Exposé 2, le 13 Mai 2015
Espaces classifiants et cohomologie motivique, outils des preuves.
(Alena Pirutka)

1 Torseurs et espaces classifiants

1.1 Torseurs

Soit k un corps et soit G un groupe algébrique linéaire sur k.

Définition 1.1. On dit qu'une variété X munie d'un morphisme fidèlement plat $X \to Y$ et de l'action $G \times X \to G$ de G est un *G-torseur* (ou un espace principal homogène sous G) si l'on a un isomorphisme $G \times_k X \simeq X \times_Y X$.

Proposition 1.2. *Pour tout $s > 0$ il existe une représentation linéaire V de G et un ouvert non vide $U \subset V$, qui est G-stable et tel que*

1. *le complémentaire $V \setminus U$ est de codimension $\geq s$;*
2. *il existe un morphisme $\pi : U \to U/G$ tel que U est un G-torseur sur U/G via π.*

Démonstration. Soit $G \subset GL_n$ une représentation linéaire de G. On construit U comme l'ouvert des matrices de rang n dans $M_{n,n+N}$ pour N grand (la condition sur la codimension est alors évidente). Voir [2] 9.2. pour les détailles.

□

Définition 1.3. On dit qu'un G-torseur $E \to X$ est un torseur classifiant si pour toute extension des corps K/k avec K infini et pour tout G-torseur $Z \to Spec\, K$ il existe un point $x : Spec\, K \to X$ (non nécessairement unique !) tel que Z est isomorphe au torseur $E_x \to Spec\, K$ obtenu par changement de base par x. Dans ce cas on appelle la fibre générique $E_{k(X)} \to Spec\, k(X)$ *le torseur générique* on le note souvent E_{gen}.

Proposition 1.4. *Il existe un torseur classifiant pour tout groupe G.*

Démonstration. voir [3] : il suffit de prendre $X = GL_n/G$ (ce quotient existe toujours) pour une représentation linéaire $G \hookrightarrow GL_n$. On a clairement que $E = GL_n \to X$ est un G-torseur. Si $Z \to Spec\, K$ est un G-torseur, la suite exacte

$$GL_n(K) \to X(K) \to H^1(K, G) \to 0$$

donne le point x comme préimage de l'élément correspondant à Z.

□

Notons que dans la preuve de la proposition précédente l'on peut aussi choisir un plongement $G \subset U = GL_{n,k}$ de telle sorte que G agit sur l'espace affine $V = M_{n,k}$. On appelle le torseur classifiant ainsi construit un *torseur classifiant standard.*

La notion d'un torseur classifiant est très utile, pour l'étude des invariants, comme le montre la construction qui suit. Soit $H : Fields/k \to Ab$ un foncteur. On définit

$$\theta : Inv(G, H) \to H(F(X)), i \mapsto i(E_{gen}).$$

Supposons que H possède la propriété suivante :

$$(inj)\ H(K) \hookrightarrow H(K((t))) \text{ pour toute extension } K/k.$$

Cette propriété est vraie pour la cohomologie galoisienne à coéfficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$.

Proposition 1.5. *Si H possède la propriété (inj) alors tout invariant dans $Inv(G, H)$ est déterminé par sa valeur en torseur générique (i.e. l'application θ est injective).*

Démonstration. Soit i dans le noyau de θ. Soit $I \to Spec\, K$ un G-torseur, K/k est une extension. On veut montrer que $i(I) \in H(K)$ est nul. Puisque H vérifie (inj), il suffit de montrer que $i(I_L) = 0$ pour $L = K((t_1, \dots t_n))$. On trouve un tel L comme le corps des fractions du complété $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ où x correspond à I, en utilisant que $H^1(K, G) = H^1(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}, G)$ (c'est vrai pour tout groupe lisse et l'anneau local hensélien). Voir [1], A-I pour plus de détailles.

1.2 Espaces classifiants et groupes cosimplicials

(voir l'appendice A-IV de [1] pour cette partie)

Définition 1.6. Un groupe cosimplicial $A^\bullet$ est la donnée d'une suite de groupes abéliens

$$A^0 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} A^1 \rightrightarrows \dots$$

On note $h_i(A^\bullet)$ les groupes de cohomologie d'un complexe simple associé (où les différentielles sont les sommes alternées), par exemple $h_0(A^\bullet) = ker(d_0 - d_1)$.
On dit qu'un groupe cosimplicial $A^\bullet$ est *constant* si toutes les différentielles de $A^\bullet$ sont des isomorphismes. On a alors $h_0(A^\bullet) = A^0$ et $h_i(A^\bullet) = 0, i > 0$.

