 12.19.** *Les  $n_i$  vérifient :*

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

**Définition 12.20.** Une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *centrale* si elle est constante sur les classes de conjugaison de  $G$  (i.e. si  $\forall s, t \in G, f(tst^{-1}) = f(t)$ ).

**Proposition 12.21.** *Soit  $f$  une fonction centrale sur  $G$ , et soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire de  $G$ . Soit  $\rho_f$  l'application linéaire de  $V$  dans lui-même définie par :*

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho(t).$$

*Si  $V$  est irréductible de degré  $n$  et de caractère  $\chi$ ,  $\rho_f$  est une homothétie de rapport :*

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi^* \rangle.$$

*Démonstration.* Pour  $s \in G$ , calculons :

$$\rho(s)\rho_f\rho(s^{-1}) = \sum_{t \in G} f(t)\rho(s^{-1}ts) \quad (12.1)$$

$$= \sum_{u \in G} f(sus^{-1})\rho(u) \quad (12.2)$$

$$= \sum_{u \in G} f(u)\rho(u) = \rho_f \quad (12.3)$$

On a donc  $\rho_f\rho(s) = \rho(s)\rho_f$ . D'après le corollaire 10,  $\rho_f$  est une homothétie de rapport :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\text{Tr}(\rho(t)) = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\chi(t) = \frac{|G|}{n} \langle f, \chi^* \rangle. \quad \square$$

On introduit maintenant l'espace vectoriel  $H$  des fonctions centrales sur  $G$ ; les caractères  $\chi_1, \dots, \chi_h$  appartiennent à  $H$ .

**Théorème 12.22.** *Les caractères  $\chi_1, \dots, \chi_h$  forment une base orthonormale de  $H$ .*

*Démonstration.* On sait déjà que les  $\chi_i$  forment un système orthonormal dans  $H$ . Pour prouver qu'ils forment une base de  $H$ , il suffit de montrer que tout élément de  $H$  orthogonal aux  $\chi_i^*$  est nul. Soit donc  $f$  un tel élément. Pour toute représentation  $\rho$  de  $G$ , la fonction  $\rho_f$  définie à la proposition précédente est nulle. Appliquant cela à la représentation régulière, on obtient en particulier :

$$\rho_f(\mathbf{1}) = \sum_{t \in G} f(t)\mathbf{t} = 0$$

Donc  $f(t) = 0$  pour tout  $t \in G$ , ce qui achève la démonstration. □

**Théorème 12.23.** *Le nombre de représentations irréductibles de  $G$  (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .*

*Démonstration.* Les fonctions indicatrices des classes de conjugaisons de  $G$  forment une base de  $H$ , donc il y en a  $h$ , ce qu'il fallait démontrer. □

## 12.4 Représentations restreintes et induites

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . Dans ce paragraphe on va étudier comment obtenir des représentations de  $G$  à partir de celles de  $H$  et vice versa.

**Définition 12.24.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ , soit  $X$  une représentation de  $G$ . La restriction de  $X$  à  $H$ , notée  $X \downarrow_H^G$ , est donnée par

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h)$$

pour chaque  $h \in H$ .

On voit facilement que  $X \downarrow_H^G$  est effectivement une représentation de  $H$ .

**Définition 12.25.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ , soit  $Y$  une représentation de  $H$ . Fixons une transversale  $t_1, \dots, t_l$  de classes à gauche de  $H$ , i.e.  $G = t_1H \uplus \dots \uplus t_lH$  – union disjointe. La représentation de  $G$  induite par  $Y$ , notée  $Y \uparrow_H^G$ , est donnée par

$$Y \uparrow_H^G = (Y(t_i^{-1}gt_j)) = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_1^{-1}gt_l) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1}gt_1) & Y(t_l^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix}$$

où  $Y(g)$  est égal à zéro si  $g \notin H$ . On dit aussi que la transversale  $\{t_1, \dots, t_l\}$  donne la représentation induite  $Y \uparrow_H^G$ .

Cette définition vient naturellement de l'idée consistant à prolonger la représentation de  $H$  par zéro en dehors de  $H$  (ce qui est impossible, car les matrices  $X(g)$ ,  $g \in G$  doivent être inversibles). On montre facilement que  $Y \uparrow_H^G$  est effectivement une représentation de  $G$ , en notant que chaque ligne et chaque colonne de matrices de  $Y \uparrow_H^G(g)$  contient exactement un bloc non nul  $Y(t_i^{-1}gt_j)$  (car pour chaque  $i = 1, \dots, l$  il y a exactement un élément de  $H$  dans la liste  $t_1^{-1}gt_i, t_2^{-1}gt_i \dots t_l^{-1}gt_i$  et de même pour les lignes).

Si  $\chi$  est le caractère de la représentation  $X$ , on note  $\chi \downarrow_H^G(h)$  le caractère de  $X \downarrow_H^G$  et  $\chi \uparrow_H^G(h)$  le caractère de  $X \uparrow_H^G$ .

Le cas particulier des représentations induites qui va nous servir est  $1 \uparrow_H^G$ .

Rappelons que si  $\{t_1, \dots, t_l\}$  est une transversale de  $H$ , alors le module  $\mathbb{C}[t_1H, \dots, t_lH]$  est isomorphe à la représentation de permutation associée à  $H$ . Les matrices  $(z_{ij})$  de cette représentation sont données par

$$z_{ij}(g) = \begin{cases} 1, & gt_jH = t_iH \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 12.26.** Soit  $Y$  la représentation unité de  $H$  (i.e.  $Y(h) = 1$  pour chaque  $h \in H$ ). Alors les matrices de  $1 \uparrow_H^G$  sont identiques à celles de la représentation de permutation associée à  $H$ .

*Démonstration.* Soient  $(y_{ij})$  et  $(z_{ij})$  les matrices pour ces représentations respectivement. Les éléments de ces matrices sont les zéros et les unités par les définitions de  $1 \uparrow_H^G$  et de la représentation de permutation. De plus,  $y_{ij}(g) = 1 \Leftrightarrow t_i^{-1}gt_j \in H \Leftrightarrow gt_jH = t_iH \Leftrightarrow z_{ij} = 1$ .

Donnons quelques propriétés importantes de  $Y \uparrow_H^G$ .

**Proposition 12.27.** Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ , soit  $Y$  une représentation de  $H$ .

1.  $Y \uparrow_H^G$  ne dépend pas de la transversale, c'est-à-dire que si  $\{t_1, \dots, t_l\}$  et  $\{s_1, \dots, s_l\}$  sont les transversales donnant les représentations induites  $X = Y_1 \uparrow_H^G$  et  $Z = Y_2 \uparrow_H^G$  respectivement, alors  $X$  et  $Z$  sont isomorphes.

2. (Réciprocité de Frobenius)

Soient  $\psi$  et  $\chi$  les caractères de  $H$  et  $G$  respectivement. Alors,

$$\langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle \quad (12.4)$$

*Démonstration.* 1. Il suffit de montrer que les caractères des représentations  $X$  et  $Z$  sont égaux. Soit  $\chi$  le caractère de  $X$ ,  $\psi$  le caractère de  $Y$ , et  $\phi$  le caractère de  $Z$ .

Alors  $\chi(g) = \sum_i \text{Tr} Y(t_i^{-1}gt_i) = \sum_i \psi(t_i^{-1}gt_i)$ , où la somme est prise sur les  $i$  tels que  $t_i^{-1}gt_i \in H$ . De même,  $\phi(g) = \sum_i \psi(s_i^{-1}gs_i)$ .

Comme  $\{t_1, \dots, t_l\}$  et  $\{s_1, \dots, s_l\}$  sont des transversales, on peut supposer, que  $t_iH = s_iH$ ,  $i = 1, \dots, l$  et alors  $t_i$  et  $s_i$  sont dans la même classe à gauche de  $H$  et donc  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(s_i^{-1}gs_i)$ , d'où  $\chi(g) = \phi(g)$ .

