K-théorie

Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A.

K-théorie

Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A.

Étant donné un corps k, le groupe K_2k coïncide avec le groupe de K-théorie de Milnor $K_2^M k$, quotient de $k^* \otimes_{\mathbb{Z}} k^*$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a \otimes b$ avec $a + b = 1$. Le groupe $K_q^M k$ est le quotient de $\underbrace{k^* \otimes \ldots \otimes k^*}_{\text{q fois}}$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a_1 \otimes \ldots \otimes a_q$ avec $a_i + a_j = 1$ pour certains $1 \leq i < j \leq q$.

K-théorie

Lorsque X est une variété lisse sur un corps k, la conjecture de Gersten, établie par Quillen, permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ comme les groupes de cohomologie du complexe de Gersten. Lorsque $j = 2$, ce complexe s'écrit

$$K_2 k(X) \stackrel{d_2}{\to} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k(x)^* \stackrel{d_1}{\to} \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z},$$

où l'application d_2 est donnée par le symbole modéré et l'application d_1 est obtenue par la somme des flèches diviseurs après normalisation des variétés considérées. On a ainsi $H^0(X, \mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\, d_2$ et $H^1(X, \mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\, d_1 / \mathrm{Im}\, d_2$.

Pour X une variété lisse sur un corps k on a une flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2). \tag{1}$$

En effet, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
k(X)^* \otimes k^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k^* & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \otimes k^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \phi \downarrow & & & & \\
K_2 k(X) & \xrightarrow{d_2} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k(x)^* & \xrightarrow{d_1} & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

où la première ligne est obtenue à partir de la suite exacte définissant le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ par tensorisation avec k^*. On vérifie que la composé $d_1 \circ \phi$ vaut zéro, ce qui permet de définir la flèche $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ par chasse au diagramme.

Modules des cycles

Soit k un corps, soit X un k-schéma équidimensionnel.
On peut voir un **module de cycles** comme un foncteur $M : Corps \to Ab$, $M = \coprod M_q$, qui satisfait certains axiomes (existence des analogues de restriction, corestriction, résidus, multiplication par K_1 et compatibilités entre ces applications).
Exemples.

- $M_H(F) = \coprod_q H^q(F, \mu_{l^r}^{\otimes q})$.
- $M_K(F) = \coprod_q K_q^M(F)$.

Complexes et groupes de Chow

Les groupes $C^i(X, M) := \coprod_{x \in X^{(i)}} M(\kappa(x))$ forment un complexe

$$C(X, M) = [\ldots \to C^i(X, M) \to C^{i+1}(X, M)) \to \ldots]$$

et on note

$$A^i(X, M) = H^i(C(X, M)).$$

Exemples.

- Le groupe de Chow $CH^i(X)$ est un facteur direct de $A^i(X, M_K)$.
- Pour X lisse, d'après Bloch-Ogus, on a $A^i(X, M_H) = \coprod_q H^i(X, \mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes q}))$, où $\mathcal{H}^q(\mu_{l^r}^{\otimes q})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^q(U, \mu_{l^r}^{\otimes q})$.

Propriétés

1. Pour $f : Y \to X$ propre, on a $f_* : A^i(Y, M) \to A^{i-d_f}(X, M)$ où $d_f = dim\, Y - dim\, X$ est la dimension relative de f (pour simplifier, pour X et Y intègres).
2. Pour $f : Y \to X$ un morphisme plat, on a $f^* : A^i(X, M) \to A^i(Y, M)$. Si X et Y sont lisses, on a $f^* : A^i(X, M) \to A^i(Y, M)$ pour $f : Y \to X$ quelconque.
3. **Localisation**. Pour $Y \xrightarrow{\imath_Y} X$ un fermé purement de codimension c et $U = X \setminus Y \overset{\imath_U}{\hookrightarrow} X$ son complémentaire, on a une longue suite exacte
$$\dots \xrightarrow{\partial} A^{i-c}(Y, M) \xrightarrow{\imath_{Y*}} A^i(X, M) \xrightarrow{\imath_U^*} A^i(U, M) \xrightarrow{\partial} A^{i-c+1}(Y, M) \to \dots$$
4. **Invariance homotopique**. Pour $\pi : \mathbb{A}^n_X \to X$ la projection naturelle, l'application $\pi^* : A^i(X, M) \to A^i(\mathbb{A}^n_X, M)$ est un isomorphisme.