Lemme 1.7. Soit $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to D^\bullet$ une suite exacte des groupes cosimpliciaux avec $A^\bullet$ constant. Alors on a une suite exacte

$$0 \to A^0 \to h_0(B^\bullet) \to h_0(C^\bullet) \to h_0(D^\bullet).$$

Exemple. Soit $U \to U/G$ un torseur classifiant construit comme dans la section précédente. On dispose d'une action diagonale de G sur U^i (i>0) et du quotient U^i/G. Soit $H : Sch/k \to Ab$ un foncteur contravariant. On a alors le complexe cosimplicial $A^\bullet = H(U^\bullet/G)$ où les flèches sont induites par des projections

$U^{i+1}/G \to U^i/G$. Comme expliqué dans la section précédente, le torseur universel n'est a priori pas unique. Dans ce qui suit on permet néanmoins définir $H(U/G)$ indépendemment de choix de U.

Considérons les propriétés suivantes pour un foncteur contravariant $H : Sch/k \to Ab$ (on remplace eventuellement Sch/k par Sm/k où l'on ne considère que des schémas lisses) :

(IH) Pour tout fibré vectoriel $F \to X$ on a un isomorphisme $H(X) \tilde{\to} H(F)$.

(P^i) Pour toute immersion ouverte $U \to X$ dont le complémentaire est de codimension au moins i on a un isomorphisme $H(X) \tilde{\to} H(U)$.

Comme exemple d'un tel foncteur on peut prendre les groupes de chow $H = CH^j$ où les groupes de cohomologie étale $H^j(\cdot, \mu_n^{\otimes r})$ (exercice : trouver i tel que P^i vaut pour ces foncteurs !).

Proposition 1.8. *Soit H un foncteur qui satisfait les propriétés (IH) et (P^i). Soit $U \to U/G$ un torseur classifiant, où $U \subset V$ est un ouvert dans une représentation linéaire V de G avec $V \setminus U$ de codimension $\geq i$.*

1. *Le groupe cosimplicial $H(U^\bullet/G)$ est constant.*
2. *Si $U' \subset V'$ est un autre ouvert dans une représentation linéaire V' avec la même condition que $V' \setminus U'$ est de codimension $\geq i$, alors l'application $H(U/G) \to H(U \times U'/G)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On montre d'abord la deuxième assertion : en effet, d'après les conditions sur G, on a une suite d'isomorphismes $H(U/G) \to H((U \times V')/G) \to H(U \times U')/G)$. On applique mantenant cette assertion au G-torseur $U^i \to U^i/G$ et $U' = U$: on a donc que les applications $H(U^i/G) \to H(U^{i+1}/G)$ induites par des projections $U^{i+1}/G \to U^i/G$ sont des isomorphismes. □

D'après la deuxième partie de la proposition ci-dessus, sous les conditions de cette proposition, la valeur $H(U/G)$ ne dépend pas du choix de U. On dit alors que c'est la valeur de H en l'espace classifiant BG de G :

$$H(BG) := H(U/G).$$

2 Éléments équilibrés et invariants non-ramifiés

D'après les résiltats précédents, tout invariant est determiné par sa valeur en torseur générique (si le foncteur H satisfait la propriété d'injectivité (inj)). On s'intéresse alors à la contruction inverse : trouver un invariant à partir d'un élément de $H(k(X))$ où $E_{gen} \to Spec\, k(X)$ est un torseur générique. Pour cela il est utilie d'introduire les éléments équilibrés. Ensuite, dans le cas où les invariants sont à valeurs dans la cohomologie non ramifiée on obtient un résultat de bijectivité.

Soit G un groupe algébrique sur k, supposé connexe si k est fini. Soit $E \to X$ un G-torseur. On écrit p_1 et p_2 pour les deux projections $E \times E/G \to X$. Soit

H un foncteur contravariant de la catégorie des schémas intègres sur k, avec les morphimes dominants, dans Ab.

Définition 2.1. On dit qu'un élément $h \in H(X)$ est *équilibré* si $p_1^*(h) = p_2^*(h)$. On définit $H(X)_{bal} \subset H(X)$ comme sous-groupe d'éléments équilibrés.

On voit d'après la définition que $H(X)_{bal} = h_0(H(E^\bullet/G))$.

Cette notion est faite pour avoir la propriété suivante :

Lemme 2.2. *Soient $h \in H(X)_{bal}$, K/k une extension, $I \to Spec\, K$ un G -torseur. Soit $x \in X(K)$ un point tel que $I \simeq E_x$. Alors $x^*(h) \in H(K)$ ne dépend pas du choix de x.*

Démonstration. laissée en exercice, voir [1] 3.2. □

Le lemme ci-dessus perme de construire une application

$$H(X)_{bal} \to Inv(G, H).$$

En effet, si $h \in H(X)_{bal}$ et K/k une extension avec K infini et $I \to Spec\, K$ un G-torseur, on trouve $x \in X(K)$ correspondant à I et on définit $i_h(I) = x^*(h)$. Si K est fini, alors tout G-torseur est trivial car G est connexe.