2. Soit  $\{t_1, \dots, t_l\}$  une transversale. Notons que si  $h \in H$ , alors  $\psi(t_i^{-1}gt_i) = \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih)$ . Par suite,

$$\psi \uparrow_H^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_i \sum_{h \in H} \psi(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \psi(x^{-1}gx).$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle \psi \uparrow_H^G(h), \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi \uparrow_H^G(g) \chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \psi(x^{-1}gx) \chi(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(xy^{-1}x^{-1}) \quad [\text{en posant } y = x^{-1}gx] \\ &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi(y) \chi(y^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \chi(y^{-1}) = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

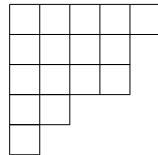
## 13 Représentations du groupe symétrique

### 13.1 Tableaux d'Young

Dans cette section il s'agit de construire toutes les représentations irréductibles (à isomorphisme près) du groupe symétrique. De façon générale le nombre de représentations irréductibles d'un certain groupe (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de ce groupe. Dans le cas du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  c'est le nombre de partitions de  $n$ . On écrit  $\lambda \vdash n$  pour la partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ,  $n = |\lambda| = \sum_i \lambda_i$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ . Une méthode pour visualiser une partition est la notion de diagramme de Ferrer.

**Définition 13.1.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ . Le diagramme de Ferrer  $t$  de forme  $\lambda$  est un tableau avec  $l$  lignes, tel que la  $i^e$  ligne contienne  $\lambda_i$  cases,  $i = 1, \dots, l$ .

Par exemple, pour  $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$  on a le diagramme suivant



Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ , cette partition correspond à un certain sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$ , en l'occurrence à

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1, 2, \dots, \lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_l+1, n-\lambda_l+2, \dots, n\}}.$$

On l'appelle le sous-groupe de Young correspondant à  $\lambda \vdash n$ .

L'idée qui vient naturellement pour construire les représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_n$  est

de considérer d'abord la représentation induite  $1 \uparrow_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_n}$ . D'après le paragraphe précédent le module de cette représentation est

$$\mathbb{C}[\pi_1 \mathcal{S}_\lambda, \dots, \pi_k \mathcal{S}_\lambda] \stackrel{\text{def}}{=} V^\lambda,$$

où  $\pi_1, \dots, \pi_k$  est une transversale de  $\mathcal{S}_\lambda$ .

Maintenant, pour obtenir l'action de  $\mathcal{S}_n$  sur les tableaux ou sur les diagrammes de Ferrer, introduisons les notions suivantes.

**Définition 13.2.** Soit  $\lambda \vdash n$ . Remplaçons les cases d'un diagramme de Ferrer de forme  $\lambda$  par les nombres  $1, 2, \dots, n$  bijectivement. Le tableau ainsi obtenu est *un tableau d'Young* de forme  $\lambda$ .

Si  $\lambda = (3, 1)$  alors des exemples de tableaux d'Young de forme  $\lambda$  sont

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 2 & & \end{array}.$$

**Définition 13.3.** On dit que deux tableaux  $t_1$  et  $t_2$  de même forme  $\lambda$  sont équivalents et on note  $t_1 \sim t_2$  si chaque ligne de  $t_1$  contient les mêmes éléments que la ligne correspondante de  $t_2$ . On appelle *tabloïde* une classe d'équivalence pour cette relation et on note  $\{t\}$  le tabloïde associé à  $t$ .

Si  $\lambda = (2, 1)$ ,  $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$ , alors

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & \end{array} \right\} = \overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}}$$

Si  $t$  est un tableau d'Young de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ , alors le nombre de tableaux dans la classe  $\{t\}$  est égal à  $\lambda_1! \cdots \lambda_l! \stackrel{\text{def}}{=} \lambda!$ . Ainsi le nombre de  $\lambda$ -tabloïdes est  $\frac{n!}{\lambda!}$ .

Maintenant on peut considérer l'action du groupe symétrique sur l'ensemble de tabloïdes de forme  $\lambda$ , en posant

$$\pi\{t\} = \{\pi t\}, \quad \pi \in \mathcal{S}_n.$$

Cette action est bien définie, i.e. ne dépend pas du choix du représentant de  $\{t\}$ . Il en découle la notion de  $\mathcal{S}_n$ -module suivant.

**Définition 13.4.** Soit  $\lambda \vdash n$ . Soient  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  tous les  $\lambda$ -tabloïdes. Alors,

$$M^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$$

est *un module de permutation* correspondant à  $\lambda$ .

Dans la suite on aura besoin d'encore une définition.

**Définition 13.5.** Soit  $M$  un  $G$ -module. Il est dit *cyclique* s'il existe  $v \in M$  tel que  $Gv = \{gv, g \in G\}$  engendre linéairement  $M$ . On dit aussi que  $M$  est *engendré par  $v$* .

Donnons quelques propriétés de  $M^\lambda$ .

**Proposition 13.6.** 1.  $M^\lambda$  est cyclique, engendré par un  $\lambda$ -tabloïde quelconque. De plus

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}.$$

2.  $V^\lambda$  et  $M^\lambda$  sont isomorphes comme  $\mathcal{S}_n$ -modules.



*Démonstration.* 1. Il suffit de noter que  $\mathcal{S}_n$  agit transitivement sur l'ensemble des  $\lambda$ -tabloïdes.

2. Puisque  $M^\lambda$  est cyclique, il est engendré comme  $\mathcal{S}_n$ -module par un tabloïde  $\{t\}$  quelconque. Si  $\pi_1, \dots, \pi_k$  est une transversale de  $\mathcal{S}_\lambda$ , alors l'application  $\theta : V^\lambda \rightarrow M^\lambda : \pi_i \mathcal{S}_\lambda \mapsto \{\pi_i t\}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}_n$ -modules.  $\square$

### 13.2 Modules de Specht

Soit  $\lambda \vdash n$  et soit  $t$  un tableau d'Young de forme  $\lambda$ . On s'intéresse aux éléments de  $\mathcal{S}_n$  qui stabilisent  $t$  d'une certaine manière.

**Définition 13.7.** Soient  $R_1, \dots, R_l$  les lignes d'un tableau  $t$ , soient  $C_1, \dots, C_k$  ses colonnes. Alors

$$R_t = \mathcal{S}_{R_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{R_l}$$

est le stabilisateur des lignes de  $t$  et

$$C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}$$

est le stabilisateur des colonnes de  $t$ .

Ce sont des sous-groupes de  $\mathcal{S}_n$ . En général, si  $H \subseteq \mathcal{S}_n$  et si  $\mathcal{S}_n$  agit sur un espace vectoriel  $X$ , alors une des méthodes pour étudier l'action de  $H$  sur  $X$  est de considérer les sommes  $H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi$  et  $H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)\pi$ . Si  $H = \{\pi\}$ , on écrit simplement  $\pi^-$  au lieu de  $H^-$ . Dans le cas des  $\lambda$ -tabloïdes, considérons

$$k_t \stackrel{\text{def}}{=} C_t^- = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

Notons que si  $C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}$ , alors  $k_t = k_{C_1} \cdots k_{C_k}$ .

**Définition 13.8.** Soit  $t$  un tableau, alors le polytabloïde associé est

$$\mathbf{e}_t = k_t \{t\}.$$

Par exemple, si  $t = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array}$ , alors  $k_t = (e - (3, 4))(e - (1, 5))$  et

$$\mathbf{e}_t = \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \end{array}}$$

**Définition 13.9.** Soit  $\lambda \vdash n$ . Le Module de Specht  $S^\lambda$  est le sous-module de  $M^\lambda$ , engendré par tous les polytabloïdes  $\mathbf{e}_t$ , où  $t$  est de forme  $\lambda$ .

**Proposition 13.10.** Soit  $t$  un tableau,  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Alors,

1.  $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$ ,
2.  $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ ,
3.  $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$ ,
4.  $\mathbf{e}_{\pi t} = \pi \mathbf{e}_t$ ,
5.  $S^\lambda$  est cyclique, engendré par un  $\lambda$ -polytabloïde quelconque.

