THÉORIE DES GROUPES. — Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind.

Note de **Yevsey A. Nisnevich**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Remise le 21 novembre 1983, acceptée le 12 mars 1984.

Démonstration d'une conjecture sur la trivialité locale de Zariski des G-torseurs rationnellement triviaux d'un schéma en groupes semi-simple G sur un schéma régulier X dans le cas où X est de dimension 1 ou est hensélien local.

GROUP THEORY. — Rationally Trivial Principal Homogeneous Spaces and Arithmetic of Reductive Group Schemes Over Dedekind Rings.

A conjecture on the Zariski local triviality of rationally trivial G-torsors for a semisimple group scheme G *over a regular scheme* X *is proved when* X *is one-dimensional or henselian local.*

1. LA CONJECTURE SUR LES TORSEURS RATIONNELLEMENT TRIVIAUX. — Soient X un schéma noethérien régulier intègre, $K=k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X, G un schéma en groupes réductif sur X, E un espace principal homogène sous G sur X, localement trivial pour la topologie étale de X (i. e. un G-torseur). On dit que E est *rationnellement trivial* s'il a une section sur K.

Serre [11] et Grothendieck ([11], [6]), d'abord (1958) dans le cas d'égale caractéristique et plus tard dans le cas général, ont formulé la conjecture suivante :

CONJECTURE 1.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, tout* G-*torseur* E *rationnellement trivial est localement trivial pour la topologie de Zariski de* X.

Le but de cette Note est de prouver la conjecture pour un X-groupe G réductif arbitraire sur un schéma X de dimension 1, ou hensélien local de dimension arbitraire. La démonstration s'appuie sur la relation entre la cohomologie étale et certains invariants adéliques de G, établie dans [10]; elle donne aussi une décomposition et des propriétés d'approximation de G qui ont, nous l'espérons, un intérêt en eux-mêmes.

Soient η le point générique de X, $H^1(X_{Zar}, G)$ [resp. $H^1(X_{et}, G)$] le premier groupe de cohomologie en topologie de Zariski (resp. étale) de X à coefficients dans G, et $H^1(K, G)$ la cohomologie galoisienne de la fibre générique $G_\eta = G\otimes K$ de G.

La conjecture 1.1 équivaut à l'exactitude de la suite :

$$1 \to H^1(X_{Zar}, G) \to H^1(X_{et}, G) \xrightarrow{l(G)} H^1(K, G). \tag{1}$$

Ceci équivaut aussi à l'injectivité des flèches :

$$l(G\otimes_X \mathcal{O}_x):\quad H^1(\mathcal{O}_{x,et}, G) \to H^1(K, G), \tag{2}$$

pour tous les points $x\in X-\eta$, où $\mathcal{O}_x$ est l'anneau local en x.

2. MORPHISMES DE LOCALISATION ET ADÈLES. — Dans cette section on suppose que $X=\operatorname{Spec} R$ est un schéma affine intègre régulier noethérien de dimension 1, et que G est un schéma en groupes affine de type fini sur X de fibre générique $G_\eta = G\otimes_R K$ lisse.

Soient $v(x)$ la valuation de K correspondant au point fermé $x\in X$, $R_{v(x)}$ et $K_{v(x)}$ les complétions $v(x)$-adiques de R et K,

$$A(X)=\prod_{x\in X-\eta} R_{v(x)} \qquad \text{et} \qquad A=\varinjlim_{U\ni\eta} A(U),$$

0249-6321/84/02990005 $ 2.00 © Académie des Sciences

les anneaux d'adèles X-entiers et d'adèles de X (ici U parcourt l'ensemble des sous-schémas ouverts non vides de X). Soit $c(G)=G(A(X))\backslash G(A)/G(K)$ « l'ensemble de classes » de G, muni du point distingué correspondant à $G(A(X))G(K)$.