Considérons maintenant le cas où $H(K) = H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (souvent on se restreint à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)$ pour $\ell \neq car\, k$ dans le cas de la caractéristique positive). Supposons qu'on dispose d'une valuation discrète (de rang un) v sur K, triviale sur k, dont on note A_v l'anneau de valuation et $\kappa(v)$ le corps résiduel. On dispose alors des flèches résidus

$$\partial_v : H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to H^{n-1}(\kappa(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j-1)).$$

On note

$$H^n_{nr}(K, \mathbb{Q}/Z(j)) = \bigcap_v ker(\partial_v).$$

Un invariant $i \in Inv(G, H^n(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)))$ a valeurs dans $H^n_{nr}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour tout K est *non ramifié*. On note $Inv^n_{nr}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ le groupe de ces invariants non ramifiés.

On donne deux propriétés de ces groupes qui nous sont importantes pour la suite :

1. Si K/k est une extension transcedente pure, alors $H^n_{nr}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$. Plus généralement, on a la même conclusion si K est tel que $K(t_1, \dots t_n)/k$ est une extension transcendente pure (i.e. K est le corps des fonctions d'une variété stablement rationnelle.
2. La valeur $H^n_{nr}(k(U/G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ ne dépend pas de choix de torseur classifiant $U \to U/G$, on écrit alors

$$H^n_{nr}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) := H^n_{nr}(k(U/G), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

Proposition 2.3. *On a un isomorphisme*

$$Inv^n_{nr}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{\sim} H^n_{nr}(F(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

induit par l'évaluation en torseur générique.

Démonstration. Voir [1] 5.2. □

Cette proposition nous donne une motiviation à étudier les invariants non-ramifiés. En effet, c'est une question ouverte à savoir si la variété U/G est stablement rationnelle pour G un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos. D'après ce qui précède, s'il existe un invariant non ramifié non trivial, U/G ne peut pas être stablement rationnelle.

3 Invariants en dégré 2

(voir [1], 2c.)

Dans cette partie on s'intéresse à des invariants cohomologiques en degré 2, i.e. aux $Inv(G, Br)$.

Proposition 3.1. *Soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur k. Soit Y/k une variété lisse et géometriquement irréductible. Soit $X \to Y$ un G-torseur. On a une suite exacte :*

$$1 \to k[Y]^* \to k[X]^* \to \hat{G} \to Pic\, Y \to Pic\, X \to Pic\, G \to Br\, Y \to Br\, X, \qquad (1)$$

où $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{G}_m)$.

Démonstration. Cette suite a été démontrée par Sansuc dans [7] 6.10 (par une analyse d'une suite spectrale). □

Rappelons qu'on définit un sous-groupe $Inv(G, H)_{norm} \subset Inv(G, H)$ comme le groupe des invariants qui valent 0 sur le torseur trivial. La suite exacte de la proposition ci-dessus nous permet de définir une application

$$\delta : Pic\, G \to Inv(G, Br)_{norm}.$$

En effet, si $\alpha \in Pic\, G$ et $E \to Spec\, K$ est un torseur, on a une suite exacte

$$Pic\, E \to Pic\, G_K \xrightarrow{d} Br\, K \to Br\, E$$

et on peut donc définir $\delta(\alpha) : E \mapsto d(\alpha_K)$.

Théorème 3.2. *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe, supposé réductif si k n'est pas parfait. L'application $\delta : Pic\, G \to Inv(G, Br)_{norm}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. L'assertion découle du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Pic\,G \arrow[r] \arrow[d] & Inv(G, Br)_{norm} \arrow[d] & \\
Pic\,U_{gen} \arrow[r] & Pic\,G_K \arrow[r] & Br\,K \arrow[r] & Br(K(U_{gen})).
\end{tikzcd}$$

où $U \to U/G$ est un torseur classifiant standard, $K = k(U/G)$, la suite en bas est obtenue de la proposition précédente et d'une injection $Br(U_{gen}) \hookrightarrow Br(K(U_{gen}))$. Dans ce diagramme, $Pic\,U_{gen} = 0$ d'après la construction de U et $Pic(G) \tilde{\to} Pic(G_K)$ est isomorphisme d'après le lemme ci-dessous. On déduit donc par chasse au diagramme que δ est surjectif et ensuite qu'il est injectif. □

Lemme 3.3. *Soit G/k un groupe algébrique connexe, supposé réductif si k n'est pas parfait. Alors pour tout extension de corps K/k on a un isomorphisme*

$$Pic(G) \tilde{\to} Pic(G_K).$$

Démonstration. voir [1] 2.3. □

Références

[1] Blinstein, Merkurjev : Cohomological invariants of algebraic tori.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : The rationality problem for fields of invariants of linear algebraic groups, Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.

[3] S. Garibaldi, A. Merkurjev and J-P. Serre, Cohomological Invariants in Galois Cohomology, American Mathematical Society University Lecture Series, volume 28, 2003

[4] Merkurjev : Weight two motivic cohomology of classifying spaces for semisimple groups.

[5] Merkurjev : Degree three cohomological invariants of semi-simple groups.

[6] Merkurjev : Unramified degree three invariants of reductive groups

[7] J.-J. Sansuc : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. (French) [The Brauer group and arithmetic of linear algebraic groups on a number field] J. Reine Angew. Math. 327 (1981), 12–80.