*Démonstration.* Les assertions (1), (2) et (3) se démontrent de la même manière. Démontrons (1) :

$$\sigma \in R_{\pi t} \Leftrightarrow \sigma\{\pi t\} = \{\pi t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi\{t\} = \{t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi \in R_t \Leftrightarrow \sigma \in \pi R_t \pi^{-1}.$$

Pour (4) on a  $\mathbf{e}_{\pi t} = k_{\pi t}\{\pi t\} = \pi k_t \pi^{-1}\{\pi t\} = \pi k_t\{t\} = \pi \mathbf{e}_t$ , d'où on déduit (5).  $\square$

On a maintenant introduit tous les objets nécessaires pour énoncer le théorème suivant.

**Théorème 13.11.** *Les  $S^\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  énumèrent toutes les représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, les  $S^\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  sont des  $\mathcal{S}_n$ -modules irréductibles deux à deux non isomorphes et tout  $\mathcal{S}_n$ -module irréductible est isomorphe à l'un d'entre eux.*

*Pour le démontrer on a besoin de développer la machinerie appropriée. D'abord on aura besoin de l'unique produit scalaire sur  $M^\lambda$  tel que*

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}$$

*Ce produit scalaire existe car  $M^\lambda = \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$ , où  $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$  est une liste de tous les  $\lambda$ -tabloïdes, donc pour définir le produit scalaire sur  $M^\lambda$  il suffit de le définir pour les  $\lambda$ -tabloïdes  $\{t\}$  et  $\{s\}$ . Notons que ce produit scalaire est  $\mathcal{S}_n$ -invariant, car pour  $\pi \in \mathcal{S}_n$  on a  $\{t\} = \{s\} \Leftrightarrow \{\pi t\} = \{\pi s\}$ .*

**Lemme 13.12. Lemme du signe**

Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$ .

1. Si  $\pi \in H$ , alors

$$\pi H^- = H^- \pi = (\text{sgn } \pi) H^-,$$

d'où  $\pi^- H^- = H^-$ .

2. Si  $u, v \in M^\lambda$ , alors

$$\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$$

3. Si la transposition  $(b, c)$  appartient à  $H$ , alors on peut factoriser  $H^-$  par  $(e - (b, c))$ , c'est-à-dire écrire  $H^- = k(e - (b, c))$ , où  $k \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ .

4. Si  $t$  est un tableau, si  $b$  et  $c$  sont dans la même ligne de  $t$  et si  $(b, c) \in H$ , alors  $H^- \{t\} = 0$ .

*Démonstration.* 1.  $\pi H^- = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma = \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\pi \sigma) \pi \sigma = \sum_{\tau = \pi \sigma \in H} \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\tau) \tau = (\text{sgn } \pi) H^-$  et de même pour  $H^- \pi$ .

2. Comme  $\langle \pi u, \pi v \rangle = \langle u, v \rangle \forall \pi \in \mathcal{S}_n$ , on a  $\langle H^- u, v \rangle = \langle \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi u, v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi^{-1} v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi^{-1}) \pi^{-1} v \rangle = \langle u, \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi) \pi v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$ .

3. Soit  $K$  le sous-groupe  $\{e, (b, c)\}$  de  $H$ . On écrit  $H = \bigsqcup_i k_i K$ , où  $\{k_i\}$  est une transversale de  $K$ . Alors on peut factoriser  $H^- = \sum_i k_i^- (e - (b, c))$ .

4. On a  $(b, c)\{t\} = \{t\}$ , donc  $H^- \{t\} = k(e - (b, c))\{t\} = k(\{t\} - \{t\}) = 0$ .  $\square$

Une deuxième chose qui va nous servir est la notion d'ordre sur l'ensemble des partitions de  $n$ .

**Définition 13.13.** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \vdash n$ . On dit que  $\lambda$  domine  $\mu$  et on écrit  $\lambda \supseteq \mu$ , si

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

pour chaque  $i \geq 1$ . Si  $i > l$  on prend  $\lambda_i = 0$  et si  $i > m$  on prend  $\mu_i = 0$ .

**Lemme 13.14. Lemme de domination**

Soient  $t^\lambda$  et  $s^\mu$  tableaux des formes  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement. Si pour chaque  $i$  les éléments de la  $i$ -ième ligne de  $s^\mu$  sont dans les colonnes différentes de  $t^\lambda$ , alors  $\lambda \supseteq \mu$ .

*Démonstration.* On peut permuter les éléments de chaque colonne de  $t^\lambda$  de telle manière que les éléments des lignes  $1, 2, \dots, i$  de  $s^\mu$  soient dans les lignes  $1, 2, \dots, i$  de  $t^\lambda$ , d'où  $\lambda \supseteq \mu$ , car  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i$  et  $\mu_1 + \dots + \mu_i$  sont les nombres d'éléments dans les lignes  $1, 2, \dots, i$  de  $t^\lambda$  et  $s^\mu$  respectivement.  $\square$

Notons que si  $\lambda \supseteq \mu$ , alors  $\lambda \geq \mu$ , où " $\geq$ " signifie l'ordre lexicographique. Démontrons maintenant quelques corollaires du lemme du signe.

**Corollaire 13.15.** Soit  $\lambda, \mu \vdash n$ . Soient  $t = t^\lambda$  et  $s = s^\mu$  un  $\lambda$ -tableau et un  $\mu$ -tableau respectivement. Si  $k_t\{s\} \neq 0$ , alors  $\lambda \supseteq \mu$ . Si  $\lambda = \mu$ , alors  $k_t\{s\} = \pm \mathbf{e}_t$ .

*Démonstration.* Si  $b$  et  $c$  sont deux éléments dans la même ligne de  $s^\mu$ , alors ils sont dans des colonnes différentes de  $t^\lambda$ . Sinon par le lemme du signe on aurait  $k_t = k(e - (b, c))$  et  $k_t\{s\} = 0$ . Donc, d'après le lemme de domination,  $\lambda \supseteq \mu$ . Si  $\lambda = \mu$ , alors  $\{s\} = \{\pi t\}$  pour un certain  $\pi \in \mathcal{S}_n$  et alors  $k_t\{s\} = k_t\pi\{t\} = \pm \mathbf{e}_t$ . (La dernière égalité est claire si  $\pi$  est une transposition, donc pour tout  $\pi \in \mathcal{S}_n$ .)  $\square$

**Corollaire 13.16.** Si  $u \in M^\mu$  et  $t$  est un  $\mu$ -tableau, alors  $k_t u$  est un multiple de  $\mathbf{e}_t$ .

*Démonstration.* On a  $u = \sum_i c_i \{s_i\}$  où  $s_i$  sont des  $\mu$ -tableaux. Par ce qui précède,  $k_t u = \sum_i \pm c_i \mathbf{e}_t$   $\square$

Démontrons maintenant le résultat suivant, qui est plus fort que le théorème 13.11 et qui reste vrai lorsque le corps de base n'est plus  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 13.17. Théorème du sous-module**

Soit  $U$  un sous-module de  $M^\mu$ . Alors soit  $U \supseteq S^\mu$ , soit  $U \subseteq (S^\mu)^\perp$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in U$ , soit  $t$  un  $\mu$ -tableau. Par ce qui précède  $k_t u = f \mathbf{e}_t$  où  $f$  est un scalaire. Donc s'il existe  $u \in U$  et un  $\mu$ -tableau  $t$  tels que  $f \neq 0$  ( $f$  dépend de  $u$  et de  $t$ ), alors  $S^\mu \subseteq U$ , car  $k_t u \in U$ ,  $\mathbf{e}_t \in U$  et  $S^\mu$  est cyclique. Sinon, en appliquant le lemme du signe, on aurait pour chaque  $u \in U$  et pour chaque  $\mu$ -tableau  $t$   $\langle u, \mathbf{e}_t \rangle = \langle u, \mathbf{e}_t \rangle = \langle k_t u, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0$ , d'où  $U \subseteq (S^\mu)^\perp$ .  $\square$

Pour la suite on se place dans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 13.18.** Soit  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  non nul. Alors  $\lambda \supseteq \mu$  et si  $\lambda = \mu$ , alors  $\theta$  est une multiplication par un scalaire.