THÉORÈME 2.1 [10]. — (1) *Il existe une suite exacte d'ensembles pointés :*

$$1 \to c(G) \to H^1(X_{et}, G) \xrightarrow{\lambda(G)} H^1(K, G) \times \prod_{x \in X-\eta} H^1(R_{v(x), et}, G),$$

(2) *Si* $H^1(R_{v(x), et}, G)=0$ *pour tout* $x \in X-\eta$, *alors* $\operatorname{Im}\lambda(G)=Ш(X, G)$, *où :*

$$Ш(X, G)=\operatorname{Ker}(H^1(K, G) \to \prod_{x \in X-\eta} H^1(K_{v(x)}, G))$$

est l'ensemble de Tate-Shafarevich géométrique de G.

COROLLAIRE 2.2. — *Supposons que pour tout* $x \in X-\eta$, *l'application* $l(G \otimes_R R_{v(x)})$ *soit injective. Considérons les trois conditions suivantes :*

(1) *Pour tout* $x \in X-\eta$ *on a* $c(G \otimes_R \mathcal{O}_x)=0$.

(2) *La suite* (1) *est exacte.*

(3) *L'injection canonique* $\beta_G : H^1(X_{Zar}, G) \to c(G)$, *construite dans* [7] *et* [10], *est une bijection.*

Nous avons alors les implications suivantes : $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$. *Si* X *est le spectre d'un anneau local* R, *alors les conditions précédentes sont équivalentes.*

3. UNE DÉCOMPOSITION DES SCHÉMAS EN GROUPES RÉDUCTIFS. — Soient R un anneau de valuation discrète (non nécessairement complet) de valuation v et G un schéma en groupes réductif sur R.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* M *un* R-*groupe de type multiplicatif. Alors :*

$$M(K_v)=M(K)M(R_v).$$

Preuve. — Il est connu ([4], [9]), que pour un tel M, $\operatorname{Ker} l(M \otimes_R R_v)=\operatorname{Ker} l(M)=0$. Donc $c(M)=0$ d'après le corollaire 2.2.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* G *un schéma en groupes réductif sur* R. *Il existe alors une décomposition* $G(K_v)=G(K)G(R_v)$.

La preuve du théorème 3.2 s'appuie sur deux lemmes.

LEMME 3.3. — *Soit* T *un* R_v-*tore dans* G. *Alors* $T(K_v) \subset G(K)G(R_v)$.

Preuve. — On note d'abord que si T est un R-tore, on a :

$$T(K_v)=T(K)T(R_v) \subset G(K)G(R_v),$$

cf. prop. 3.1.

Soit maintenant T un R_v-tore quelconque. Puisqu'il est contenu dans un R_v-tore maximal, on peut supposer que T est maximal. On sait [8], que pour tout voisinage de l'unité $V \subset G(K_v)$ (dans la topologie v-adique) il existe un R-tore T_0 et un élément $g \in V$ tel que $T_0=gTg^{-1}$.

Par ailleurs il est montré dans [8] que l'adhérence $\overline{G(K)}$ de $G(K)$ dans $G(K_v)$ pour la topologie v-adique contient un sous-groupe ouvert N, normal dans $G(K_v)$. Choisissons $V \subset N \cap G(R_v)$. On a alors :

$$T(K_v)=g^{-1}T_0(K_v)g \subset g^{-1}G(K)G(R_v)g \subset \overline{G(K)}G(R_v)=G(K)G(R_v).$$

LEMME 3.4. — *Soit* P *un sous-groupe parabolique minimal de* G *sur* R_v. *Alors* $P(K_v) \subset G(K)G(R_v)$.

Preuve. — Soient L un sous-groupe de Levi de P sur R_v, T le R_v-tore déployé maximal du centre Z de L. Alors $L=Z_G(T)$ est le centralisateur de T dans G [2], et le quotient $H=L/T$ est un R_v-groupe réductif, anisotrope sur R_v. Puisque le R-schéma $\mathscr{P}=\mathrm{Par}(H)$ des sous-groupes paraboliques de H est propre sur R_v, on a $\mathscr{P}(K_v)=\mathscr{P}(R_v)$, donc H n'a pas non plus de sous-groupe parabolique (distinct de H) sur K_v, et H est anisotrope sur K_v.