Cohomologie motivique

Pour k un corps, X un k-schéma lisse et A un groupe abélien (le plus souvent $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n$), on a des complexes des faisceaux $A_X(n)_{\acute{e}t}$ (resp. $A_X(n)$ pour le complexe de faisceaux de Zariski), définis à partir du complexe de cycles de Bloch $z^n(X, \cdot)$.
On note $\mathbb{H}^i_{\acute{e}t}(X, A_X(n))$ (resp. $\mathbb{H}^i(X, A_X(n))$) l'hypercohomologie de ce complexe.
Pour $n = 0$ on a $\mathbb{Z}_X(0) = \mathbb{Z}$.
Pour $n = 1$ le complexe $\mathbb{Z}_X(1)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{G}_m[-1]$.
Pour X quasi-projectif et lisse, on a
$CH^n(X, 2n - i) \simeq \mathbb{H}^i(X, \mathbb{Z}_X(n))$.

Formules en degré 1

Pour k un corps, X/k une variété lisse on a

$$\mathbb{H}^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(1)) = \begin{cases} 0 & i \leq 0 \\ A^0(X, \mathcal{K}_1) = k[X]^* & i = 1 \\ A^1(X, \mathcal{K}_1) = CH^1(X) = Pic(X) & i = 2 \\ Br(X) & i = 3. \end{cases}$$

Formules en degré 2

Pour k un corps, X/k une variété lisse on a

$$\mathbb{H}^i_{ét}(X, \mathbb{Z}_X(2)) = \begin{cases} 0 & i \leq 0 \\ K_3(k(X))_{ind} & i = 1 \\ A^0(X, \mathcal{K}_2) & i = 2 \\ A^1(X, \mathcal{K}_2) & i = 3. \end{cases}$$

Ici on définit $K_3(L)_{ind} = Coker(K_3^M(L) \to K_3^Q(L))$.

Complexe $\mathbb{Z}_f$

Soient G un groupe algébrique semi-simple sur un corps k,
C le noyau de $G^{sc} \to G$
$f : X \to Y$ un G-torseur, avec Y lisse géometriquement irréductible. On a un morphisme dans la catégorie dérivée $D^+(Sh(Y))$ (dont les objets sont des complexes des faisceaux sur Y)

$$\mathbb{Z}_Y(i) \to Rf_*\mathbb{Z}_X(i)$$

que l'on complète en un triangle exact

$$\mathbb{Z}_Y(i) \to Rf_*\mathbb{Z}_X(i) \to \mathbb{Z}_f(i) \to \mathbb{Z}_Y(i)[1] \tag{2}$$

Hypercohomologie en degré 1

Le triangle exacte

$$\mathbb{Z}_Y(i) \to Rf_*\mathbb{Z}_X(i) \to \mathbb{Z}_f(i) \to \mathbb{Z}_Y(i)[1]$$

donne une suite exacte longue d'hypercohomologie.
Comme déjà mentionné, le complexe $\mathbb{Z}_X(1)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{G}_m[-1]$. Pour $i = 1$ on obtient donc la suite exacte de Sansuc :

$$1 \to k[Y]^* \to k[X]^* \to \hat{G} \to Pic\ Y \to Pic\ X \to Pic\ G \to Br\ Y \to Br\ X, \tag{3}$$