*Démonstration.* Comme  $\theta \neq 0$ , il existe un vecteur  $\mathbf{e}_t$  tel que  $\theta(\mathbf{e}_t) \neq 0$ . On peut prolonger  $\theta$  à un élément de  $\text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$  en posant  $\theta((S^\lambda)^\perp) = 0$ , ( $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$  sur  $\mathbb{C}$ ). Alors on a  $0 \neq \theta(\mathbf{e}_t) = \theta(k_t\{t\}) = k_t\theta(\{t\}) = k_t(\sum_i c_i \{s_i\})$ , où  $s_i$  sont des  $\mu$ -tableaux. Alors, par le corollaire 13.15 du lemme du signe,  $\lambda \supseteq \mu$ . Si  $\lambda = \mu$ ,  $\theta(\mathbf{e}_t) = c \mathbf{e}_t$  où  $c$  est une constante. Donc  $\theta$  est une multiplication par  $c$  sur  $S^\lambda$ , car  $S^\lambda$  est cyclique et

$$\theta(\mathbf{e}_{\pi t}) = \theta(\pi \mathbf{e}_t) = \pi \theta(\mathbf{e}_t) = \pi(c \mathbf{e}_t) = c \mathbf{e}_{\pi t}. \quad \square$$

Maintenant on est prêt à démontrer le théorème 13.11.

**Démonstration du théorème 13.11.** Par le théorème du sous-module, les  $S^\lambda$  sont irréductibles, car  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$  sur  $\mathbb{C}$ . Comme leur nombre est égal au nombre de représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_n$  (à isomorphisme près), il suffit pour conclure de démontrer que  $S^\lambda \cong S^\mu$  si  $\lambda \neq \mu$ . Supposons donc  $S^\lambda \cong S^\mu$ . Comme  $S^\mu \subseteq M^\mu$ , il existe un homomorphisme  $\theta \neq 0$ ,  $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . Par la proposition précédente  $\lambda \succeq \mu$ . De même  $\mu \succeq \lambda$ , donc  $\lambda = \mu$ .  $\square$

**Corollaire 13.19.**

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda, \quad \text{où les } m_{\lambda\mu} \text{ sont des nombres entiers.}$$

### 13.3 Tableaux standards et base de $S^\lambda$

En général, les polytabloïdes qui engendrent  $S^\lambda$  ne sont pas linéairement indépendants. On cherche donc ici à déterminer une sous-famille de polytabloïdes qui forment une base de  $S^\lambda$ .

**Définition 13.20.** Un tableau  $t$  est dit *standard* si ses lignes et ses colonnes sont croissantes. Dans ce cas, on dit aussi que les tabloïde et polytabloïde correspondants sont standards.

**Exemple 13.21.**

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array}$$

est standard, mais

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array}$$

ne l'est pas.

**Définition 13.22.** Une *composition* de  $n$  est un  $l$ -uplet d'entiers strictement positifs :

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$$

tel que  $\sum_i \lambda_i = n$ . Les entiers  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  sont appelés les *parties* de la composition. On étend de manière évidente les définitions de diagramme de Ferrer et de tableau pour les compositions. La relation de domination s'étend aussi clairement aux compositions.

**Définition 13.23.** Soit  $\{t\}$  un tabloïde de forme  $\lambda$ , partition de  $n$ . Pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , on définit :

$$\begin{aligned} \{t^i\} &= \text{le tabloïde formé des éléments de } \{t\} \text{ inférieurs à } i \\ \lambda^i &= \text{la composition qui est la forme de } \{t^i\} \end{aligned}$$

**Définition 13.24.** Soit  $\{s\}$  et  $\{t\}$  deux tabloïdes ayant pour suites de compositions  $\lambda^i$  et  $\mu^i$ , respectivement. On dit que  $\{s\}$  domine  $\{t\}$  si, pour tout  $i$ ,  $\lambda^i \succeq \mu^i$ .

**Lemme 13.25. Lemme de domination pour les tabloïdes**

Si  $k < l$ , et si  $k$  apparaît dans une ligne en-dessous de  $l$  dans  $\{t\}$ , alors,

$$\{t\} \triangleleft (k, l)\{t\}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $\{t\}$  et  $(k, l)\{t\}$  ont les suites de compositions  $\lambda^i$  et  $\mu^i$ . Alors, pour  $i < k$  ou  $i \geq l$ , on a  $\lambda^i = \mu^i$ .

Étudions maintenant le cas  $k \leq i < l$ . Si  $r$  et  $q$  sont les lignes de  $\{t\}$  dans lesquelles  $k$  et  $l$  apparaissent (respectivement), alors :

$$\lambda^i = \mu^i \text{ avec la } q^e \text{ partie diminuée de 1, et la } r^e \text{ augmentée de 1.}$$

Or, par hypothèse,  $q < r$ , on trouve donc  $\lambda^i \triangleleft \mu^i$ .

**Définition 13.26.** Si  $\mathbf{v} = \sum_i c_i \{\mathbf{t}_i\} \in M^\mu$ , on dit que  $\{\mathbf{t}_i\}$  apparaît dans  $\mathbf{v}$  si  $c_i \neq 0$ .

**Proposition 13.27.** Si  $t$  est standard, et si  $\{s\}$  apparaît dans  $\mathbf{e}_t$ , alors,  $\{t\} \supseteq \{s\}$ .

*Démonstration.* Écrivons  $s = \pi t$ , où  $\pi \in C_t$ , de sorte que  $\{t\}$  apparaît dans  $\mathbf{e}_t$ . On raisonne par récurrence sur le nombre d'inversions de colonne dans  $s$ , i.e. le nombre de paires  $k < l$  dans la même colonne de  $s$  telles que  $k$  apparaît plus bas que  $l$ . Si  $s$  n'a pas d'inversion,  $s = t$ . Ensuite, si  $(k, l)$  est une inversion,

$$\{s\} \triangleleft (k, l)s$$

d'après le lemme précédent. Comme  $(k, l)\{s\}$  a moins d'inversions que  $s$ ,  $(k, l)\{s\} \subseteq \{t\}$  ce qui achève la récurrence.

**Définition 13.28.** Soit  $(A, \geq)$  un ensemble partiellement ordonné. Un élément  $b \in A$  est appelé *maximum* si  $\forall c \in A, b \geq c$ . Un élément  $b$  est dit *maximal* s'il n'existe pas de  $c \in A$  vérifiant  $c > b$ .

**Lemme 13.29.** Soit  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  des éléments de  $M^\mu$ . Supposons que, pour chaque  $\mathbf{v}_i$ , on puisse choisir un tabloïde  $\{\mathbf{t}_i\}$  qui apparaît dans  $\mathbf{v}_i$  tel que :

1.  $\{\mathbf{t}_i\}$  est maximum dans  $\mathbf{v}_i$
2. les  $\{\mathbf{t}_i\}$  sont tous distincts.

Alors,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  sont linéairement indépendants.

*Démonstration.* Quitte à permuter les indices, on peut supposer que  $\mathbf{t}_1$  est maximal parmi les  $\mathbf{t}_i$ . Alors,  $\mathbf{t}_1$  ne peut apparaître que dans  $\mathbf{v}_1$ . Par suite, toute combinaison linéaire :

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_m \mathbf{v}_m = 0$$

doit vérifier  $c_1 = 0$  car il n'y a pas d'autre moyen d'annuler le coefficient de  $\{\mathbf{t}_1\}$ . On conclut par récurrence.

**Théorème 13.30.** La famille  $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$  est linéairement indépendante.

*Démonstration.* Par la proposition 7,  $\{t\}$  est maximum dans  $\mathbf{e}_t$ , et, par hypothèse, les éléments de  $\mathcal{F}$  sont distincts, donc le lemme précédent s'applique.

On veut maintenant montrer que cette famille est une base de  $S^\lambda$ ; il reste donc à prouver qu'elle engendre  $S^\lambda$ .