Par un théorème dû à Bruhat-Tits-Rousseau [3] pour un tel groupe H, le groupe $H(K_v)$ est borné et $H(K_v)=H(R_v)$.

Puisque le tore T est R_v-déployé, on a $H^1(R_v, T)=H^1(K_v, T)=0$ par le théorème 90 de Hilbert, et les restrictions $\pi(R_v): L(R_v)\to H(R_v)$ [resp. $\pi(K_v): L(K_v)\to H(K_v)$] de la projection canonique $\pi: L\to H$ sur les points dans R_v (resp. K_v) sont surjectives. Il est facile de voir, en utilisant ces surjectivités et l'égalité $H(R_v)=H(K_v)$, que $L(K_v)=T(K_v)L(R_v)$. Puisque $T(K_v)\subset G(K)G(R_v)$ par le lemme 3.2, on obtient $L(K_v)\subset G(K)G(R_v)$.

Soit maintenant $U=\mathbf{R}^u(P)$ le radical unipotent de P et soit $N\subset\overline{G(K)}$ un des sous-groupes ouverts normaux de $G(K_v)$ construits par Harder [8]. Alors $N\cap U(K_v)$ est un sous-groupe ouvert normal de $U(K_v)$ normalisé par T, et donc il coïncide avec $U(K_v)$, i. e. $U(K_v)\subset N\subset\overline{G(K)}$. Finalement on a :

$$P(K_v)=U(K_v)L(K_v)\subset\overline{G(K)}\,G(K)G(R_v)=G(K)G(R_v).$$

3.5. *Preuve du théorème* 3.2. — Soient P un sous-groupe parabolique minimal de G sur R_v, P^- un sous-groupe parabolique opposé de G sur R_v, $U^-=\mathbf{R}^u(P^-)$ le radical unipotent de P^-. Utilisant la décomposition de Borel-Tits [2]

$$G(K_v)=U(K_v)U^-(K_v)P(K_v)$$

et les inclusions $P(K_v)\subset G(K)G(R_v)$ (lemme 3.4) et $U(K_v)$, $U^-(K_v)\subset\overline{G(K)}$ (*cf.* preuve de 3.4) on obtient :

$$G(K_v)\subset\overline{G(K)}\,\overline{G(K)}\,G(K)G(R_v)=\overline{G(K)}\,G(R_v)=G(K)G(R_v).$$

4. Preuve de la Conjecture 1.1 pour certaines classes de X. — Le théorème suivant est dû à J. Tits (non publié); sa démonstration utilise la théorie de Bruhat-Tits [3].

Théorème 4.1 (J. Tits). — *Soient* R *un anneau de valuation discrète complète et* G *un schéma en groupes semi-simple sur* R. *Alors l'application canonique* $l(G)$ *est injective.*

Théorème 4.2. — *Soient* X *un schéma intègre régulier noethérien de dimension* 1, *et* G *un schéma en groupes semi-simple sur* X. *Alors :*

(1) *La conjecture* 1.1 *est vraie pour* G.

(2) *Si* X *est affine,* $H^1(X_{Zar}, G)\xrightarrow{\sim}c(G)$.

Preuve. — Cela résulte de 4.1, 3.2 et 2.2.

Corollaire 4.3. — *Soient* $X=\operatorname{Spec}R$ *et* G *comme dans* 4.2 (2). *Supposons que, pour tout* $x\in X-\eta$, *on ait* $H^1(R_{v(x),et}, G)=0$. *Il existe alors une suite exacte :*

$$1\to H^1(X_{Zar}, G)\to H^1(X_{et}, G)\to Ш(X, G)\to 1.$$

Cela résulte des théorèmes 4.2 et 2.1 (2).