Hypercohomologie en degré 2

L'article " Weight two motivic cohomology of classifying spaces for semi-simple groups" de Merkurjev étend la suite (3) en degré 2. Le théorème principal dit que pour G un groupe algébrique semi-simple sur un corps k, C le noyau de $G^{sc} \to G$, $f : X \to Y$ un G-torseur, avec Y lisse géometriquement irréductible on a une suite exacte

$$0 \to A^0(Y, \mathcal{K}_2) \to A^0(X, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\alpha} (\hat{C} * k^\times) \xrightarrow{\sigma_f^*} A^1(Y, \mathcal{K}_2) \to A^1(X, \mathcal{K}_2) \tag{4}$$

où $\hat{C} * k^\times = Tor_1^{\mathbb{Z}}(\hat{C}, k^\times)$, et qu'on a le diagramme commutatif, dont la suite verticale et horizontale sont exactes (toujours pour G un groupe algébrique semi-simple sur un corps k, C le noyau de $G^{sc} \to G$, $f : X \to Y$ un G-torseur, avec Y lisse géometriquement irréductible)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathbb{H}^{\mathbf{1}}_{\acute{e}t}(Y, \hat{C}(\mathbf{1})) \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma_f^*"] & & \\
A^{\mathbf{1}}(Y, \mathcal{K}_{\mathbf{2}}) \arrow[r] & A^{\mathbf{1}}(X, \mathcal{K}_{\mathbf{2}}) \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma"] & \mathbb{H}^{\mathbf{3}}_{\acute{e}t}(Y, \mathbb{Z}_f(2)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^{\mathbf{4}}_{\acute{e}t}(Y, \mathbb{Z}_Y(2)) \arrow[r] & \mathbb{H}^{\mathbf{4}}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_X(2)) \\
 & & D(G) \arrow[d] & & \\
 & & \mathbb{H}^{\mathbf{2}}_{\acute{e}t}(Y, \hat{C}(\mathbf{1})) & &
\end{tikzcd}$$

Les groupe $\hat{C}(1)$ et $D(G)$

- $\hat{C}(1) = (\hat{C} * \mu) \oplus (\hat{C} \otimes \mathbb{G}_m)[-1]$;
- sur la clôture séparable k_{sep} de k on peut définir $D(G_{sep}) = coker(Pic(G_{sep}) \otimes k_{sep}^* \to A^1(G_{sep}, \mathcal{K}_2))$, puis on pose $D(G) = D(G_{sep})(k)$. On peut donner une autre définition de $D(G_{sep})$ en termes de réseaux et systèmes des racines. On montre que les deux définitions sont équivalentes en utilisant la suite spectrale dans le contexte de modules des cycles de Rost, pour G, T et l'espace principal homogène G/T.
- par la même méthode, on montre que $\hat{C}(k_{sep}) * \mu = coker(K_2(k_{sep}) \to A^0(G_{sep}, \mathcal{K}_2))$.

Application : cohomologie de BG

Théorème

- $H^i(BG, \mathbb{Z}(2)) = H^i(U/G, \mathbb{Z}(2))$ (avec une modification pour la p-partie en caractéristique p) ne dépend pas de choix de U/G (comme dans les paragraphes 1,2 de la première partie.)
- $H^i(BG, \mathbb{Z}(2)) \simeq A^{i-2}(BG, \mathcal{K}_2) \simeq \begin{cases} K_2(k) & i = 2 \\ \hat{C} * \mu(k) & i = 3. \end{cases}$

Remarque. On a aussi une suite exacte qui exprime $H^4(BG, \mathbb{Z}(2)$ en termes de $H^i(F, \hat{C}(1))$.
Pour obtenir $A^i(BG, \mathcal{K}_2)$ il suffit de prendre un G-torseur $U \to U/G$ avec $U \subset V$, $codim_V(V \setminus U) \geq 3$, on a alors que $A^i(U, \mathcal{K}_2) \overset{\sim}{\leftarrow} A^i(V, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$ si $i = 0$, et zéro sinon. Ensuite on applique la suite (4) à $U \to U/G$.