**Définition 13.31.** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoints d'entiers positifs. On choisit des permutations  $\pi$  telles que :

$$\mathcal{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi} \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B).$$

L'élément de Garnir correspondant est :

$$g_{A,B} = \sum_{\pi} (\text{sgn } \pi) \pi.$$

**Définition 13.32.** Soit  $t$  un tableau et  $A$  et  $B$  des parties des colonnes  $j$  et  $j+1$  respectivement. L'élément de Garnir associé à  $t$  (et  $A, B$ ) est  $\sum_{\pi} (\text{sgn } \pi)$ , où les  $\pi$  ont été choisis de sorte que les éléments de  $A \cup B$  croissent quand on descend les colonnes de  $\pi t$ .

**Proposition 13.33.** Soit  $t$ ,  $A$  et  $B$  comme dans la définition précédente. Si  $|A \cup B|$  est strictement supérieur au nombre d'éléments dans la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $t$ , alors,  $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \mathbf{e}_t = 0$ .

Soit  $\sigma \in C_t$ , quelconque. D'après les hypothèses, il existe  $a, b \in A \cup B$  tels que  $a$  et  $b$  sont dans la même ligne de  $\sigma t$ . Mais alors,  $(a, b) \in \mathcal{S}_{A \cup B}$  donc  $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \{\sigma \mathbf{t}\} = 0$ , grâce au lemme du signe. Comme ceci vaut pour tout  $\sigma$  apparaissant dans  $\kappa_t$ , on a bien,  $\mathcal{S}_{A \cup B}^- \mathbf{e}_t = 0$ .

Or,  $\mathcal{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi} \pi(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)$ , donc  $\mathcal{S}_{A \cup B}^- = g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^-$ . En substituant dans l'équation précédente, on trouve :

$$g_{A,B}(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^- \mathbf{e}_t = 0.$$

Mais  $(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B) \subset C_t$ , donc, pour  $\sigma \in \mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B$ , par le lemme du signe,

$$\sigma^- \mathbf{e}_t = \sigma^- C_t^- \{\mathbf{t}\} = C_t^- \{\mathbf{t}\} = \mathbf{e}_t.$$

Par suite,  $(\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B)^- \mathbf{e}_t = |\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B| \mathbf{e}_t$  donc  $g_{A,B} \mathbf{e}_t = 0$ .

**Définition 13.34.** Soit  $t$  un tableau, on définit son *tabloïde colonne* par :

$$[t] = C_t$$

i.e. l'ensemble des tableaux obtenus en réarrangeant les colonnes de  $t$ .

La relation de domination colonne pour les tabloïdes s'obtient de manière analogue à la relation de domination ligne (i.e. celle définie précédemment).

**Définition 13.35.** Soit  $t$  un tableau, on appelle *descente (de ligne)* de  $t$  un couple d'entiers  $(k, l)$ ,  $k < l$ , tel que  $k$  et  $l$  sont adjacents dans une ligne de  $t$ ,  $k$  apparaissant après  $l$ .

**Théorème 13.36.** La famille  $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$  engendre  $S^\lambda$ .

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que si  $\mathbf{e}_t$  est engendré par cette famille, alors,  $\mathbf{e}_s$  aussi, pour tout  $s \in [t]$  (en effet, on a alors  $s = \pi t$  où  $\pi \in C_t$ , donc  $\mathbf{e}_t = (\text{sgn } \pi) \mathbf{e}_s$ ). Ainsi, on peut supposer que les colonnes de  $t$  sont croissantes. L'ensemble partiellement ordonné des tabloïdes colonne admet un élément maximum  $[t_0]$ , où  $t_0$  s'obtient en numérotant les cases du tableau de haut en bas, en commençant par la colonne la

plus à gauche. Comme  $t_0$  est standard,  $\mathbf{e}_{t_0}$  est engendré par  $\mathcal{F}$ .

Soit maintenant  $t$  un tableau quelconque. Par récurrence, on suppose que tout tableau  $s \triangleright t$  est engendré par  $\mathcal{F}$ . Si  $t$  est standard, il n'y a rien à prouver. Sinon,  $t$  possède une descente dans une ligne notée  $i$  (puisque les colonnes sont croissantes). Notons aussi  $j$  et  $j+1$  les numéros des colonnes concernées par cette descente, et  $a_1 < \dots < a_p$ ;  $b_1 < \dots < b_q$  les entiers qu'elles contiennent, respectivement. On a donc :

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ & & \wedge \\ a_2 & & b_2 \\ & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \\ & & \wedge \\ a_i & > & b_i \\ \wedge & & \\ \vdots & & \vdots \\ \wedge & & b_q \\ a_p & & \end{array}$$

Prenons  $A = \{a_i, \dots, a_p\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_i\}$ . L'élément de Garnir associé  $g_{A,B}$  vérifie  $g_{A,B}\mathbf{e}_t = 0$ , donc :

$$\mathbf{e}_t = - \sum_{\pi \neq id} (\text{sgn } \pi) \mathbf{e}_{\pi t}.$$

Enfin,  $b_1 < \dots < b_i < a_i < \dots < a_p$  implique que  $[\pi t] \triangleright [t]$  pour  $\pi \neq id$ , grâce à l'analogue colonne du lemme de domination pour les tabloïdes. L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

**Théorème 13.37.** *Résumons les résultats que nous avons obtenus : soit  $f^\lambda$  le nombre de  $\lambda$ -tableaux standards, alors,*

1. La famille  $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$  est une base de  $S^\lambda$ .
2.  $\dim S^\lambda = f^\lambda$
3.  $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$

### 13.4 Représentation naturelle de Young

Les matrices de la représentation  $S^\lambda$  dans la base standard constituent ce qu'on appelle la représentation naturelle de Young. Dans cette partie, nous allons montrer comment obtenir ces matrices.

Comme  $\mathcal{S}_n$  est engendré par les transpositions de la forme  $(k, k+1)$ , il suffit de calculer les matrices correspondant à ces éléments. Pour un tableau  $t$  donné, il y a trois possibilités :

1. Si  $k$  et  $k+1$  sont dans la même colonne, alors  $(k, k+1) \in C_t$  puis  $(k, k+1)\mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_t$ .
2. Si  $k$  et  $k+1$  sont dans la même ligne, alors  $(k, k+1)t$  a une descente dans cette ligne. On calcule donc  $(k, k+1)$  à l'aide des éléments de Garnir :  $(k, k+1)\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t + d'$  autres tabloïdes  $\mathbf{e}_{t'}$ , avec  $[t'] \triangleright [t]$ .
3. Si  $k$  et  $k+1$  ne sont ni dans la même ligne, ni dans la même colonne, alors  $t' = (k, k+1)t$  est standard et  $(k, k+1)\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{t'}$ .

Le  $\mathbf{e}_t$  dans la somme du deuxième cas provient du terme  $(k, k+1)$  dans l'élément de Garnir. Bien que nous n'ayons pas d'expression immédiate des autres polytabloïdes comme combinaisons linéaires de polytabloïdes standards, une application itérée de ces trois cas permet de les calculer.

### 13.5 La décomposition de $M^\mu$

Le but de ce paragraphe est de développer la méthode combinatoire qui permet de calculer les multiplicités  $m_{\lambda\mu}$  de  $S^\lambda$  dans  $M^\mu$  dans la décomposition  $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$ .

Pour cela, on introduit quelques nouveaux objets.

**Définition 13.38.** Un tableau d'Young généralisé  $T$  de forme  $\lambda$  est obtenu à partir du diagramme de Ferrer de forme  $\lambda$  en remplaçant les cases par des entiers, avec répétitions possibles. Le contenu de  $T$  est une composition de  $n$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ , où  $\mu_i$  est le nombre de répétitions de  $i$  dans  $T$ . On appellera désormais *tableau simple* un tableau d'Young non généralisé.

Par exemple le tableau  $T = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & \end{array}$  est de forme  $(3, 2)$  et de contenu  $(1, 0, 2, 2)$ .

Notons  $\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T \mid T \text{ est de forme } \lambda \text{ et de contenu } \mu\}$ .