Le corollaire suivant a été aussi conjecturé par Serre ([11], n^{os} 5 et 6) :

Corollaire 4.4. — *Soit* X *une courbe algébrique irréductible lisse sur un corps algébriquement clos* k. *L'application canonique* $H^1(X_{Zar}, G)\to H^1(X_{et}, G)$ *est une bijection.*

Preuve. — Sous ces conditions, le corps de fonctions $K = k(X)$ de X a une dimension $\leqq 1$ (théorème de Tsen [12]), et $H^1(K, G) = 0$ par le théorème d'annulation de Steinberg [12], étendu aux corps non parfaits par Borel et Springer. Le corollaire résulte alors de 4.2 et de la suite exacte (1).

THÉORÈME 4.5. — *Soient* R *un anneau local hensélien régulier de dimension quelconque, et* G *un* R*-groupe semi-simple. Alors la conjecture* 1.1 *est vraie pour* G.

Preuve. — Un procédé de récurrence dû à Bialynicki-Birula [1] réduit la conjecture pour les anneaux henséliens de dimension supérieure au même problème pour les anneaux de dimension 1 non henséliens. Donc le théorème 4.5 résulte de 4.2.

5. APPLICATIONS. — Dans cette section R est un anneau local régulier noethérien de corps des fractions K.

THÉORÈME 5.1. — *Soient* G *et* G′ *deux schémas en groupes semi-simples sur* R, *tels qu'il existe un* K*-isomorphisme de leurs fibres génériques* $\varphi : G'_\eta \to G_\eta$. *Supposons que* R *soit de dimension* 1 *ou hensélien. Il existe alors un* K*-automorphisme* α *de* G_η *et un* R*-isomorphisme* $\tilde{\varphi} : G' \xrightarrow{\sim} G$ *qui prolonge* $\alpha \circ \varphi$, *i. e.* $\tilde{\varphi} \otimes_R K = \alpha \circ \varphi$.

Dans le cas où G′ et G sont déployés, l'assertion de 5.1 est une conséquence du théorème de Chevalley-Demazure [5]. Le cas général se ramène à ce cas en utilisant 4.2.

THÉORÈME 5.2. — *Soient* R *un anneau de valuation discrète dont le corps résiduel* k *est de dimension* $\leqq 1$, *et* G *un* R*-groupe réductif. Alors* G(K) *est dense dans* $G(K_v)$ *pour la topologie* v*-adique.*

Une preuve de 5.2 utilise 3.1, la surjectivité du morphisme de norme pour un tel k [12], et des méthodes semblables à celles de 3.3 et 3.5.

L'auteur est reconnaissant aux Professeurs M. Artin, F. Bruhat, G. Harder, B. Mazur et, particulièrement à J.-P. Serre et J. Tits pour les utiles discussions et pour l'attention qu'ils ont prêtée à ce travail et à son auteur.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BIALYNICKI-BIRULA, *Inv. Math.*, 11, 1970, p. 259-262.

[2] A. BOREL et J. TITS, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 27, 1965, p. 55-150.

[3] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local*, II, *Publ. Math. I.H.E.S.* (à paraître), § 5.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 448-453.

[5] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, *S.G.A.* 3, Schémas en Groupes, III, *Lect. Notes in Math.*, 153, Springer, 1971, exposé XXXIV.

[6] A. GROTHENDIECK, *Séminaire Bourbaki*, 18, 1965/1966, exposé 297.

[7] G. HARDER, *Inv. Math.*, 4, 1967, p. 165-191.

[8] G. HARDER, *Archiv Math.*, 19, 1968, p. 465-472.

[9] YE. A. NISNEVICH, *Funkt. Anal. and Appl.*, 14, n° 1, 1980, p. 75-76.

[10] YE. A. NISNEVICH, *Adeles and Grothendieck Topologies*, preprint, 1983.

[11] Séminaire C. Chevalley, E.N.S., 2, 1958, Anneaux de Chow et applications, Secrét. Math., 1958, exposés I, V.

[12] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.*, 5, Springer, 1964, chap. II et III.

Department of Mathematics, State University of New York,
Stony Brook, NY 11794, U.S.A.