On définit la classe d'équivalence  $\{T\}$  de la même façon que dans le cas des tableaux simples. Notons qu'un tableau d'Young généralisé de forme  $\lambda$  et de contenu  $(1^n)$  n'est rien d'autre qu'un tableau d'Young simple de forme  $\lambda$ . De manière générale, si  $t$  est un tableau et  $T$  est le tableau généralisé de même forme  $\lambda$ , alors on note  $T(i)$  l'élément de  $T$  qui est dans la même position que  $i$  dans  $t$ . Par exemple, si

$$T = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & \end{array}, t = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & \end{array}, \text{ alors } T = \begin{array}{ccc} T(1) & T(3) & T(5) \\ T(4) & T(2) & \end{array},$$

où  $T(1) = T(5) = 4$ ,  $T(2) = T(4) = 3$  et  $T(3) = 1$ .

Dans la suite on suppose qu'on a fixé un tableau  $t$  de forme  $\lambda$ , et donc on note  $T(i)$  les éléments de tout tableau généralisé  $T$  de même forme.

Maintenant, à chaque tabloïde  $\{s\}$  on va associer un tableau généralisé  $T$ , de sorte que la forme de  $\{s\}$  soit le contenu de  $T$  : si  $\{s\}$  est un tabloïde de forme  $\mu$ , posons  $T(i)$  le numéro de la ligne de  $\{s\}$  où  $i$  apparaît.

Par exemple, si  $\mu = (2, 2, 1)$ ,

$$s = \begin{array}{cc} \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{5} \\ \overline{2} & \end{array}, T = \begin{array}{ccc} T(1) & T(3) & T(5) \\ T(4) & T(2) & \end{array}, \text{ alors } T = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & \end{array}$$

Comme le nombre de répétitions de  $i$  est égal au nombre d'éléments dans la  $i^e$  ligne de  $\{s\}$ , le contenu de  $T$  est égal à  $\mu$ . Notons que l'application ainsi définie  $\theta : \{s\} \mapsto T$  est une bijection entre les bases de  $M^\mu$  et de  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ . L'application inverse associe à  $T$  donné un tabloïde  $\{s\}$  tel que la  $i^e$  ligne de  $\{s\}$  contienne les éléments  $j$  tels que  $T(j) = i$ .

Définissons une structure de  $\mathcal{S}_n$ -module sur  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  en posant  $\pi T(i) \stackrel{\text{def}}{=} T(\pi^{-1}i)$ .

**Proposition 13.39.**  $M^\mu \cong \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  en tant que  $\mathcal{S}_n$ -modules, où  $\lambda$  est une partition fixée.

*Démonstration.* On doit vérifier que  $\theta(\pi\{s\}) = \pi T$ . Or  $\theta(\pi\{s\})(i)$  est le numéro de la ligne de  $\pi\{s\}$  où  $i$  apparaît, i.e. le numéro de la ligne de  $\{s\}$  où  $\pi^{-1}i$  apparaît, i.e.  $T(\pi^{-1}i)$ , donc  $\theta(\pi\{s\})(i) = T(\pi^{-1}i) = \pi T(i)$ .  $\square$

Dans la suite on identifie  $M^\mu$  et  $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ .

Rappelons que la multiplicité de  $S^\lambda$  dans  $M^\mu$  est égale à  $\dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ . Pour calculer cette dimension on va construire une base de  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ .



**Définition 13.40.** Soit  $t$  un  $\lambda$ -tableau fixé,  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ . Le morphisme correspondant à  $T$  est l'application  $\theta_T \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$  donnée par

$$\theta_T(g\{t\}) = g\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

Pour obtenir un élément de  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$  on considère  $\overline{\theta_T}$ , la restriction de  $\theta_T$  à  $S^\lambda$ . Alors pour le tableau fixé  $t$  on a :

$$\overline{\theta_T}(\mathbf{e}_t) = \overline{\theta_T}(k_t\{t\}) = k_t(\theta_T\{t\}) = k_t\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

**Proposition 13.41.** Soit  $t$  un  $\lambda$ -tableau fixé,  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ . Alors  $k_t T = 0$  si et seulement si  $T$  possède deux éléments égaux dans la même colonne.

*Démonstration.* Si  $k_t T = 0$ , alors  $T + \sum_{\substack{\pi \in C_t \\ \pi \neq e}} (\text{sgn}(\pi))\pi T = 0$ , donc il existe  $\pi \in \mathcal{S}_n$  tel que

$\text{sgn}(\pi) = -1$  et  $T = \pi T$ . Alors les éléments correspondant aux cycles non triviaux de  $\pi$  sont tous égaux et sont tous dans la même colonne.

Pour la réciproque supposons que  $T(i) = T(j)$ , où  $T(i)$  et  $T(j)$  sont dans la même colonne de  $T$ . Alors par le lemme du signe on peut factoriser :

$$k_t T = k(e - (i, j))T = k(T - T) = 0. \quad \square$$

Ce résultat nous permet d'introduire la notion de tableau semistandard de la manière naturelle suivante.

**Définition 13.42.** Un tableau d'Young généralisé est dit *semistandard* si les éléments de ses lignes sont croissants et les éléments de ses colonnes sont strictement croissants. On note  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$  l'ensemble des tableaux semistandards de forme  $\lambda$  et de contenu  $\mu$ .

**Proposition 13.43.** L'ensemble  $\{\overline{\theta_T} \mid T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$  est une base de  $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ .

*La preuve de cette proposition utilise les mêmes idées que dans le cas de  $S^\lambda$ , on l'omet.*

*Maintenant on peut calculer les multiplicités  $m_{\lambda\mu}$  de  $S^\lambda$  dans  $M^\mu$  dans la décomposition  $M^\mu = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$  en utilisant une méthode combinatoire.*

**Définition 13.44.** Les nombres de *Kostka* sont

$$K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|.$$

**Théorème 13.45. Loi d'Young**

*La multiplicité de  $S^\lambda$  dans  $M^\mu$  est égale au nombre de tableaux semistandards de forme  $\lambda$  et de contenu  $\mu$ , i.e.*

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} K_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

*Donnons quelques exemples.*

1. Soit  $\mu = (3, 1, 1)$ . Alors pour  $\lambda \geq \mu$  on a toutes les partitions  $\lambda$  possibles et les tableaux généralisés semistandards associés :

$$\lambda = (3, 1, 1) : \quad T = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{array}$$

$$\lambda = (3, 2) : T = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

$$\lambda = (4, 1) : T = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & & & \end{array} \quad \text{ou} \quad T = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & & & \end{array}$$

$$\lambda = (5) : T = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$D'où M^{(3,1,1)} = S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$$

2. Pour chaque  $\mu$  on a  $K_{\mu\mu} = 1$ . Or le seul tableau généralisé semistandard de forme  $\mu$  et de contenu  $\mu$  est le tableau avec tous les éléments de la  $i$ -ième ligne égaux à  $i$ .

### 13.6 Loi de la ramification ("Branching rule")

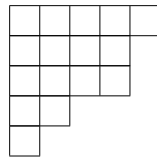
Pour le groupe symétrique  $S_n$  la liste de toutes les représentations irréductibles est  $\{S^\lambda, \lambda \vdash n\}$ . Il est assez naturel de regarder les représentations induites ou restreintes. D'abord on introduit la notion de restriction et d'extension pour les diagrammes.

Soit  $t$  un diagramme de Ferrer de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ . On note

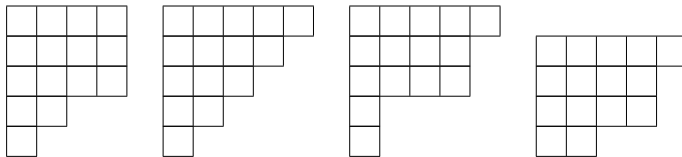
1.  $(i, j)$  la case de  $t$  à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne,
2.  $t - (i, j)$  le tableau obtenu à partir de  $t$  en supprimant l'élément  $(i, j)$ ,
3.  $t + (i, j)$ ,  $(i, j) \notin t$  le tableau obtenu à partir de  $t$  en ajoutant un élément à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne.

**Définition 13.46.** Soit  $t$  un diagramme de Ferrer de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ . Le coin  $(i, j) \in t$  de ce diagramme est dit *intérieur* si  $t - (i, j)$  est encore un diagramme de Ferrer (i.e. la suite des nombres des éléments dans les lignes  $1, 2, \dots, l$  est décroissante). Le coin  $(i, j) \notin t$  de ce diagramme est dit *extérieur* si  $t + (i, j)$  est encore un diagramme de Ferrer. On note  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  les partitions correspondantes à  $t - (i, j)$  et  $t + (i, j)$  respectivement. Pour indiquer que la partition  $\lambda^-$  est obtenue à partir de  $\lambda$ , on écrira  $\lambda^- \leftarrow \lambda$ . De même, on écrira  $\lambda^+ \leftrightarrow \lambda$ .

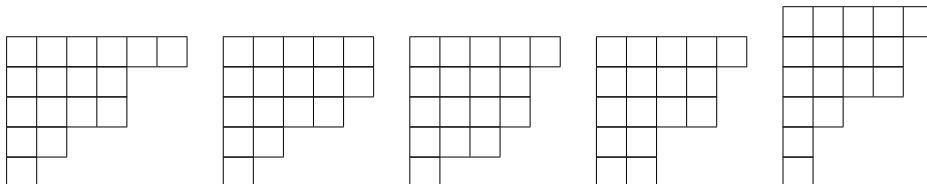
Par exemple, si  $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$ , on a le diagramme suivant



Les coins intérieurs sont  $(1, 5), (3, 4), (4, 2)$  et  $(5, 1)$ . On a les diagrammes ainsi obtenus :



Les coins extérieurs sont  $(1, 6), (2, 5), (4, 3), (5, 2)$  et  $(6, 1)$ . On a les diagrammes ainsi obtenus :



**Théorème 13.47. "Branching rule"**

Soit  $\lambda \vdash n$ . Alors,

1.  $S^\lambda \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}^{\mathcal{S}_n} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}$
2.  $S^\lambda \uparrow_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$

Ce résultat permet de comprendre la structure de  $\mathcal{S}_n$ -module  $S^\lambda$ . En particulier, il contient tous les  $S^{\lambda^-}$  sans multiplicités.

Avant de donner la preuve du théorème 13.47 démontrons quelques résultats préliminaires.

**Lemme 13.48.** Soit  $f^\lambda = \dim S^\lambda$ , soit  $f^{\lambda^-} = \dim S^{\lambda^-}$ ,  $\lambda^- \hookrightarrow \lambda$ . Alors,

$$f^\lambda = \sum_{\lambda^- \hookrightarrow \lambda} f^{\lambda^-}$$

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_t, t \text{ est standard}\}$  est une base de  $S^\lambda$ ,  $f^\lambda$  est égal au nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ . Chaque tableau standard  $t$  contient  $n$  dans un de ses coins intérieurs  $(i_t, j_t)$  (car les éléments de ses lignes et de ses colonnes sont croissants). Notons que le tableau  $t - (i_t, j_t)$  est un tableau standard de la forme  $\lambda^-$  correspondante. Donc donner un tableau standard  $t$  de forme  $\lambda$  est équivalent à donner un coin intérieur  $(i_t, j_t)$  du diagramme de Ferrer correspondant à  $\lambda$  et un tableau standard  $t'$  de forme  $\lambda^-$ . Le résultat en découle.  $\square$

**Lemme 13.49.** Soit  $V$  un  $G$ -module, soit  $W$  un sous-module de  $V$  (i.e. stable par l'action de  $G$ ). Alors,

$$V \cong W \oplus (V/W),$$

où  $V/W$  est l'espace quotient.

*Démonstration.*  $V/W$  est effectivement un  $G$ -module pour l'action  $g[v] \stackrel{\text{def}}{=} [gv]$ , où  $g \in G$ ,  $[v] \in V/W$  est une classe de  $v \in V$  (cette action est bien définie car  $W$  est un sous-module de  $V$ ).

Comme  $V$  n'est pas irréductible, il existe un sous-module  $W'$  de  $V$  tel que  $V = W \oplus W'$ . Soit  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$  une base de  $W$ , soit  $\epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_m$  une base de  $W'$ . Alors  $[\epsilon_{k+1}], \dots, [\epsilon_m]$  est une base de  $V/W$ , d'où  $V/W \cong W'$  et  $V \cong W \oplus (V/W)$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 13.47.**

1. Supposons que les coins intérieurs de  $\lambda$  apparaissent dans les lignes  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  et dans les colonnes  $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ . Notons  $t^i = t - (r_i, c_i)$ , et  $\lambda^i$  la partition correspondante. On veut montrer que  $S^\lambda \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}^{\mathcal{S}_n} \cong \bigoplus_{i=1}^k S^{\lambda^i}$ .

D'après le lemme 13.49, il suffit de construire une chaîne de sous-espaces  $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^k = S^\lambda$  avec  $V^i \setminus V^{i-1} \cong S^{\lambda^i}$  en tant que  $\mathcal{S}_{n-1}$ -modules,  $1 \leq i \leq k$ .

Soit  $V^i$  l'espace vectoriel de base

$$\{\mathbf{e}_t\}, n \text{ n'apparaît que dans les lignes } r_1, \dots, r_i \text{ de } t.$$

Montrons que les  $V^i$  conviennent.

Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , considérons les applications  $\theta_i : M^\lambda \rightarrow M^{\lambda^i}$ ,

$$\theta_i(\{t\}) = \begin{cases} \{t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i \text{ de } \{t\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On étend  $\theta_i$  par linéarité sur tout  $M^\lambda$ .

Notons que  $\mathcal{S}_{n-1}$  agit sur l'ensemble des tableaux de forme  $\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  en permutant les éléments  $1, \dots, n-1$ . Donc  $\mathcal{S}_{n-1}$  ne change pas la position de  $n$  dans un tableau, d'où  $\theta_i$  est un  $\mathcal{S}_{n-1}$ -homomorphisme.

De plus,  $V^{(i-1)} \subseteq \ker \theta_i$ .

Soit  $t \in V^{(i)}$  standard. Regardons  $V^{(i)}$  comme un  $\mathcal{S}_{n-1}$ -module. Comme  $\mathbf{e}_t = k_t\{t\}$ , (où  $k_t = C_t^-$ ,  $C_t$  est le stabilisateur des lignes de  $t$  ( $C_t \subset \mathcal{S}_{n-1}$ )), pour chaque tabloïde apparaissant dans  $\mathbf{e}_t$ ,  $n$  n'apparaît que dans la  $j$ -ième ligne avec  $j \leq i$ . De plus, la position de  $n$  dans chaque tabloïde apparaissant dans  $\mathbf{e}_t$  est la même et ne dépend que de  $t$ . D'où

$$\theta_i(\mathbf{e}_t) = \begin{cases} \mathbf{e}_{t^i}, & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i \text{ de } t \\ 0, & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_j \text{ de } t, j < i \end{cases}$$

Donc  $\theta_i$  envoie une base de  $V^{(i)}$  sur une base de  $S^{\lambda^i}$  surjectivement. D'où  $\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}$ .

Comme  $V^{(i-1)} \subseteq \ker \theta_i$ , on peut construire une chaîne

$$\{0\} = V^0 \subseteq V^1 \cap \ker \theta_1 \subseteq V^1 \subseteq V^2 \cap \ker \theta_2 \subseteq V^2 \subseteq \dots \subseteq V^k = S^\lambda$$

De plus,  $\dim S^\lambda = \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} + \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}}$ .

Puisque  $\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}$ , on a l'égalité des dimensions :

$$\dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} = \dim \theta_i V^{(i)} = f^{\lambda^i}$$

D'après le lemme 13.48,  $f^\lambda = \dim S^\lambda = \sum_{i=1}^k f^{\lambda^i}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim S^\lambda &= \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} + \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \\ &= \sum_{i=1}^k f^{\lambda^i} + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \\ &= \dim S^\lambda + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}}. \end{aligned}$$

D'où  $V^{(i)} \cap \ker \theta_i = V^{(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Donc on a bien une chaîne  $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^k = S^\lambda$  avec

$$\frac{V^i}{V^{i-1}} \cong \frac{V^i}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} \cong S^{\lambda^i}$$

2. On démontre cette partie à l'aide de la machinerie développée pour les caractères.

Soit  $S^{\lambda \uparrow \mathcal{S}_n^{n+1}} \cong \bigoplus_{\mu \vdash n+1} m_\mu S^\mu$ . Alors  $\chi^{\lambda \uparrow \mathcal{S}_n^{n+1}} \cong \sum_{\mu \vdash n+1} m_\mu \chi^\mu$ .

Donc pour calculer les  $m_\mu$  on peut utiliser l'orthogonalité des caractères et la loi de la réciprocity de Frobenius. On a

$$\begin{aligned} m_\mu &= \langle \chi^{\lambda \uparrow \mathcal{S}_n^{n+1}}, \chi^\mu \rangle = \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \downarrow \mathcal{S}_n^{n+1} \rangle = [\text{d'après la partie 1}] = \langle \chi^\lambda, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda = \mu^- \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = [\text{par définition de } \mu^- \text{ et de } \lambda^+] = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \lambda^+ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

## 14 La formule des crochets

Il existe une méthode très simple pour calculer  $f^\lambda$  (nombre de  $\lambda$ -tableaux standards), et c'est ce que nous allons étudier dans cette partie.

**Définition 14.1.** Si  $v = (i, j)$  est un noeud dans le diagramme de  $\lambda$ , le *crochet* correspondant est :

$$H_v = H_{i,j} = \{(i, j') | j' \geq j\} \cup \{(i', j) | i' \geq i\}.$$

La longueur du crochet est  $h_v = h_{i,j} = |H_{i,j}|$ .

**Théorème 14.2. Formule des crochets**

Si  $\lambda \vdash n$ , alors :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}.$$

Pour prouver ce théorème, on définit un algorithme (probabiliste) de construction d'un  $\lambda$ -tableau standard, dont on montrera qu'il donne un  $\lambda$ -tableau standard  $P$  quelconque avec probabilité :

$$\text{prob}(P) = \frac{\prod h_{i,j}}{n!}.$$

Ceci prouve le théorème, puisque la distribution est uniforme. L'algorithme est le suivant :

Prendre un noeud  $v \in \lambda$  avec une probabilité  $\frac{1}{n}$ .

**Tant que**  $v$  n'est pas un coin intérieur **faire**

Prendre un noeud  $\bar{v} \in H_v - \{v\}$  avec une probabilité  $\frac{1}{(h_v-1)}$ .

$v := \bar{v}$

**fait**

Mettre  $n$  dans le coin auquel on est arrivé.

Recommencer l'algorithme au début avec  $\lambda := \lambda - \{v\}$  et  $n := n - 1$  jusqu'à ce que toutes les cases de  $\lambda$  soient remplies.

**Définition 14.3.** La suite de noeuds par lesquels on passe lors d'un passage dans la boucle intérieure de l'algorithme est appelée un *passage*.

**Proposition 14.4.** L'algorithme précédent produit un tableau standard  $P$  de forme  $\lambda$  avec une probabilité  $\frac{\prod_{v \in \lambda} h_v}{n!}$ .

*Démonstration.* Il est clair que l'algorithme produit un  $\lambda$ -tableau standard. Pour montrer que tous les tableaux sont obtenus avec la même probabilité, on raisonne par récurrence sur  $n$ .

Soit  $P$  un  $\lambda$ -tableau,  $w$  la case contenant  $n$ , et  $\bar{P}$  le tableau obtenu en supprimant  $w$  de  $P$  (de forme  $\bar{\lambda}$ ). On a alors :

$$\text{prob}(P) = \text{prob}(w) \text{prob}(\bar{P})$$

où  $\text{prob}(w)$  est la probabilité qu'un passage se termine sur  $w$ . Par récurrence, il suffit de montrer que :

$$\text{prob}(w) = \frac{\prod_{v \in \lambda} h_v / n!}{\prod_{\bar{v} \in \bar{\lambda}} h_{\bar{\lambda}} / (n-1)!}.$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{prob}(w) &\stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{v \in W} \frac{h_v}{h_v-1} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{v \in W} \left(1 + \frac{1}{h_v-1}\right) \end{aligned}$$

où  $W = \{v \neq w \mid w \in H_v\}$   
 $= \{v \neq w \mid v \text{ est dans la même ligne ou dans la même colonne que } w\}$ .

Notons  $(\alpha, \beta)$  les coordonnées de  $W$ , et posons  $a_i = h_{i,\beta} - 1$  et  $b_j = h_{\alpha,j} - 1$ . En injectant dans l'équation précédente, on trouve :

$$\text{prob}(w) = \text{prob}(\alpha, \beta) \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \prod_{j=1}^{\beta-1} \left(1 + \frac{1}{b_j}\right) \quad (*)$$

Pour interpréter les termes de cette équation, on définit, pour un passage qui se termine en  $(\alpha, \beta)$ , la *projection horizontale* du passage par :

$$I = \{i \neq \alpha \mid v = (i, j) \text{ pour un certain } v \text{ dans le passage}\}.$$

On définit de même la *projection verticale*. Notons  $\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta)$  la probabilité d'arriver en  $(\alpha, \beta)$  après un passage de projections horizontale et verticale  $I$  et  $J$  respectivement. On a donc  $\text{prob}(\alpha, \beta) = \sum_{I,J} \text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta)$ .

Pour obtenir  $(*)$  (donc la proposition puis la formule des crochets), il suffit de montrer le lemme suivant :

**Lemme 14.5.** *Soit  $(\alpha, \beta)$ ,  $I = \{i_1, \dots\}$  et  $J = \{j_1, \dots\}$ . Alors,*

$$\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \prod_{i \in I} \frac{1}{a_i} \prod_{j \in J} \frac{1}{b_j}.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $I$  ou  $J$  est vide. Par exemple,  $J = \emptyset$ . Alors, le seul passage possible est

$$v_1 = (i_1, \beta), v_2 = (i_2, \beta), \dots$$

donc  $\text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) = \frac{1}{na_{i_1}a_{i_2}\dots}$  et le résultat est vrai.

Supposons maintenant  $I, J \neq \emptyset$ . Alors,  $v_1 = (i_1, j_1)$ , et il y a exactement deux possibilités pour  $v_2$  à savoir  $(i_2, j_1)$  et  $(i_1, j_2)$  (en posant  $i_2 = \alpha$  si  $|I| = 1$  et de même pour  $j_2$ ). Soit  $\bar{I} = I - \{i_1\}$  et  $\bar{J} = J - \{j_1\}$ . Alors, par récurrence sur  $|I \cup J|$ ,

$$\begin{aligned} \text{prob}_{I,J}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{h_{i_1, j_1} - 1} [\text{prob}_{\bar{I}, J}(\alpha, \beta) + \text{prob}_{I, \bar{J}}(\alpha, \beta)] \\ &= \frac{1}{h_{i_1, j_1}} \left[ \frac{1}{na_{i_1}a_{i_2}\dots b_{j_1}b_{j_2}\dots} + \frac{1}{na_{i_1}a_{i_2}\dots \bar{b}_{j_1}b_{j_2}\dots} \right] \\ &= \frac{a_{i_1} + b_{j_1}}{h_{i_1, j_1}} \left[ \frac{1}{na_{i_1}a_{i_2}\dots b_{j_1}b_{j_2}\dots} \right] \end{aligned}$$

où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  signifie que le terme est omis.

Or,

$$h_{i_1, j_1} - 1 = (h_{i_1, \beta} - 1) + (h_{\alpha, j_1} - 1) = a_{i_1} + b_{j_1}$$

ce qui achève la preuve. □

## 15 Conclusion

Nous avons donc établi une correspondance (canonique) entre les classes de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$  et ses représentations irréductibles sur le corps des complexes. De plus nous avons montré une utilisation simple de la construction des modules de Specht pour calculer facilement les dimensions de ces représentations.

## Références

- [1] B.E Sagan, *The Symmetric Group*.
- [2] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*.